2- 上循环交叉积

赵建伟

中国计量学院理学院数学系, 杭州 310018

E-mail: zhaojw@amss.ac.cn

收稿日期: 2010-09-29; 接受日期: 2011-02-01

国家自然科学基金 (批准号: 10926118) 和浙江省自然科学基金 (批准号: Y6110117) 资助项目

摘要 利用 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 和带有正规的 2- 上循环 μ 的离散群 G , 定义了 2- 上循环交叉积, 推广了经典的离散交叉积, 并证明了 2- 上循环交叉积具有结合律.

关键词 von Neumann 代数 2- 上循环交叉积 结合律

MSC (2000) 主题分类 46L10

1 引言

令 $\mathcal{H}$ 表示可分的 Hilbert 空间, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示作用在 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子之集. von Neumann 代数是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中包含单位元的弱算子闭的自伴 $*$ - 子代数. 当 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 的中心 $\mathcal{C}$ 是平凡的, 即 $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbb{C}I$ 时, $\mathcal{M}$ 是因子. von Neumann 和 Murray 把因子分为 I 、 II 和 III 型, 并且分别给出了构造它们的方法.

利用可数离散群 G 的左正则表示构造群 von Neumann 代数 $\mathcal{L}_G$ 是 von Neumann 代数的主要构造方法之一. 具体的构造方法如下:

令

$$l^2(G) = \left\{ \xi : G \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{g \in G} |\xi(g)|^2 < +\infty \right\},$$

内积为

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{g \in G} \xi(g) \overline{\eta(g)},$$

则 $l^2(G)$ 是 Hilbert 空间. $\forall g \in G$, 令 $L(g)$ 表示如下定义的酉算子,

$$L(g)(\xi)(h) = \xi(g^{-1}h), \quad \forall \xi \in l^2(G), h \in G. \quad (1.1)$$

则映射 $g \mapsto L(g)$ 是群 G 在 Hilbert 空间 $l^2(G)$ 上的酉表示, 称为群 G 的左正则表示. 由酉算子之集 $\{L(g) \mid g \in G\}$ 所生成的 von Neumann 代数 $\mathcal{L}_G$ 称为群 von Neumann 代数^[1]. 上述构造群 von Neumann 代数的方法是 von Neumann 代数理论的重要部分, 它不仅为算子代数理论提供了许多具体的 II_1 型因子的例子, 而且吸引了许多算子代数工作者对群 von Neumann 代数同构、代数不变量和代数性质等问题的研究^[2-6].

Connes 和 Jones 在文献 [7] 中给出了 2- 上循环群 von Neumann 代数, 它是群 von Neumann 代数的推广. 具体的构造方法如下:

令 G 是离散群, 其单位元为 e , $\mu \in H^2(G, \mathbb{T})$ 是群 G 上的 2- 上循环, 即 $\mu : G \times G \rightarrow \mathbb{T}$ 满足

$$\mu(g, h)\mu(gh, k) = \mu(h, k)\mu(g, hk), \quad \forall g, h, k \in G, \quad (1.2)$$

其中 $\mathbb{T}$ 是复平面中的单位圆. $\forall g \in G$, 令 $L_\mu(g)$ 表示如下定义的 Hilbert 空间 $l^2(G)$ 上的酉算子,

$$L_\mu(g)(\xi)(h) = \mu(g, g^{-1}h)\xi(g^{-1}h), \quad \forall \xi \in l^2(G), h \in G. \quad (1.3)$$

则映射 $g \mapsto L_\mu(g)$ 称为群 G 关于 μ 在 Hilbert 空间 $l^2(G)$ 上的投影左正则表示. 由酉算子之集 $\{L_\mu(g) \mid g \in G\}$ 所生成的 von Neumann 代数 $\mathcal{L}_\mu(G)$ 称为 2- 上循环群 von Neumann 代数 [7]. 当 $\mu \equiv 1$ 时, 2- 上循环群 von Neumann 代数 $\mathcal{L}_\mu(G)$ 就是群 von Neumann 代数 $\mathcal{L}(G)$. Nicoara 等在文献 [8] 中研究了单参数 2- 上循环群 von Neumann 代数 $\mathcal{L}_{\mu_\alpha}(\mathbb{Z}^2 \rtimes \Gamma)$ 的同构问题.

