Lie 理论中一类 Poisson 结构的构造

献给钱敏教授 90 华诞

路江华, 于世卓*

香港大学数学系, 香港

E-mail: jhlu@maths.hku.hk, yusz@hku.hk

收稿日期: 2017-07-17; 接受日期: 2017-08-16; 网络出版日期: 2017-11-10; * 通信作者

香港研究资助局 (批准号: GRF HKU 17304415) 资助项目

摘要 Poisson 几何是 Hamilton 力学及辛流形紧化自然的研究框架. 本文介绍了一类与 Lie 理论有关的 Poisson 流形. 这类 Poisson 流形的构造来自于量子群, 并与分次扩张 Poisson 代数有着紧密的联系.

关键词 Poisson 结构 Lie 理论 分次扩张 Poisson 代数

MSC (2010) 主题分类 53D17, 53D55

1 引言

Poisson 几何起源于 19 世纪的力学, 是以法国著名数学及物理学家 Poisson (1781–1840) 命名的一套理论. 鉴于其与数学物理的紧密联系, Poisson 几何在近 30 年来受到越来越多研究者的关注. 以 Lichnerowicz^[1] 和 Weinstein^[2] 为代表, 现代 Poisson 几何理论被逐步构建并不断发展. 如今, Poisson 几何理论与经典力学、辛几何、可积系统、非交换几何及表示论等领域的联系正被研究者们陆续地发掘出来, 这也使 Poisson 几何成为具有广泛发展前景的一门学科.

本文首先回顾 Poisson 结构的定义. 根据 Poisson 结构的定义知, Poisson 结构的构造等价于超定偏微分方程组 (2.1) 的求解. 然而, 由于 (2.1) 较为复杂, 因而很难通过直接求解来构造 Poisson 结构. 而本文从量子群的相关理论入手, 利用拟三角 r 矩阵与 Lie 代数在流形上的作用, 系统地给出了一类 Poisson 结构的构造方法, 详见定理 3.2.1. 定理 3.2.1 可以系统性地构造出全纯及光滑的 Poisson 结构. 本文列出了一系列具有深刻几何意义的例子, 其中包括旗簇和对称空间等, 详见第 3.3 小节. 这不仅说明非平凡 Poisson 结构在 Lie 理论中是普遍存在的, 也为研究者们进一步发掘 Lie 理论中 Poisson 结构的几何及物理意义提供了便利.

此外, 本文还介绍了分次扩张 Poisson 代数的定义、在 Lie 理论中的例子、以及重要的最新成果. 特别地, 本文以旗簇 $(G/B, \pi_1)$ 为例 (详见定理 4.1.1), 建立了由定理 3.2.1 构造的 Poisson 结构到分次扩张 Poisson 代数的紧密联系, 进而体现了这一类 Poisson 结构的广泛应用与重要价值.

英文引用格式: Lu J H, Yu S Z. On a class of Poisson structures from Lie theory (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1681–1692, doi: 10.1360/N012017-00157

2 Poisson 几何概述

2.1 Poisson 结构的定义

在一个交换结合代数上, Poisson 结构的定义如下.

定义 2.1.1 取域 $\mathbf{k}$ 上的一个交换结合代数 A , 并在 A 上赋予二元线性运算

$$\{, \} : A \times A \rightarrow A.$$

若 $(A, \{, \})$ 是一个 Lie 代数, 且满足 Leibniz 法则

$$\{a, bc\} = b\{a, c\} + c\{a, b\}, \quad a, b, c \in A,$$

则称 $\{, \}$ 为 A 上的 Poisson 结构, 并称 $(A, \{, \})$ 为一个 Poisson 代数.

在一个光滑流形上, Poisson 结构的定义如下.

定义 2.1.2 设 P 为一个光滑流形, π 为 P 上给定的双向量场. 对于任意光滑函数 f 和 g , 若

$$\{f, g\} := \pi(df, dg)$$

是一个 Poisson 括号, 则称 π 是 P 上的 Poisson 结构.

在流形 P 的局部坐标 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中, 令 π 是 P 的双向量场,

$$\pi = \sum_{i < j} \{x_i, x_j\} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

根据 Leibniz 法则可知,

$$\{f, g\} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \{x_i, x_j\} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \quad f, g \in C^\infty(P).$$

设 $\pi_{ij} = \{x_i, x_j\}$, $1 \leq i < j \leq n$. 二元运算 $\{, \}$ 满足 Jacobi 恒等式当且仅当 $\{\pi_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ 满足偏微分方程组

$$\sum_{m=1}^n \left(\pi_{m,k} \frac{\partial \pi_{i,j}}{\partial x_m} + \pi_{m,j} \frac{\partial \pi_{k,i}}{\partial x_m} + \pi_{m,i} \frac{\partial \pi_{j,k}}{\partial x_m} \right) = 0, \quad 1 \leq i < j < k \leq n. \quad (2.1)$$

注意到, (2.1) 是一个由 $\binom{n}{2}$ 个函数及 $\binom{n}{3}$ 个一阶偏微分方程组成的非线性偏微分方程组. 当 $n \geq 3$ 时, 由于 (2.1) 是一个超定方程组, 它的直接求解并不容易. 虽然如此, 随着对 Poisson 结构的深入研究, 我们可以通过代数方法给出很多 (2.1) 的非平凡解.

