论 文

二进神经网络表达奇偶校验问题的隐元最小数目上界

陆阳*, 杨娟, 王强, 黄镇谨

合肥工业大学计算机与信息学院, 合肥 230009

* 通信作者. E-mail: luyang.hf@126.com

收稿日期: 2010-03-26; 接受日期: 2011-01-14

摘要 二进神经网络采用线性分类, 是结构简单又易于实现的一类神经网络, 在许多应用领域中都有重要研究价值. 对于单隐层二进神经网络, 目前隐层规模的确定问题仍然没有明确的研究结论. 本文在研究隐层规模问题的过程中, 提出了布尔空间的最多孤立样本问题. 在二进神经网络隐层神经元各自表达一个“与”关系, 所有隐层神经元通过输出元形成“或”关系的情况下, 证明了实现最多孤立样本问题需 2^{n-1} 个隐层神经元. 更重要的是, 指出了 n 元奇偶校验问题和最多孤立样本结构的等价性. 进一步地, 通过引入隐层抑制神经元将隐元数目降为 n , 说明了抑制神经元在二进神经网络中的重要作用. 最后, 在 Hamming 球与 SP 函数的基础上, 揭示出抑制神经元和 n 元奇偶校验问题的逻辑关系, 并给出了奇偶校验问题的逻辑式表达.

关键词 二进神经网络 抑制神经元 n 元奇偶校验 Hamming 球 SP 函数

1 引言

神经网络的一个最基本问题是样本分类, 包括线性分类和非线性分类^[1,2]. 线性分类由于结构相对简单而被大多数情况采用, 所以绝大部分的二进神经网络隐层采用超平面划分的线性可分结构. 异或问题是神经网络能够解决的一种重要的非线性逻辑关系, 不能用一个二进神经元来表达, 如将异或问题扩展至 n 维, 即为 n 元奇偶校验问题. 奇校验实现功能为: 针对一个 n 元向量, 向量中如含有偶数个 1, 则输出 1, 奇数个 1, 输出 0; 反之则为偶校验. 由于在输入向量中某一位的改变将导致不同的结果, 故此 n 元奇偶校验问题较难解决, 其被广泛用于测试神经网络训练算法^[3~10].

国内外有许多学者对 n 元奇偶校验问题使用非线性可分结构的前向神经网络进行了研究. 如果只在输入层和隐层中以及隐层和输出层之间有连接权的前提下, Setiono^[11] 指出, 在隐层和输出层均使用 Sigmoid 函数作为激发函数, 则可用 $\frac{n+1}{2}$ (n 为奇数) 或 $\frac{n}{2} + 1$ (n 为偶数) 个隐层神经元实现该问题; Stork 等^[12] 指出, 在隐层使用单调递增函数 $f(u) = \frac{1}{n}(u - \frac{\cos(\pi u)}{\alpha\pi})$, ($\alpha > 1$) 作为激发函数, 输出层使用线性阈值函数, 则可用 2 个隐层神经元实现该问题. 另外, 如果在输入和输出层间有直接连接权的情况下, Brown^[13] 指出, 在隐层使用连续可微函数 $f(u) = [u] + \sin^K(\frac{\pi(u-[u])}{2})$, ($K > 1$) 作为激发函数, 输出层使用线性阈值函数, 则可用 1 个隐层神经元实现该问题; Minor^[14] 指出, 在隐层采用类 Sigmoid 函数 $f(u) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{1+e^{-40(u-2j+0.15)}}$ 作为激发函数, 输出层使用线性阈值函数, 则可用 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个隐层神经