利用可测空间和上面的作用群构造离散交叉积是构造 von Neumann 代数的另一个重要的方法, 它是 Turumaru^[9] 以及 Nakamura 和 Takeda^[10] 定义的交叉积的特殊情形. 由于抽象的交叉积同构于某一实现的交叉积, 所以这里我们仅回顾实现的交叉积的定义 [11]. 设 $\mathcal{M}$ 是作用在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 von Neumann 代数, G 是离散群, $\alpha : g \mapsto \alpha(g)$ 是群 G 在 $\mathcal{M}$ 上的自同构表示, 且由群 G 在 $\mathcal{H}$ 上的酉表示 $g \mapsto U(g)$ 实现, 则 $\mathcal{M}$ 和 α 的 (实现) 交叉积是作用在 $\mathcal{H} \otimes l^2(G)$ 上的由下列算子

$$\Phi(A) = A \otimes I, \quad V(g) = U(g) \otimes L(g), \quad A \in \mathcal{M}, g \in G, \quad (1.4)$$

所生成的 von Neumann 代数 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$.

吴文明和袁魏在文献 [12] 中研究了离散交叉积的结合律. 本文利用 von Neumann 代数和带有正规的 2- 上循环的离散群 G 构造 2- 上循环交叉积. 当 μ 在 $G \times G$ 上取值为 1 时, 2- 上循环离散交叉积就是经典的离散交叉积. 进一步, 本文研究了 2- 上循环交叉积的结合律, 从而推广文献 [12] 中的定理 3.3.

2 2- 上循环交叉积的定义

设 G 是离散群, 其单位元为 e . 如果 G 上的 2- 上循环 μ 满足

$$\mu(g, e) = \mu(e, g) = 1, \quad \forall g \in G, \quad (2.1)$$

则 μ 称为正规的. 在 Hilbert 空间 $l^2(G)$ 中, 定义 $\chi_g(h) = \delta_{g,h}$, 则 $\{\chi_g \mid g \in G\}$ 为 $l^2(G)$ 的正规正交基. 令 E_g 表示 Hilbert 空间 $l^2(G)$ 到 χ_g 所生成的一维子空间上的投影. 现在, 我们给出 (抽象) 2- 上循环交叉积的定义.

定义 2.1 设 $\mathcal{M}$ 是作用在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 von Neumann 代数, G 是离散群, $\mu \in H^2(G, \mathbb{T})$ 是群 G 上的正规 2- 上循环, $\alpha : g \mapsto \alpha(g)$ 是群 G 在 $\mathcal{M}$ 上的自同构表示, 则 $\mathcal{M}$ 和 α 的 (抽象) 2- 上循环交叉积是作用在 $\mathcal{H} \otimes l^2(G)$ 上的由下列算子

$$\Phi(A) = \sum_{g \in G} \alpha(g)^{-1}(A) \otimes E_g, \quad \Psi(g) = I \otimes L_\mu(g), \quad A \in \mathcal{M}, g \in G, \quad (2.2)$$

所生成的 von Neumann 代数 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha^\mu G$.

$\forall g, h \in G$, 取 $\mu(g, h) = 1$, 则 μ 是 G 上的正规 2- 上循环且 $L(g) = L_\mu(g)$. 因此, 我们得到如下结论:

注 2.2 离散交叉积是 2- 上循环交叉积的特殊情形.

类似于 Kadison 和 Ringrose 在著作 [11] 中关于离散交叉积的研究, 本文将研究 (实现) 2- 上循环交叉积. 为此, 我们先建立以下性质 2.3.

性质 2.3 设 $\mathcal{M}$ 是作用在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 von Neumann 代数, G 是离散群, $\mu \in H^2(G, \mathbb{T})$ 是群 G 上的正规 2- 上循环, $\alpha: g \mapsto \alpha(g)$ 是群 G 在 $\mathcal{M}$ 上的自同构表示.

(i) 如果 θ 是从 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 上的 $*$ - 同构, β 是群 G 在 $\mathcal{N}$ 上的自同构表示 $g \mapsto \beta(g) = \theta\alpha(g)\theta^{-1}$, 则 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha^\mu G$ $*$ - 同构于 $\mathcal{N} \rtimes_\beta^\mu G$.

(ii) 存在从 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 上的 $*$ - 同构 θ , 使得群 G 在 $\mathcal{N}$ 上的自同构表示 $g \mapsto \theta\alpha(g)\theta^{-1}$ 可以被酉实现.