设 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 为 $\mathbf{k}^n$ 的一组基底. 下面是 $\mathbf{k}^n$ 上一些常见的 Poisson 结构的例子.

例 2.1.1 (常数 Poisson 结构) 设 (c_{ij}) 为域 $\mathbf{k}$ 上的任意一组常数, 则在 $A = \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 上, 我们可以定义下面的常数 Poisson 结构:

$$\{x_i, x_j\} = c_{ij} \in \mathbf{k}.$$

例 2.1.2 (线性 Poisson 结构) 设 (c_{ij}^k) 为域 $\mathbf{k}$ 上 n 维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一组结构常数. 在 $A = \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 上, 我们可以定义下面的线性 Poisson 结构:

$$\{x_i, x_j\} = \sum_k^n c_{ij}^k x_k.$$

例 2.1.3 (二次 Poisson 结构) 在 $A = \mathbf{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 上, $\mathbf{k}$ 上每个反对称纯量矩阵 $C = (c_{ij})$ 都诱导一个特殊的二次 Poisson 结构

$$\{x_i, x_j\} = c_{ij}x_i x_j.$$

这类二次 Poisson 被称为 log-canonical 二次 Poisson 结构. 其他二次 Poisson 结构的研究还包括文献 [3].

2.2 Poisson 几何的经典理论

流形上非平凡的 Poisson 结构往往有着非平凡的几何意义, Poisson 几何的经典理论便着眼于此. 对于一个光滑 Poisson 流形 (P, π) , Poisson 结构 $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TP)$ 都可以诱导出一个丛映射

$$\pi^\# : T^*P \rightarrow TP, \quad \langle \pi^\#(\alpha), \beta \rangle = \pi(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \Gamma(T^*P).$$

因此, P 上的任意光滑函数 f 都可以转化成 Hamilton 向量场 $\pi^\#(df)$. 特别地, 如果 $\pi^\# : T^*P \rightarrow TP$ 是非退化的, 那么, π 可以自然地可以诱导 P 上的辛结构 ω . 因此, Poisson 结构可以看作辛结构的推广.

1983 年, Weinstein [2] 对 Poisson 流形的局部结构进行了深入的研究. 他证明了在任意光滑 Poisson 流形 (P, π) 上, 分布

$$\mathcal{S}_\pi = \bigcup_{p \in P} \text{Im}(\pi_p^\#)$$

是可积的, 而且该积分流形带有由 π 自然诱导的辛结构, 并据此定义了辛叶的概念. 进而, 任意的 Poisson 流形都可以分解成为辛叶的无交并.

例 2.2.1 考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的线性 Poisson 结构

$$\pi = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

对任意 $r \geq 0$, 定义

$$S_r = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

则 Poisson 流形 $(\mathbb{R}^3, \pi)$ 的辛叶分解为

$$\mathbb{R}^3 = \bigsqcup_{r \geq 0} S_r.$$

在 Weinstein 工作的基础之上, 20 世纪 90 年代初, Poisson 结构的重要几何意义被研究者们逐步地发掘出来, 其中, 代表性的研究领域包括:

- (1) Poisson 流形上辛叶分解 [2];
- (2) Poisson 结构的规范形及辛叶的稳定性 [4];
- (3) Poisson 群胚及辛群胚的研究 [5-8];
- (4) Poisson 同调与 Poisson 上同调的研究 [9, 10] 等.

以上工作成为 Poisson 几何的经典理论, 其重要意义也受到了数学界的普遍认可.

Poisson 几何是辛几何的推广, 因而, 自然有着其独到的优势. 首先, 在 Hamilton 力学中, 相较于辛几何, Poisson 几何是更好的数学框架. 其次, 任意流形上一定存在 Poisson 结构, 却并不一定存在辛结构 (如 S^4). 再次, 从一个辛流形上延拓到一个更大辛流形的条件往往比较苛刻, 而当我们把该辛流形看作 Poisson 流形时, 把这个 Poisson 流形延拓的一个更大的 Poisson 流形却比较容易实现.

例 2.2.2 在四维球面

$$S^4 = \{(z_1, z_2, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z_1|^2 + |z_2|^2 = t(1-t)\}$$

上, 考虑实 Poisson 结构 (参见文献 [11])

$$\begin{aligned} \{z_1, z_2\} &= z_1 z_2, & \{z_1, z_2^*\} &= -3z_1 z_2^*, \\ \{z_2, z_1^*\} &= -3z_2 z_1^*, & \{z_1, t\} &= -2t z_1, & \{z_2, t\} &= -2t z_2, \\ \{z_1^*, t\} &= -2t z_1^*, & \{z_2^*, t\} &= -2t z_2^*, \\ \{z_1, z_1^*\} &= 2t^2 - 2z_1 z_1^*, & \{z_2, z_2^*\} &= 2t^2 + 2z_1 z_1^* - 2z_2 z_2^*. \end{aligned}$$

其对应的 Poisson 双向量场记作 π . 根据文献 [11], (S^4, π) 的辛叶分解如下:

$$S^4 = P_N \sqcup (S^4 \setminus P_N),$$

其中,

$$P_N = \{(z_1, z_2, t) \in S^4 : z_1 = z_2 = t = 0\}.$$

因此, $S^4 \setminus P_N$ 上存在由 π 诱导的辛结构 ω . 由于 S^4 上不存在辛结构, $S^4 \setminus P_N$ 上的辛结构 ω 无法延拓到 S^4 . 然而, $S^4 \setminus P_N$ 上的辛结构作为 Poisson 结构却可以延拓到 S^4 上.