引用格式: 陆阳, 杨娟, 王强, 等. 二进神经网络表达奇偶校验问题的隐元最小数目上界. 中国科学: 信息科学, 2012, 42: 352-361

元实现该问题; 后来 Hohil 等^[15] 又进一步研究指出, 在隐层和输出层均使用阈值函数, 采用同样的输入和输出层间的连接权结构, 也可用 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个隐层神经元实现该问题. 上述研究表明, 如果输入层和输出层没有直接连接权, 则只能通过改变隐层和输出层的激发函数来减少隐层神经元的个数, 但随着激发函数复杂程度增加, 也增加了硬件实现的困难度; 如果使用较为简单的激发函数, 则需要增加输入层和输出层间的直接连接权, 虽然可以减少隐层神经元的个数, 但同样对硬件实现造成困难. 对于采用线性可分结构, 单隐层并且每个隐层神经元只表达“与”关系的二进神经网络, 在硬件实现上较为容易, 但对于 n 元奇偶校验问题, 如何确定神经网络的隐层规模至今未得到很好解决^[16~24], 文献 [23] 仅证明了当 $n \leq 4$ 时, 隐层至少需要 n 个二进神经元才能实现 n 元奇偶校验问题; 而对于 $n \geq 5$, 目前还没有明确的结果.

本文证明了对采用线性可分结构, 单隐层并且每个隐层神经元只表达“与”关系, 所有隐层神经元通过输出元形成“或”关系的二进神经网络, 实现 n 元奇偶校验问题需要 2^{n-1} 个隐层神经元. 为改善这一不理想的结果, 通过在隐层引入抑制神经元, 可以构造出一个结构很好的单隐层“透明”网络, 网络的隐元数目由 2^{n-1} 降为 n . 即对于表达 n 元奇偶校验问题, 采用阈值激发函数的二进神经网络所需的隐元最小数目上界为 n . 这一结果显示出在隐层使用抑制神经元和未使用抑制神经元的巨大差异, 同时对于探讨隐元数目的相关研究也有很大的借鉴意义. 文中还解释了 n 元奇偶校验问题在 Hamming 球基础上的逻辑式表达.

2 相关概念说明

B_2 表示 $\{0, 1\}$ 二元域, F 是 $B_2^n \rightarrow B_2$ 的任意映射, 称 F 为 n 元布尔函数, B_2^n 构成了 n 维布尔函数样本空间. 对所有 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_2^n$, 以 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示 F 在 X 处的取值, 简记为 $F(X)$, 称 X 为 B_2^n 中的样本, $F(X)$ 为样本值, $F(X) \in B_2$.

在下面的讨论中, $C(A)$ 表示集合 A 中的元素数目, $d_H(X^p, X^q)$ 表示两个样本 X^p, X^q 之间的 Hamming 距离, 集合 $F^{-1}(1) = \{X \in B_2^n \mid F(X) = 1\}$, $F^{-1}(0) = \{X \in B_2^n \mid F(X) = 0\}$.

首先定义连通集的概念.

定义 1 $A \subseteq F^{-1}(1)$, 若满足下列 2 个条件之一, 则称集合 A 是 $F^{-1}(1)$ 中的一个连通集.

- 1) $C(A) = 1$;
- 2) $C(A) \geq 2$, 且 $\forall X^p, X^q \in A, X^p \neq X^q$, 存在样本序列 $X^1, X^2, \dots, X^k \in A$, 满足

$$\begin{cases} d_H(X^p, X^1) = 1, \\ d_H(X^i, X^{i+1}) = 1, \quad i = 1, \dots, (k-1). \\ d_H(X^k, X^q) = 1, \end{cases}$$

定义 2 若 A 是连通集, 且对 $\forall X^p \in A, X^q \notin A, d_H(X^p, X^q) = 1$, 满足 $X^q \in F^{-1}(0)$, 则称 A 是充分连通集.

定义 3 若样本 $X^g \in F^{-1}(1)$, 且 $\forall X', d_H(X', X^g) = 1$, 满足 $X' \in F^{-1}(0)$, 则称 X^g 为 $F^{-1}(1)$ 中的孤立样本.

以图 1 中的 5 变量布尔函数 Karnaugh 图为例, 其中点 10101 是一个孤立样本, $\{01111, 11111, 11110, 10110\}$ 是一个连通集, $\{00000, 00010\}$ 和 $\{01111, 11111, 11110, 10110, 11010, 11011\}$ 是 2 个充分连通集.