证明 (i) 令 $\pi = \theta \otimes I$, 其中 I 是作用在 $l^2(G)$ 上的恒等算子, 则 π 是从 von Neumann 代数 $\mathcal{M} \overline{\otimes} \mathcal{B}(l^2(G))$ 到 von Neumann 代数 $\mathcal{N} \overline{\otimes} \mathcal{B}(l^2(G))$ 上的 $*$ - 同构. 因为 $\pi(\mathcal{M} \rtimes_\alpha^\mu G)$ 是由算子 $\pi(\Phi(A))$ ($A \in \mathcal{M}$) 和 $\pi(\Psi(g))$ ($g \in G$) 所生成的 von Neumann 代数, 而

$$\pi(\Phi(A)) = \sum_{g \in G} \beta(g)^{-1}(\theta(A)) \otimes E_g, \quad \pi(\Psi(g)) = I \otimes L_\mu(g),$$

所以 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha^\mu G$ $*$ - 同构于 $\mathcal{N} \rtimes_\beta^\mu G$.

(ii) 令 $\theta: \mathcal{M} \rightarrow \Phi(\mathcal{M})$ 定义为 $\theta(A) = \Phi(A) = \sum_{g \in G} \alpha(g)^{-1}(A) \otimes E_g$, 则 θ 是 $*$ - 同构且 $\beta: g \mapsto \beta(g) = \theta\alpha(g)\theta^{-1}$ 是群 G 在 $\Phi(\mathcal{M})$ 上的自同构表示. 定义 $\mathcal{H} \otimes l^2(G)$ 上的算子 $U(g)$ 为

$$U(g) \left(\sum_{h \in G} \xi(h) \otimes \chi_h \right) = \sum_{h \in G} \xi(h) \otimes \chi_{gh},$$

则容易验证 $U(g)$ 是作用在 $\mathcal{H} \otimes l^2(G)$ 上的酉算子. 此时, $U: g \mapsto U(g)$ 是群 G 在 $\mathcal{H} \otimes l^2(G)$ 上的酉表示. 由于

$$U(g)\Phi(A)U(g)^* = \beta(g)(\Phi(A)), \quad \forall A \in \mathcal{M}, \forall g \in G,$$

所以 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha^\mu G$ $*$ - 同构于 $\Phi(\mathcal{M}) \rtimes_\beta^\mu G$, 其中酉表示 U 实现自同构表示 β . $\square$

设群 G 在 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 上的自同构表示 α 能够由酉表示 $U: g \mapsto U(g)$ 在 $\mathcal{H}$ 上实现. 令

$$W = \sum_{g \in G} U(g) \otimes E_g,$$

则 W 是作用在 Hilbert 空间 $\mathcal{H} \otimes l^2(G)$ 上的酉算子. 因为

$$\begin{aligned} W\Phi(A)W^* \left(\sum_{g \in G} \xi(g) \otimes \chi_g \right) &= W\Phi(A) \left(\sum_{g \in G} U(g^{-1})(\xi(g)) \otimes \chi_g \right) \\ &= W \left(\sum_{g \in G} \alpha(g)^{-1}(A) \otimes E_g \right) \left(\sum_{h \in G} U(h^{-1})(\xi(h)) \otimes \chi_h \right) \\ &= W \left(\sum_{g \in G} \sum_{h \in G} \alpha(g)^{-1}(A) (U(h^{-1})(\xi(h))) \otimes E_g(\chi_h) \right) \\ &= W \left(\sum_{g \in G} U(g^{-1})A(\xi(g)) \otimes \chi_g \right) = \sum_{g \in G} A\xi(g) \otimes \chi_g \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{g \in G} A \otimes E_g \right) \left(\sum_{h \in G} \xi(h) \otimes \chi_h \right) = (A \otimes I) \left(\sum_{g \in G} \xi(g) \otimes \chi_g \right),$$

所以

$$W\Phi(A)W^* = A \otimes I. \quad (2.3)$$

又因

$$\begin{aligned} W\Psi(g)W^* \left(\sum_{h \in G} \xi(h) \otimes \chi_h \right) &= W\Psi(g) \left(\sum_{h \in G} U(h^{-1})(\xi(h)) \otimes \chi_h \right) \\ &= W \left(\sum_{h \in G} U(h^{-1})(\xi(h)) \otimes L_\mu(g)(\chi_h) \right) \\ &= W \left(\sum_{h \in G} U(h^{-1})(\xi(h)) \otimes \mu(g, h)(\chi_{gh}) \right) \\ &= W \left(\sum_{h \in G} \mu(g, g^{-1}h) U(h^{-1}g)(\xi(g^{-1}h)) \otimes \chi_h \right) \\ &= \sum_{h \in G} \mu(g, g^{-1}h) U(g)(\xi(g^{-1}h)) \otimes \chi_h \\ &= (U(g) \otimes L_\mu(g)) \left(\sum_{h \in G} \xi(h) \otimes \chi_h \right), \end{aligned}$$