3 Poisson 结构的构造及来自 Lie 理论的例子

3.1 从量子结构到 Poisson 结构

根据 (2.1) 可知, 非平凡的 Poisson 结构的构造并非易事. 在 20 世纪 80 年代之前, 除了常数和线性等形式相对简单的 Poisson 结构, Poisson 结构的构造主要还是来自于辛结构. 例如, 在任意光滑流形的余切丛上, 我们都可以利用 Liouville 1- 形式得到的辛结构来诱导 Poisson 结构. 20 世纪 80 年代之后, 量子群理论的发展为 Poisson 结构的构造指明了新的方向. 根据下面性质 3.1.1, 我们可以通过形变量子化的半经典极限来构造 Poisson 结构.

性质 3.1.1 设 $\mathbf{k}$ 是特征为 0 的域, A 是 $\mathbf{k}$ 上的交换代数. 设 $A[[h]]$ 是 A 上所有 h - 形式幂级数的集合. 如果存在 $\mathbf{k}$ - 双线性的运算序列

$$F_n : A \times A \rightarrow A, \quad n \geq 1$$

使得 $A[[h]]$ 的乘法 $*$:

$$a *_h b = ab + hF_1(a, b) + h^2 F_2(a, b) + \cdots, \quad a, b \in A$$

满足结合律, 则

$$\{a, b\} := F_1(a, b) - F_1(b, a), \quad a, b \in A$$

是 A 上的 Poisson 结构. 我们把它称之为形变量子化 $(A[[h]], *)$ 上的半经典极限.

例 3.1.1 (量子平面) 在代数 $\mathbb{C}[x, y]$ 上, 定义形变量子化

$$(x^{m_1} y^{n_1}) *_h (x^{m_2} y^{n_2}) = e^{-h(n_1 m_2)} x^{m_1+m_2} y^{n_1+n_2}.$$

则它的半经典极限是二次 Poisson 结构

$$\{x, y\} = xy = -\{y, x\}.$$

虽然性质 3.1.1 可以帮助我们形式化地写出一些抽象的 Poisson 结构, 然而, 由于形变量子化的计算通常非常复杂, 我们还是难以大量地构造直观而具体的例子. 尽管如此, 我们仍可以利用量子 R 矩阵的半经典极限—拟三角 r - 矩阵, 通过 Lie 代数作用来构造 Poisson 结构. 使用该方法, 我们可以在 Lie 理论里很多重要的流形上, 构造出大量非平凡的 Poisson 结构. 这无疑给 Poisson 几何的研究提供了大量具有深刻几何意义的例子.

3.2 基于拟三角 r 矩阵及 Lie 代数作用的构造方法

本节给出利用拟三角 r 矩阵和 Lie 代数在流形上的作用来构造 Poisson 结构的具体方法. 首先回顾拟三角 r 矩阵的定义. 设 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数, $U(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数. 令 $[\cdot, \cdot]$ 为 $U(\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ 上的交换子. 对于 $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ 中的元素 $r = \sum_i x_i \otimes y_i$, $r_{12}, r_{23}, r_{13} \in U(\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ 分别代表

$$r_{12} = \sum_i x_i \otimes y_i \otimes 1, \quad r_{23} = \sum_i 1 \otimes x_i \otimes y_i, \quad r_{13} = \sum_i x_i \otimes 1 \otimes y_i.$$

定义 3.2.1 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的 Yang-Baxter 算子 CYB 是从 $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ 的运算:

$$\text{CYB}(r) = [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}], \quad r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}.$$

如果 $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ 的对称部分是伴随不变的, 并且 r 满足经典 Yang-Baxter 方程

$$\text{CYB}(r) = 0,$$

则称 r 为 $\mathfrak{g}$ 上的拟三角 r - 矩阵.

下面定理利用拟三角 r - 矩阵和流形上的 Lie 代数作用, 给出了一类在 Lie 理论中应用广泛的 Poisson 结构构造方法.

定理 3.2.1 ^[12] 设 P 是光滑流形, $r = \sum_i x_i \otimes y_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ 是一个 $\mathfrak{g}$ 上的拟三角 r - 矩阵, 并且令 $\sigma: \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{X}(P)$ 为 P 上的 Lie 代数作用. 若

$$\sigma(r) := \sum_i \sigma(x_i) \otimes \sigma(y_i) \in \Gamma(TP \otimes TP)$$

是反对称的, 则 $\sigma(r)$ 是 P 上的 Poisson 结构.

注 3.2.1 在定理 3.2.1 中, 若 $\mathfrak{g}$ 是实 Lie 代数, 且 Lie 代数作用 σ 是光滑的, 则 $\sigma(r)$ 是光滑 Poisson 结构. 若 $\mathfrak{g}$ 是复 Lie 代数, 且 Lie 代数作用 σ 是全纯的, 则 $\sigma(r)$ 是全纯 Poisson 结构.