图 1 5 变量布尔函数 Karnaugh 图

Figure 1 Karnaugh map of the 5-bit Boolean function

连通集的几何意义是: 在 n 维布尔空间里由 2^n 个顶点构成的超立方体中, 连通集中任何 2 个样本对应的顶点之间存在一条由数条边构成的路径, 该路径只经过样本值为“1”的顶点。

连通集有如下性质:

性质 1 若 A, B 是连通集, 且 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 $A \cup B$ 也是一个连通集。

性质 2 A 是充分连通集, 样本 $X^p \in A$, 若 $\exists X^q \in F^{-1}(1)$, $d_H(X^p, X^q) = 1$, 则 $X^q \in A$ 。

性质 3 任何一个非连通集都可以表示为几个充分连通集的并集。

将二进神经元的分类超平面记为: $R(X) = \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = 0$ 。

定理 1 对 $\forall X \in F^{-1}(1)$, 存在一个超平面可以将 X 和 $F^{-1}(0)$ 分成 2 个区域, 即 X 可以用一个二进神经元表示。

定理 2 A 是 $F^{-1}(1)$ 的非空子集, 若存在一个超平面可以将 A 和 $F^{-1}(0)$ 分成 2 个区域, 则 A 是连通集^[24]。

下面对 Hamming 球和 SP 函数进行说明。

定义 4 在 B_2^n 中, 对于样本 $X^c = (X_1^c, X_2^c, \dots, X_n^c)$, 如果存在集合 $U(d) = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^{-1}(1) \mid d_H(X^c, X) \leq d\}$, d 是位于区间 $[0, n]$ 中的整数, 则 $U(d)$ 称为以 X^c 为中心, 半径为 d 的 Hamming 球。

布尔空间中 Hamming 球是线性可分结构, 可以用一个二进神经元表达^[25]。

定义 5 一个 SP 函数是能够表达为 (1) 式的布尔函数

$$B(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^* O(x_2^* O(\dots O(x_{n-1}^* O x_n^*) \dots)), \quad (1)$$

其中算子 O 是逻辑与 $\wedge$ 或者是逻辑或 $\vee$, 函数变量 x_i^* 表示 x_i 或者 $\overline{x_i}$ 。

SP 函数还能表达为如 (2) 式的递归形式。

$$\begin{cases} B(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^* O B'(x_2, x_3, \dots, x_n), \\ B(x_{n-1}, x_n) = x_{n-1}^* O x_n^*. \end{cases} \quad (2)$$

例如 (3) 式是一个 SP 函数。

$$B_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee (x_3 \wedge \overline{x_4} \wedge (x_5 \vee x_6))). \quad (3)$$

图 2 D_1 Karnaugh 图Figure 2 Karnaugh map of D_1 图 3 D_3 Karnaugh 图Figure 3 Karnaugh map of D_3

定理 3 一个 SP 函数是一个线性可分函数 [26,27].

3 抑制神经元

定义 6 B_2^n 中, 二进神经元 $S(X, W, T)$ 表达布尔函数 $F(X)$, 样本集合 $A = \{X \in B_2^n \mid F(X) = 1\}$, 称 A 是 $S(X, W, T)$ 的真样本集.

定义 7 B_2^n 中, A_1 是二进神经元 S_1 的真样本集, A_2 是二进神经元 S_2 的真样本集, $A_2 \subset A_1$, 如果样本集 $A_1 \cap (\sim A_2)$ 线性不可分, 则称 S_2 是 S_1 的一个抑制神经元.

在 B_2^n 空间中, 经常会碰到这样的情况, 一组具有相同函数值的样本集是线性不可分的, 但适当补充某些同类样本后, 构成的并集是线性可分的, 就好像是后补充的这些同类样本“抑制”了原先集合的线性可分性. 图 2 和 3 说明了这个问题.

图 2 中, “○+●”构成的样本集 $D_1 = \{47, 55, 61, 62, 63\}$ 线性可分, “○”构成的样本集 $D_2 = \{63\}$ 线性可分, 而 “●”构成的样本集 $D_1 \cap (\sim D_2)$ 线性不可分; 图 3 中, “○+●”构成的样本集 $D_3 = \{5, 9, 12, 13, 15, 17, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 45, 53, 57, 60, 61, 63\}$ 线性可分, “○”构成的样本集 $D_4 = \{13, 21, 25, 28, 29, 31, 61\}$ 线性可分, 而 “●”构成的样本集 $D_3 \cap (\sim D_4)$ 线性不可分. 两个图中 D_2 和 D_4 的去除分别“抑制”了 D_1 和 D_3 的线性可分性.