所以

$$W\Psi(g)W^* = U(g) \otimes L_\mu(g). \quad (2.4)$$

因此, $W(\mathcal{M} \rtimes_\alpha^\mu G)W^*$ 是由 $\{A \otimes I, U(g) \otimes L_\mu(g) \mid A \in \mathcal{M}, g \in G\}$ 所生成的 von Neumann 代数. 由于 $W(\mathcal{M} \rtimes_\alpha^\mu G)W^*$ 酉等价于 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha^\mu G$, 所以建立并研究 (实现) 2- 上循环交叉积是合理的.

定义 2.4 设 $\mathcal{M}$ 是作用在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 von Neumann 代数, G 是离散群, $\mu \in H^2(G, \mathbb{T})$ 是群 G 上的正规 2- 上循环, $\alpha: g \mapsto \alpha(g)$ 是群 G 在 $\mathcal{M}$ 上的自同构表示, 且由酉表示 $g \mapsto U(g)$ 在 $\mathcal{H}$ 上实现, 则 $\mathcal{M}$ 和 α 的 (实现) 2- 上循环交叉积是作用在 $\mathcal{H} \otimes l^2(G)$ 上的由下列算子

$$\varphi(A) = A \otimes I, \quad \psi(g) = U(g) \otimes L_\mu(g), \quad A \in \mathcal{M}, g \in G, \quad (2.5)$$

所生成的 von Neumann 代数 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha^\mu G$.

$\forall g, h \in G$, 因为

$$\begin{aligned} L_\mu(g)L_\mu(h)(\xi)(k) &= \mu(g, g^{-1}k)(L_\mu(h)(\xi))(g^{-1}k) = \mu(g, g^{-1}k)\mu(h, h^{-1}g^{-1}k)\xi(h^{-1}g^{-1}k) \\ &= \mu(gh, (gh)^{-1}k)\overline{\mu(gh, (gh)^{-1}k)}\mu(g, g^{-1}k)\mu(h, h^{-1}g^{-1}k)\xi(h^{-1}g^{-1}k) \\ &= \mu(g, g^{-1}k)\mu(h, h^{-1}g^{-1}k)\overline{\mu(gh, (gh)^{-1}k)}L_\mu(gh)(\xi)(k) \\ &= \mu(g, g^{-1}k)\mu(h, h^{-1}g^{-1}k)\mu(g, h)\overline{\mu(h, h^{-1}g^{-1}k)}\mu(g, g^{-1}k)L_\mu(gh)(\xi)(k) \\ &= \mu(g, h)L_\mu(gh)(\xi)(k) \quad (\forall \xi \in l^2(G), k \in G), \end{aligned}$$

所以

$$L_\mu(g)L_\mu(h) = \mu(g, h)L_\mu(gh). \quad (2.6)$$

从而集合 $\{AU(g) \otimes L_\mu(g) \mid A \in \mathcal{M}, g \in G\}$ 的线性扩张 $\mathcal{R}_0$ 在 (实现) 2- 上循环交叉积 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha^\mu G$ 中是稠密的.

3 2- 上循环交叉积的结合律

令 $G \rtimes_{\sigma} K$ 是离散群 G 和 K 的半直积, 其中群 G 和 K 的单位元分别为 e_1 和 e_2 , μ 是 $G \rtimes_{\sigma} K$ 上的正规 2- 上循环, $\mathcal{M}$ 是作用在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 von Neumann 代数, α 是群 $G \rtimes_{\sigma} K$ 在 $\mathcal{M}$ 上的自同构表示, 且由酉表示 $U : (g, k) \mapsto U(g, k)$ 在 $\mathcal{H}$ 上实现, 则由定义 2.4 可以得到作用在 $\mathcal{H} \otimes l^2(G \rtimes_{\sigma} K)$ 上的 2- 上循环交叉积 $\mathcal{M} \rtimes_{\alpha}^{\mu}(G \rtimes_{\sigma} K)$.

由于群 G 能够嵌入到半直积群 $G \rtimes_{\sigma} K$ 中, 因此群 G 在 $\mathcal{M}$ 上的自同构表示 α' 能够由酉表示 $U' : g \mapsto U(g, e_2)$ 在 $\mathcal{H}$ 上实现. 定义群 G 上的正规 2- 上循环 μ' 如下:

$$\mu'(g_1, g_2) = \mu((g_1, e_2), (g_2, e_2)), \quad \forall g_1, g_2 \in G,$$

则根据定义 2.4 可以构造作用在 $\mathcal{H} \otimes l^2(G)$ 上的 2- 上循环交叉积 $\mathcal{M} \rtimes_{\alpha'}^{\mu'} G$.