注 3.2.2 在定理 3.2.1 中, 设 $s = \sum_i x_i \otimes y_i$ 为 r 的对称部分. 定义

$$s^\# : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}, \quad s^\#(\xi) = \sum_i \langle \xi, x_i \rangle y_i, \quad \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

令 $\mathfrak{g}$ 的 Lie 代数作用在 $p \in P$ 的稳定化子为

$$\mathfrak{g}_p := \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X)(p) = 0\}$$

且

$$\mathfrak{g}_p^0 = \{\xi \in \mathfrak{g}^* : \langle \xi, x \rangle = 0, \forall x \in \mathfrak{g}_p^0\},$$

则 $r(s) = 0$ 当且仅当对任意 $p \in P$, $\mathfrak{g}$ 的稳定化子满足

$$s^\#(\mathfrak{g}_p^0) \subset \mathfrak{g}_p. \quad (3.1)$$

当 $\mathfrak{g}_p^0$ 满足的条件 (3.1) 减弱为

$$[s^\#(\mathfrak{g}_p^0), s^\#(\mathfrak{g}_p^0)] \subset \mathfrak{g}_p,$$

虽然 $\sigma(r)$ 不是反对称的, 但是它的反对称部分仍然是 Poisson 结构.

例 3.2.1 令 $P = \mathbb{R}^n$, $G = GL(n, \mathbb{R})$. 定义 G 在 $\mathbb{R}^n$ 上的左作用

$$\sigma : GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (A, [x_1, \dots, x_n]^T) \mapsto A \cdot [x_1, \dots, x_n]^T,$$

其中, Lie 群作用 σ 所诱导的 Lie 代数作用也记作 σ . 给定 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 上的拟三角 r - 矩阵

$$r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{i < j} E_{ij} \otimes E_{ji} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g},$$

则 $\sigma(r)$ 的反对称部分为 $\mathbb{R}^n$ 上的 log-canonical 二次 Poisson 结构:

$$\pi = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

而且, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 上任意的一个拟三角 r - 矩阵, 都对应着 (2.1) 的一组解.

3.3 拟三角 r 矩阵和 Poisson-Lie 群

Poisson-Lie 群和 Lie 双代数是 Poisson 几何中重要的研究方向, 参见文献 [13–16]. 本小节简要回顾拟三角 r 矩阵与 Poisson-Lie 群和 Lie 双代数的紧密联系. 特别地, 我们利用定理 3.2.1 给出了一种 Poisson-Lie 群的构造方法.

设 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数, $\mathfrak{g}^*$ 为 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间. 设 $\delta_{\mathfrak{g}}$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的线性映射 $\delta_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{g}$.

定义 3.3.1 称 $(\mathfrak{g}, \delta_{\mathfrak{g}})$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的 Lie 双代数, 如果 $\delta_{\mathfrak{g}}$ 满足

$$\delta_{\mathfrak{g}}([x, y]) = [x, \delta_{\mathfrak{g}}(y)] - [y, \delta_{\mathfrak{g}}(x)], \quad x, y \in \mathfrak{g}, \quad (3.2)$$

且其对偶映射 $\delta_{\mathfrak{g}}^* : \wedge^2 \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 上 Lie 括号.

对于 $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, 令

$$\delta_{\mathfrak{g}, r} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \quad \delta_{\mathfrak{g}, r}(x) = (ad_x \otimes 1 + 1 \otimes ad_x)(r). \quad (3.3)$$

下列性质 3.3.1 证明了 $\mathfrak{g}$ 上每个拟三角 r 矩阵都诱导一个 Lie 双代数.

性质 3.3.1 ^[14] 若 r 是 $\mathfrak{g}$ 上的拟三角 r - 矩阵, 则 $(\mathfrak{g}, \delta_{\mathfrak{g}, r})$ 是 Lie 双代数.

设 G 为 Lie 群, π_G 是 G 上的 Poisson 结构.

定义 3.3.2 称 (G, π_G) 为一个 Poisson-Lie 群, 如果 π_G 是可乘的, 即

$$\pi_G(gh) = (L_g)_* \pi_G(h) + (R_h)_* \pi_G(g), \quad g, h \in G, \quad (3.4)$$

其中, L_g 和 R_h 分别表示 Lie 群 G 上的左右作用.

对于 $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, 令 r^L 及 r^R 分别为 G 上的左、右不变 2-张量场, 满足 $r^L(e) = r^R(e) = r$, 其中, e 是 G 的单位元. 下列性质 3.3.2 证明 $\mathfrak{g}$ 上每个拟三角 r 矩阵都对应 Poisson-Lie 群. 特别地, 该 Poisson-Lie 群也可通过定理 3.2.1 来构造.

性质 3.3.2 ^[14] 令 G 是连通 Lie 群, $\mathfrak{g}$ 是 G 的 Lie 代数. 若 r 是 $\mathfrak{g}$ 上的拟三角 r -矩阵, 则 $(G, r^L - r^R)$ 是 Poisson-Lie 群.

令 λ 为 $(G \times G)$ 在 G 上的左作用

$$\lambda: (G \times G) \times G \rightarrow G, \quad (g_1, g_2) \cdot g = g_1 g g_2^{-1}.$$

Lie 群 G 上对应的 Lie 代数作用也记作 λ .

性质 3.3.3 令 G 是连通 Lie 群, $\mathfrak{g}$ 是 G 的 Lie 代数. 若 r 是 $\mathfrak{g}$ 上的拟三角 r -矩阵, 则 $(G, \lambda(-r, r))$ 是 Poisson-Lie 群, 满足

$$\lambda(-r, r) = r^L - r^R.$$

3.4 Lie 理论中 Poisson 流形的例子

在 Lie 理论中, 根据注 3.2.1 知, 定理 3.2.1 既可以在光滑流形上构造光滑的 Poisson 结构, 又可以在复流形上构造全纯的 Poisson 结构. 特别地, 齐性空间为定理 3.2.1 的应用提供了自然的研究框架. 下面以旗簇为例, 分别给出上面的全纯复 Poisson 结构和光滑实 Poisson 结构.

设 G 为复半单 Lie 群, 其 Lie 代数记作 $\mathfrak{g}$. 令 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的 Killing 形. 固定 $\mathfrak{g}$ 上的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$, 设 $\{H_1, \dots, H_n\}$ 为 $(\mathfrak{h}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}})$ 的一组正交基. 把 $\mathfrak{h}$ 上的根系记作 Δ , 并选取 Δ 中的一组正根 Δ_+ . 设

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的根子空间分解. 对于 $\alpha \in \Delta_+$, 令 $H_{\alpha} \in \mathfrak{h}$ 满足

$$\alpha(x) = \langle x, H_{\alpha} \rangle_{\mathfrak{g}}.$$

固定一对根向量 $E_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ 和 $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 使得

$$[E_{-\alpha}, E_{\alpha}] = H_{\alpha},$$

则

$$r_{\text{st}} = \frac{1}{2} \sum_i H_i \otimes H_i + \sum_{\alpha \in \Delta_+} E_{-\alpha} \otimes E_{\alpha} \quad (3.5)$$

为复 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的复标准拟三角 r -矩阵, 且

$$r_0 = \sum_j H_j \otimes (iH_j) + \sum_{\alpha \in \Delta_+} (E_{\alpha} + E_{-\alpha}) \otimes (iE_{-\alpha}) + \sum_{\alpha \in \Delta_+} (iE_{\alpha} - iE_{-\alpha}) \otimes (-E_{\alpha})$$

为实 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上 Iwasawa 分解所诱导的实标准拟三角 r -矩阵:

例 3.4.1 (旗簇上的全纯复 Poisson 结构) 设 B 为 G 的 Borel 子群. 在旗簇 G/B 上, 令 σ_1 为 Lie 群 G 在 G/B 上的左平移作用所诱导的 Lie 代数, 并取 $\mathfrak{g}$ 上的复标准拟三角 r -矩阵 r_{st} , 则 $\pi_1 = \sigma_1(r_{\text{st}})$

即为 G/B 上的全纯复 Poisson 结构. 文献 [17] 介绍了 $(G/B, \pi_1)$ 的一些性质. 此外, 对于任意的正整数 n , $\mathfrak{g}^n$ 上都可以构造一个复拟三角 r - 矩阵 $r_{\text{st}}^{(n)}$, 其构造方法详见文献 [12]. 在 G^n/B^n 上, 令 σ_n 为 Lie 群 G^n 在 G^n/B^n 上左平移作用所诱导的 Lie 代数, 则 $\sigma_n(r_{\text{st}}^{(n)})$ 为 G^n/B^n 上的 Poisson 结构, 记作 Π_n . 定义 B^n 在 G^n 上右作用

$$(g_1, \dots, g_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = (g_1 b_1, b_1^{-1} g_2 b_2, \dots, b_{n-1}^{-1} g_n b_n). \quad (3.6)$$

该右作用所诱导的商空间记作 $F_n = G \times_B G \times_B G \cdots \times_B G/B$. 通过全纯微分同胚

$$\begin{aligned} I_n : (G^n)/(B^n) &\rightarrow F_n, \\ [g_1, \dots, g_n] &\mapsto [g_1, g_1^{-1} g_2, \dots, g_{n-1}^{-1} g_n], \end{aligned}$$

我们可以得到 F_n 上的 Poisson 结构 $I_n(\Pi_n)$, 该 Poisson 结构记为 π_n . 设 $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ 为 Weyl 群上一个单反射序列. 令 $P_{s_i} = B \sqcup B s_i B$, 则 Bott-Samelson 簇

$$P_{s_1} \times_B P_{s_2} \times_B \cdots \times_B P_{s_n} / B$$

为 (F_n, π_n) 的 Poisson 子流形. Bott-Samelson 簇上 Poisson 结构性质的研究参见文献 [18, 19].

例 3.4.2 (旗簇上的光滑实 Poisson 结构) 把旗簇 G/B 看作实光滑流形, 令 σ 为 Lie 群 G 在 G/B 上的左平移作用所诱导的 Lie 代数作用. 并取 $\mathfrak{g}$ 上的实标准拟三角 r - 矩阵 r_0 , 则 $\pi_0 = \sigma(r_0)$ 即为 G/B 上的光滑实 Poisson 结构, 参见文献 [20].

在例 3.1.1 和 3.2.2 的背景下, 下面问题还有待研究.