$\forall k \in K$, 定义 Hilbert 空间 $l^2(G)$ 上的算子 $V(k)$ 如下:

$$V(k)(\xi)(g) = \xi(\sigma(k^{-1})(g)), \quad \forall \xi \in l^2(G), g \in G, \quad (3.1)$$

容易验证 $V(k)$ 是 $l^2(G)$ 上的酉算子. $\forall k \in K$, 令

$$\beta(k) = \text{Ad}(U(e_1, k) \otimes V(k)), \quad (3.2)$$

其中

$$\text{Ad}(U(e_1, k) \otimes V(k))(S \otimes T) = U(e_1, k)SU(e_1, k)^* \otimes V(k)TV(k)^*, \quad \forall S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), T \in \mathcal{B}(l^2(G)),$$

则 $\beta(k) \in \text{Aut}(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(l^2(G)))$ 且 $\beta : k \mapsto \beta(k)$ 是群 K 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(l^2(G))$ 上的自同构表示.

引理 3.1 如果群 G 上的限制的 2- 上循环 μ' 满足

$$\mu'(g_1, g_2) = \mu'(\sigma(k)(g_1), \sigma(k)(g_2)), \quad \forall g_1, g_2 \in G, k \in K, \quad (3.3)$$

则 (3.2) 中的 β 是群 K 在 2- 上循环交叉积 $\mathcal{M} \rtimes_{\alpha'}^{\mu'} G$ 上的自同构表示.

证明 $\forall k \in K, AU'(g) \otimes L_{\mu'}(g) \in \mathcal{M} \rtimes_{\alpha'}^{\mu'} G$, 由 (1.2) 和 (3.3) 可知,

$$\begin{aligned} V(k)L_{\mu'}(g)V(k)^*(\xi)(h) &= L_{\mu'}(g)V(k)^*(\xi)(\sigma(k^{-1})(h)) \\ &= \mu'(g, g^{-1}\sigma(k^{-1})(h))V(k)^*(\xi)(g^{-1}\sigma(k^{-1})(h)) \\ &= \mu'(g, g^{-1}\sigma(k^{-1})(h))(\xi)((\sigma(k)(g^{-1}))h) \\ &= \overline{\mu'(\sigma(k)(g), \sigma(k)(g^{-1}h))\mu'(g, g^{-1}\sigma(k^{-1})(h))}L_{\mu'}(\sigma(k)(g))(\xi)(h) \\ &= L_{\mu'}(\sigma(k)(g))(\xi)(h) \quad (\forall \xi \in l^2(G), h \in G), \end{aligned}$$

即 $V(k)L_{\mu'}(g)V(k)^* = L_{\mu'}(\sigma(k)(g))$, 所以

$$\begin{aligned} \beta(k)(AU(g) \otimes L_{\mu'}(g)) &= U(e_1, k)AU'(g)U(e_1, k)^* \otimes V(k)L_{\mu'}(g)V(k)^* \\ &= (U(e_1, k)AU(e_1, k)^*)U(e_1, k)U(g, e_2)U(e_1, k)^* \otimes V(k)L_{\mu'}(g)V(k)^* \\ &= (U(e_1, k)AU(e_1, k)^*)U(\sigma(k)(g), e_2) \otimes V(k)L_{\mu'}(g)V(k)^* \\ &= \alpha(e_1, k)(A)U(\sigma(k)(g), e_2) \otimes L_{\mu'}(\sigma(k)(g)). \end{aligned}$$

由此推出 $\beta(k)(\mathcal{M} \rtimes_{\alpha'}^{\mu'} G) \subseteq \mathcal{M} \rtimes_{\alpha'}^{\mu'} G$. 由于集合 $\{AU'(g) \otimes L_{\mu'}(g) \mid A \in \mathcal{M}, g \in G\}$ 的线性扩张在 2- 上循环交叉积 $\mathcal{M} \rtimes_{\alpha'}^{\mu'} G$ 中稠密且 $\beta(k) \in \text{Aut}(\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(l^2(G)))$, 所以上述 β 是群 K 在 2- 上循环交叉积 $\mathcal{M} \rtimes_{\alpha'}^{\mu'} G$ 上的自同构表示. $\square$