问题 3.4.1 设 τ 是 G 上的反全纯对合自同构, 考虑 G^2/B^2 上的反全纯对合自同构

$$\begin{aligned} G^2/B^2 &\rightarrow G^2/B^2, \\ [g_1, g_2] &\mapsto [\tau(g_2), \tau(g_1)]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

G^2/B^2 上由 (3.4) 诱导的实形式记为 $(G^2/B^2)^\tau$. 一方面, 根据文献 [21], 可以定义复流形上全纯 Poisson 结构的实形式, 进而 $(G^2/B^2)^\tau$ 上可以通过 Π_2 的实形式来构造一类 Poisson 结构. 另一方面, 可以赋予 τ 一定条件, 使得

$$G/B \rightarrow (G^2/B^2)^\tau, \quad g.B \mapsto [g, \tau(g)]$$

成为一个光滑同胚, 进而诱导出 $(G^2/B^2)^\tau$ 的一类 Poisson 结构. 于是, 通过研究 $(G^2/B^2)^\tau$ 上这两类 Poisson 结构的关系来研究 $(G/B, \pi_0)$ 与 $(G^2/B^2, \Pi_2)$ 的关系成为一个有趣的问题.

例 3.4.3 设 G 为复单 Lie 群, Q 为 G 的闭子群. 我们可以对复齐性空间 G/Q 上通过定理 3.2.1 构造的 Poisson 结构进行分类. 一方面, Belavin-Drinfeld 对 $\mathfrak{g}$ 上的可分解拟三角 r 矩阵进行分类, 参见文献 [22]. 这样, 我们就可以具体地写出 $\mathfrak{g}$ 上的所有的可分解拟三角 r 矩阵. 另一方面, Karolinsky^[23] 对 $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle_{\mathfrak{g}})$ 的余迷向子代数进行了分类. 由于 $\mathfrak{g}$ 上的所有的可分解拟三角 r 矩阵矩阵的对称部分与 (3.2) 相同, 根据注 3.2.2, 我们可以具体写出所有满足条件的 Q .

在例 3.4.3 的背景下, 有下列待解决的问题.

问题 3.4.2 (1) 在 G/B 上, 每一个可分解的拟三角 r - 矩阵 r_{BD} 都对应一个 Poisson 结构 π_{BD} . 然而, 除了 π_1 之外, 其他 Poisson 结构的几何性质还有待解决. 例如, $(G/B, \pi_{BD})$ 上的辛叶及其在环面作用下的轨道.

(2) 在复单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上, 虽然 Belavin-Drinfeld 所有可分解拟三角 r 矩阵进行了分类, 但是不可分解的拟三角 r 矩阵的构造与分类至今未找到合适的方法来解决. 根据定理 3.2.1, 不可分解的拟三角 r 矩阵同样可以构造出 Poisson 结构, 这种 Poisson 结构的性质还有待研究.

Lie 理论中其他的重要例子还有:

(1) 在复半单 Lie 群 G 及其实形式 G_0 上, 我们相应地可以构造全纯的 Poisson 结构和实解析的 Poisson 结构, 例如, 在

$$\begin{aligned} G &= SL(n, \mathbb{C}), \quad G = SP(n, \mathbb{C}), \\ G_0 &= SU(p, q), \quad G_0 = SL(n, \mathbb{R}), \quad G_0 = SP(n, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

上, 我们可以构造出标准 Poisson 结构, 参见文献 [12].

(2) 在紧致或非紧致 Riemann 对称空间, 我们可以得到 Poisson 结构, 参见文献 [20].

(3) 在复对称空间 G/G^θ 的 De Concini-Procesi 紧化流形上, 我们可以构造 Poisson 结构, 参见文献 [24].

(4) 在复半单 Lie 群的扭共轭类上, 我们可以构造 Poisson 结构, 参见文献 [25, 26].

4 Lie 理论中的分次扩张 Poisson 代数

4.1 分次扩张 Poisson 代数的定义及例子

基于拟三角 r 矩阵和流形上 Lie 代数作用构造的 Poisson 结构往往具有好的形式和性质, 尤其是由标准拟三角 r 矩阵构造的 Poisson 结构, 与分次扩张 Poisson 代数有着紧密的联系.

首先回顾分次扩张 Poisson 代数的定义 (参见文献 [27]).

定义 4.1.1 设 $(\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n], \{\})$ 是一个复多项式 Poisson 代数. 如果该代数上的 Poisson 结构满足

$$\{z_i, \mathbb{C}[z_{i+1}, \dots, z_n]\} \subseteq z_i \mathbb{C}[z_{i+1}, \dots, z_n] + \mathbb{C}[z_{i+1}, \dots, z_n], \quad \forall 1 \leq i \leq n-1,$$

则称该代数为分次扩张 Poisson 代数.

在 Lie 理论中, Lu 和 Elek 给出了系统性地构造出分次扩张 Poisson 代数的方法. Lu 和 Elek [18] 证明了, 只要给定了一个三元组 $(G, \mathbf{s}, \gamma)$, 我们就可以得到一个分次扩张 Poisson 代数, 其中, G 为复半单 Lie 群, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ 是 G 上 Weyl 群上的单反射序列, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ 是 $\mathbf{s}$ 子序列, 即对于任意 $1 \leq j \leq n$, $s_j = e$ 或 $\gamma_j = e$ (e 为 Weyl 群上的单位元).

由于这类 Poisson 代数是“分次扩张”的, 这给通过计算机算法来实现 Poisson 结构的计算提供了无比的便利. Elek 通过 GAP 语言, 在电脑程序中实现了这一类 Poisson 结构的具体计算.

例 4.1.1 设 $G = G_2$, $\gamma = \mathbf{s} = (s_1, s_2, s_1, s_2, s_1, s_2)$, 则三元组 $(G, \mathbf{s}, \gamma)$ 对应着分次扩张 Poisson 代数

$$A = ([x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6], \{\}),$$

其中,

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= -3x_1x_2, \quad \{x_1, x_3\} = -x_1x_3 - 2x_2, \quad \{x_1, x_4\} = -6x_3^2, \\ \{x_1, x_5\} &= x_1x_5 - 4x_3, \quad \{x_1, x_6\} = 3x_1x_6 - 6x_5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{x_2, x_3\} &= -3x_2x_3, & \{x_2, x_4\} &= -6x_3^3 - 3x_2x_4, \\ \{x_2, x_5\} &= -6x_3^2, & \{x_2, x_6\} &= 3x_2x_6 - 18x_3x_5 + 6x_4, \\ \{x_3, x_4\} &= -3x_3x_4, & \{x_3, x_5\} &= -x_3x_5 - 2x_4, & \{x_3, x_6\} &= -6x_5^2, \\ \{x_4, x_5\} &= -3x_4x_5, & \{x_4, x_6\} &= -6x_5^3 - 3x_4x_6, & \{x_5, x_6\} &= -3x_5x_6. \end{aligned}$$

定义 4.1.2 设 (P, π) 为复 Poisson 流形. 若 (P, π) 可以分解为有限个 Poisson 子流形的无交并

$$P = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} P_{\alpha}, \quad (4.1)$$

使得对于任意 α , 有 $P_{\alpha} \cong \mathbb{C}^{n_{\alpha}}$, 且每个 (P_{α}, π) 所诱导的 Poisson 代数 $(\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_{n_{\alpha}}], \{, \})$ 是分次扩张 Poisson 代数, 则称 (4.1) 是 (P, π) 的一个分次扩张 Poisson 代数拼接.

定义 4.1.3 设 (P, π) 为 n 维复 Poisson 流形. 若 (P, π) 可以分解为有限个 Poisson 开子流形的并:

$$P = \bigcup_{\alpha} Q_{\alpha}, \quad (4.2)$$

使得对于任意 α , 有 $P_{\alpha} \cong \mathbb{C}^n$, 且 (P_{α}, π) 所诱导的 Poisson 代数 $(\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n], \{, \})$ 是分次扩张 Poisson 代数, 则称 (4.2) 是 (P, π) 的一个分次扩张 Poisson 代数覆盖.

下列定理 4.1.1 说明定理 3.2.1 所构造的 Poisson 结构与分次扩张 Poisson 代数有着紧密的联系.

定理 4.1.1 ^[18, 28] 设 G 为复半单 Lie 群, B 和 B_- 分别为 G 的 Borel 和反 Borel 子群, W 是 G 的 Weyl 群, 则旗簇 G/B 的 Bruhat 分解

$$G/B = \bigsqcup_{w \in W} BwB/B$$

是 $(G/B, \pi_1)$ 的一个分次扩张 Poisson 代数拼接, 且旗簇 G/B 的开覆盖

$$G/B = \bigcup_{w \in W} wB_-B/B$$

是 $(G/B, \pi_1)$ 的一个分次扩张 Poisson 代数覆盖.

4.2 分次扩张 Poisson 代数的应用

分次扩张 Poisson 代数和分次扩张量子代数是近些年来新兴的研究方向, 近期的重要工作包括:

(1) 基于分次扩张 Poisson 代数和分次扩张量子代数, 以 Goodearl 和 Yakimov ^[29] 为代表的数学家们发展出一套构造 Cluster 代数和量子 Cluster 代数的系统性理论.

(2) Lu 和 Mouquin 在分次扩张 Poisson 代数 $(BwB/B, \pi_1)$ 上构造出 Poisson 群胚和辛群胚 ^[2].

(3) 在热带几何中, Lu 和 Peng ^[30] 利用分次扩张 Poisson 代数的退化来实现了从 Bott-Samelson 丛到 Bott 塔的退化.

(4) Lu 和 Mi ^[31] 证明了在一类特殊的分次扩张 Poisson 代数上, 存在可积系统.

此外, 根据 (2) 中的工作, 我们还可以提出下面待解决问题.

问题 4.2.1 设 G 为复半单 Lie 群. 对于 Weyl 群上的序列

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$

我们可以在 F_n 上定义广义 Bruhat 胞腔

$$BuB/B := Bu_1B \times_B Bu_2B \times_B Bu_3B \times_B \cdots \times_B Bu_nB/B.$$

对于任意 $\mathbf{u}$, $(BuB/B, \pi_n)$ 仍是一个分次扩张 Poisson 代数上. 在广义 Bruhat 的胞腔 $(BuB/B, \pi_n)$ 上, 我们可以考虑怎样构造 Poisson 群胚和辛群胚.