由于群 K 能够嵌入到半直积群 $G \rtimes_{\sigma} K$ 中, 所以可以定义群 K 上的正规 2- 上循环 μ'' 如下:

$$\mu''(k_1, k_2) = \mu((e_1, k_1), (e_1, k_2)), \quad \forall k_1, k_2 \in K.$$

从而, 根据定义 2.4, 我们可以构造作用在 $\mathcal{H} \otimes l^2(G) \otimes l^2(K)$ 上的 2- 上循环交叉积 $(\mathcal{M} \rtimes_{\alpha'}^{\mu'} G) \rtimes_{\beta}^{\mu''} K$. 现在, 我们证明 2- 上循环交叉积 $\mathcal{M} \rtimes_{\alpha}^{\mu} (G \rtimes_{\sigma} K)$ 同构于 2- 上循环交叉积 $(\mathcal{M} \rtimes_{\alpha'}^{\mu'} G) \rtimes_{\beta}^{\mu''} K$.

定理 3.2 设半直积群 $G \rtimes_{\sigma} K$ 上的正规 2- 上循环 μ 满足下列条件:

(i) 群 G 上的限制 2- 上循环 μ' 满足

$$\mu'(g_1, g_2) = \mu'(\sigma(k)(g_1), \sigma(k)(g_2)), \quad \forall g_1, g_2 \in G, k \in K;$$

$$(\dot{2}) \mu((g, k), (g, k)^{-1}(h, l)) = \mu'(g, g^{-1}h)\mu''(k, k^{-1}l), \quad \forall g, h \in G, k, l \in K.$$

则 2- 上循环交叉积 $\mathcal{M} \rtimes_{\alpha}^{\mu} (G \rtimes_{\sigma} K)$ 同构于 $(\mathcal{M} \rtimes_{\alpha'}^{\mu'} G) \rtimes_{\beta}^{\mu''} K$.

证明 定义从 Hilbert 空间 $l^2(G \rtimes_{\sigma} K)$ 到 Hilbert 空间 $l^2(G) \otimes l^2(K)$ 上的算子 W 为

$$W\left(\sum_{(h,l) \in G \rtimes_{\sigma} K} \xi(h, l) \chi_{(h,l)}\right) = \sum_{h \in G, l \in K} \xi(h, l) \chi_h \otimes \chi_l,$$

则 W 是酉算子.

由于

$$\begin{aligned} WL_{\mu}(g, k)W^*\left(\sum_{h \in G, l \in K} \xi(h, l) \chi_h \otimes \chi_l\right) &= WL_{\mu}(g, k)\left(\sum_{(h,l) \in G \rtimes_{\sigma} K} \xi(h, l) \chi_{(h,l)}\right) \\ &= W\left(\sum_{(h,l) \in G \rtimes_{\sigma} K} \mu((g, k), (h, l)) \xi(h, l) \chi_{(g,k)(h,l)}\right) \\ &= W\left(\sum_{(h,l) \in G \rtimes_{\sigma} K} \mu((g, k), (g, k)^{-1}(h, l)) \xi((g, k)^{-1}(h, l)) \chi_{(h,l)}\right) \\ &= \sum_{h \in G, l \in K} \mu((g, k), (g, k)^{-1}(h, l)) \xi((g, k)^{-1}(h, l)) \chi_h \otimes \chi_l, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} L_{\mu'}(g)V(k) \otimes L_{\mu''}(k)\left(\sum_{h \in G, l \in K} \xi(h, l) \chi_h \otimes \chi_l\right) &= \sum_{h \in G, l \in K} \xi(h, l) L_{\mu'}(g)V(k) \chi_h \otimes L_{\mu''}(k) \chi_l \\ &= \sum_{h \in G, l \in K} \xi(h, l) L_{\mu'}(g) \chi_{\sigma(k)h} \otimes L_{\mu''}(k) \chi_l \\ &= \sum_{h \in G, l \in K} \xi(h, l) \mu'(g, \sigma(k)h) \mu''(k, l) \chi_{g\sigma(k)h} \otimes \chi_{kl} \\ &= \sum_{h \in G, l \in K} \xi((g, k)^{-1}(h, l)) \mu'(g, g^{-1}h) \mu''(k, k^{-1}l) \chi_h \otimes \chi_l, \end{aligned}$$

则由条件 (2) 可知,

$$WL_\mu(g, k)W^* = L_{\mu'}(g)V(k) \otimes L_{\mu''}(k). \quad (3.4)$$

容易验证

$$AU'(g)U(e_1, k) = AU(g, k), \quad \forall g \in G, k \in K, A \in \mathcal{M}. \quad (3.5)$$