参考文献

- 1 Lichnerowicz A. Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. *J Differential Geom*, 1977, 12: 253–300
- 2 Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds. *J Differential Geom*, 1983, 18: 523–557
- 3 Liu Z, Xu P. On quadratic Poisson structures. *Lett Math Phys*, 1992, 26: 33–42
- 4 Conn J F. Normal forms for smooth Poisson structures. *Ann of Math (2)*, 1985, 121: 565–593
- 5 Weinstein A. Symplectic groupoids and Poisson manifolds. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1987, 16: 101–104
- 6 Weinstein A. Coisotropic calculus and Poisson groupoids. *J Math Soc Japan*, 1988, 40: 705–727
- 7 Liu Z, Xu P. Exact Lie bialgebroids and Poisson groupoids. *Geom Funct Anal*, 1996, 6: 138–145
- 8 Lu J, Mouquin V. Double Bruhat cells and symplectic groupoids. *ArXiv:1607.00527*, 2016
- 9 Lichnerowicz A. Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. *J Differential Geom*, 1977, 12: 253–300
- 10 Laurent-Gengoux C, Siénon M, Xu P. Holomorphic Poisson manifolds and holomorphic Lie algebroids. *Int Math Res Not IMRN*, 2008, 1: 121–136
- 11 Bonechi F, Ciccoli N, Tarlini M. Quantum even spheres Σ_q^{2n} from Poisson double suspension. *Comm Math Phys*, 2003, 234: 449–459
- 12 Lu J, Mouquin V. Mixed product Poisson structures associated to Poisson Lie groups and Lie bialgebras. *Int Math Res Not IMRN*, 2017, 2017: 5919–5976
- 13 Kosmann-Schwarzbach Y. Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations. In: *Integrability of Non-linear Systems. Lecture Notes in Physics*, vol. 495. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1997, 104–170
- 14 Drinfeld V. Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras, and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations. *Soviet Math Dokl*, 1983, 27: 68–71
- 15 Drinfeld V. On Poisson homogeneous spaces of Poisson-Lie groups. *Theoret and Math Phys*, 1993, 95: 226–227
- 16 Lu J, Weinstein A. Poisson Lie groups, dressing transformations, and the Bruhat decomposition. *J Differential Geom*, 1990, 31: 501–526
- 17 Goodearl K, Yakimov M. Poisson structures on affine spaces and flag varieties, II. *Trans Amer Math Soc*, 2009, 11: 5753–5780
- 18 Lu L, Elek B. On a Poisson structure on Bott-Samelson varieties: Computations in coordinates. *ArXiv:1601.00047*, 2016
- 19 Lu L, Mouquin V. On the T -leaves of some Poisson structures related to products of flag varieties. *Adv Math*, 2017, 306: 1209–1261
- 20 Foth P, Lu J. Poisson structures on complex flag manifolds associated with real forms. *Trans Amer Math Soc*, 2005, 358: 1705–1714
- 21 Xu P. Dirac submanifolds and Poisson involutions. *Ann Sci Éc Norm Supér (4)*, 2003, 36: 403–430
- 22 Belavin A, Drinfeld V. Triangle equation and simple Lie algebras. *Soviet Sci Reviews Sect C*, 1984, 4: 93–165
- 23 Karolinsky E A. A classification of Poisson homogeneous spaces of complex reductive Poisson-Lie groups. *Banach Center Publ*, 2000, 51: 103–108
- 24 Evens S, Lu J. On the variety of Lagrangian subalgebras, II. *Ann Sci Éc Norm Supér (4)*, 2006, 39: 347–379
- 25 Evens S, Lu J. Poisson geometry of the Grothendieck resolution of a complex semisimple group. *Mosc Math J*, 2007, 7: 613–642
- 26 Lu J. On the T -leaves and the ranks of a Poisson structure on twisted conjugacy classes. *Indag Math (NS)*, 2014, 25: 1102–1121
- 27 Goodearl K, Launois S. The Dixmier-Moeglin equivalence and a Gel'fand-Kirillov problem for Poisson polynomial algebra. *Bull Soc Math France*, 2011, 139: 1–39
- 28 Yu S. On the Knutson-Woo-Yong maps and some Poisson homogeneous spaces. *PhD Thesis*. Hong Kong: The University of Hong Kong, 2017

- 29 Goodearl K, Yakimov M. Quantum cluster algebras and quantum nilpotent algebras. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2014, 111: 9696–9703
- 30 Peng J. Standard Poisson structure on Bott-Samelson varieties-degeneration and Frobenius splitting. PhD Thesis. Hong Kong: The University of Hong Kong, 2017
- 31 Mi Y. Integrable systems and quantizations of Poisson CGL extensions. PhD Thesis. Hong Kong: The University of Hong Kong, 2017

On a class of Poisson structures from Lie theory

LU JiangHua & YU ShiZhuo

Abstract Poisson spaces provide the natural setting for Hamiltonian mechanics and compactifications of symplectic manifolds. In this paper, we give a brief survey on a class of Poisson manifolds related to Lie theory which have their origins in quantum groups.

Keywords Poisson structures, Lie theory, iterated Poisson polynomial algebras

MSC(2010) 53D17, 53D55

doi: 10.1360/N012017-00157