由于集合 $\{AU(g, k) \otimes L_\mu(g, k) \mid A \in \mathcal{M}, (g, k) \in G \rtimes_\sigma K\}$ 的线性扩张在 2- 上循环交叉积 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha^\mu (G \rtimes_\sigma K)$ 中稠密, 而集合 $\{AU'(g)U''(k) \otimes L_{\mu'}(g)V(k) \otimes L_{\mu''}(k) \mid A \in \mathcal{M}, g \in G, k \in K\}$ 的线性扩张在 2- 上循环交叉积 $(\mathcal{M} \rtimes_{\alpha'}^{\mu'} G) \rtimes_{\beta}^{\mu''} K$ 中稠密, 所以由 (3.4) 和 (3.5) 可知, 2- 上循环交叉积 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha^\mu (G \rtimes_\sigma K) *$ 同构于 $(\mathcal{M} \rtimes_{\alpha'}^{\mu'} G) \rtimes_{\beta}^{\mu''} K$. $\square$

$\forall g, h \in G, k, l \in K$, 取 $\mu((g, k), (h, l)) = 1$, 则 μ 是 $G \rtimes_\sigma K$ 上的正规 2- 上循环且满足定理 3.2 中的条件 (i) 和 (2). 因此, 我们可以得到文献 [12] 中定理 3.3.

注 3.3^[12] 离散交叉积 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha (G \rtimes_\sigma K) *$ 同构于离散交叉积 $(\mathcal{M} \rtimes_\alpha G) \rtimes_\beta K$.

当 von Neumann 代数 $\mathcal{M} = \mathbb{C}I$ 时, 2- 上循环交叉积 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha^\mu G$ 是 2- 上循环群 von Neumann 代数 $\mathcal{L}_\mu(G)$. 因此, 我们得到下面的推论:

推论 3.4 设半直积群 $G \rtimes_\sigma K$ 上的正规 2- 上循环 μ 满足下列条件:

(i) 群 G 上的限制 2- 上循环 μ' 满足

$$\mu'(g_1, g_2) = \mu'(\sigma(k)(g_1), \sigma(k)(g_2)), \quad \forall g_1, g_2 \in G, k \in K;$$

(2) $\mu((g, k), (g, k)^{-1}(h, l)) = \mu'(g, g^{-1}h)\mu''(k, k^{-1}l), \forall g, h \in G, k, l \in K$.

则 2- 上循环群 von Neumann 代数 $\mathcal{L}_\mu(G \rtimes_\sigma K) *$ 同构于 $\mathcal{L}_{\mu'}(G) \rtimes_{\beta}^{\mu''} K$.

下面将举例说明满足定理 3.2 中条件 (i) 和 (2) 的非平凡的 2- 上循环 μ 是存在的.

例 3.5 令 G 是加法群 $\mathbb{Z}^2$, K 为特殊线性群 $SL(2, \mathbb{Z})$. $\forall B \in SL(2, \mathbb{Z})$, 定义群 $\mathbb{Z}^2$ 上的映射 σ_B 为 $\sigma_B(x) = Bx$, 则 σ_B 是群 $\mathbb{Z}^2$ 上的自同构, 而 $\sigma: B \mapsto \sigma_B$ 是群 $SL(2, \mathbb{Z})$ 到 $\text{Aut}(\mathbb{Z}^2)$ 中的同态. 利用群 $\mathbb{Z}^2$ 和 $SL(2, \mathbb{Z})$ 构造半直积群 $\mathbb{Z}^2 \rtimes_\sigma SL(2, \mathbb{Z})$. 对于数 $\lambda \in \mathbb{T}$, 定义

$$\mu((x, A), (y, B)) = \lambda^{\frac{1}{2}|x, Ay|},$$

其中 $|x, Ay|$ 表示矩阵 $(x, Ay)_{2 \times 2}$ 的行列式. 由于 $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}^2, A, B, C \in SL(2, \mathbb{Z})$,

$$\mu((0, E), (x, A)) = \lambda^{\frac{1}{2}|0, x|} = 1 = \mu((x, A), (0, E)),$$

且

$$\begin{aligned} & \mu((x, A), (y, B))\mu((x, A)(y, B), (z, C)) \\ &= \mu((x, A), (y, B))\mu((x + Ay, AB), (z, C)) \\ &= \lambda^{\frac{1}{2}|x, Ay|} \lambda^{\frac{1}{2}|x + Ay, ABz|} = \lambda^{\frac{1}{2}(|x, Ay| + |x + Ay, ABz|)} \\ &= \lambda^{\frac{1}{2}(|x, Ay| + |x, ABz| + |Ay, ABz|)} = \lambda^{\frac{1}{2}(|x, Ay| + |x, ABz| + |y, Bz|)} \\ &= \lambda^{\frac{1}{2}(|x, Ay + ABz| + |y, Bz|)} = \lambda^{\frac{1}{2}|x, Ay + ABz|} \lambda^{\frac{1}{2}|y, Bz|} \\ &= \mu((x, A), (y + Bz, BC))\mu((y, B), (z, C)) \\ &= \mu((y, B), (z, C))\mu((x, A), (y, B)(z, C)), \end{aligned}$$

所以 μ 是群 $\mathbb{Z}^2 \rtimes_\sigma SL(2, \mathbb{Z})$ 上的正规 2- 上循环.

(i) 由于

$$\mu'(x, y) = \mu((x, E), (y, E)) = \lambda^{\frac{1}{2}|x, y|}$$

且

$$\mu'(\sigma(A)(x), \sigma(A)(y)) = \lambda^{\frac{1}{2}|Ax, Ay|} = \lambda^{\frac{1}{2}|x, y|} = \mu'(x, y),$$

所以定理 3.2 中的条件 (i) 成立.

(j) 由于

$$\begin{aligned} \mu((x, A), (x, A)^{-1}(y, B)) &= \mu((x, A), (\sigma(A^{-1})(y - x), A^{-1}B)) \\ &= \mu((x, A), (A^{-1}(y - x), A^{-1}B)) \\ &= \lambda^{\frac{1}{2}|x, y-x|} = \lambda^{\frac{1}{2}|x, y|} \end{aligned}$$

且

$$\mu'(x, y - x)\mu''(A, A^{-1}B) = \lambda^{\frac{1}{2}|x, y-x|}\mu((0, A), (0, A^{-1}B)) = \lambda^{\frac{1}{2}|x, y|},$$

所以定理 3.2 中的条件 (j) 成立.

参考文献

- 1 Murray F J, von Neumann J. On rings of operators. Ann Math, 1936, 37: 116–229
- 2 Murray F J, von Neumann J. On rings of operators IV. Ann Math, 1943, 44: 716–808
- 3 Voiculescu D, Dykema K, Nica A. Free Random Variable. CRM Monogr Ser, vol. 1. Providence, RI: Amer Math Soc, 1992
- 4 Popa S. On Ozawa's property for free group factors. Int Math Res Notices, 2007, doi:10.1093/imrn/rnm036
- 5 Vaes S. An inner amenable group whose von Neumann algebra does not have property Gamma. arXiv: 0909.1485, 2009
- 6 Ioana A, Popa S, Vaes S. A class of superrigid group von Neumann algebras. arXiv: 1007.1412v1, 2010
- 7 Connes A, Jones V F R. Property (T) for von Neumann algebras. Bull London Math Soc, 1985, 17: 57–62
- 8 Nicoara R, Popa S, Sasyk R. On II_1 factors arising from 2-cocycles of w -rigid groups. J Funct Anal, 2007, 242: 230–246
- 9 Turumaru T. Crossed products of operator algebras. Tohoku Math J, 1958, 10: 335–365
- 10 Nakamura M, Takeda Z. On some elementary properties of the crossed product of von Neumann algebras. Proc Japan Acad Ser A Math Sci, 1958, 34: 489–494
- 11 Kadison R V, Ringrose J. Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, vols. I and II. Orlando: Academic Press, 1983 and 1986
- 12 吴文明, 袁巍. von Neumann 代数交叉积的注记. 数学学报, 2008, 51: 803–808
- 13 吴文明. 与群 $PSL_2(\mathcal{R})$ 相关的交叉积 $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \alpha)$ 的一点注记. 中国科学 A 辑, 2007, 37: 1283–1290
- 14 张小霞, 郭懋正. Woronowicz C^* 代数交叉积的正则与协变表示. 中国科学 A 辑, 2005, 35: 982–996

2-Cocycle crossed products

ZHAO JianWei

Abstract A 2-cocycle crossed product is defined in this paper given a von Neumann algebra $\mathcal{M}$ and a discrete group G with a normalized 2-cocycle μ on it, which generalizes the classical discrete crossed product. Also, the associative law of the 2-cocycle crossed product is shown in this paper.

Keywords: von Neumann algebra, 2-cocycle crossed product, associative law

MSC(2000): 46L10

doi: 10.1360/012010-762