定理 4 B_2^n 中, A_1 是二进神经元 S_1 的真样本集, S_1 表达布尔函数 F_1 , A_2 是二进神经元 S_2 的真样本集, S_2 表达布尔函数 F_2 , 则 S_2 对 S_1 的抑制结果 $A_1 \cap (\sim A_2)$ 表达逻辑关系 $F_1 \wedge \overline{F_2}$.

抑制神经元的“抑制”作用可以通过图 4 的网络结构实现.

将这种实现方法应用于图 2 和 3 中的例子, 可以得到图 5 和 6 的具体网络实现.

4 最多孤立样本结构与奇偶校验问题

定义 8 $X = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1)$ 是 n 元布尔函数样本空间的样本, $S = \emptyset$.

图 4 “抑制”作用的网络实现

Figure 4 Network implementation with restraining effect

图 5 $D_1 \cap (\sim D_2)$ 的网络实现

Figure 5 Implementation of $D_1 \cap (\sim D_2)$

图 6 $D_3 \cap (\sim D_4)$ 的网络实现

Figure 6 Implementation of $D_3 \cap (\sim D_4)$

图 7 样本标准排序方法

Figure 7 The standard order of samples in B_2^4

- 1) 取 $X^0 = (0, 0, \dots, 0)$ 为第一个样本, 并设 $p = 0$;
- 2) $S = S \cup \{X^p\}$, 并将 X^p 从样本空间中去除, 如果 X^p 是最后一个样本, 则停止排序, 否则继续执行步骤 3);
- 3) 从样本空间取一新样本 X^{p+1} , 满足 $d_H(X^{p+1}, X^p) = 1$, 并且对 $\forall X^q \notin S, X^q \neq X^{p+1}, d_H(X^q, X^p) = 1$, 满足 $i < j$, 其中 x_i 为 X^{p+1} 和 X^p 的相异位, x_j 为 X^q 和 X^p 的相异位;
- 4) $p = p + 1$, 返回 2).

称按上述 1)~4) 步骤进入集合 S 的顺序为 n 元布尔函数样本空间样本的标准排序.

一个 4 元布尔函数的样本标准排序是: 0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0111, 0101, 0100, 1100, 1101, 1111, 1110, 1010, 1011, 1001, 1000. 图 7 说明了这样的排序过程.

定义 9 若 n 元布尔函数样本空间的样本按标准排序排列, 且对该排序中序号相邻的任意 2 个样本 X^i, X^j , 满足 $F(X^i) \neq F(X^j)$, 则称这样的样本结构为 B_2^n 中的最多孤立样本 (MIS, most isolated samples) 结构.

对于 B_2^n 中的 MIS 结构, 如果隐层只构建“与”关系, 并且所有隐元通过输出元构成“或”关系,

表 1 样本标准排序与 n 元奇校验样本值的关系
 Table 1 Samples in the standard order with n -bit odd parity

Serial number	Sample order
1	$F(0, 0, \dots, 0, 0) = 1$
2	$F(0, 0, \dots, 0, 1) = 0$
3	$F(0, 0, \dots, 1, 1) = 1$
4	$F(0, 0, \dots, 1, 0) = 0$
$\vdots$	$\vdots$
$2^n - 1$	$F(1, 0, \dots, 0, 1) = 1$
2^n	$F(1, 0, \dots, 0, 0) = 0$

根据定理 1 和 2, 则实现 MIS 结构需要 2^{n-1} 个隐层神经元. 由定义 9 可知, 将样本值定为校验位, n 元奇偶校验问题的 Karnaugh 图就是最多孤立样本结构, 故实现 n 元奇偶校验问题需 2^{n-1} 个隐层神经元. 按样本标准排序, 以 n 元奇校验为例, 其样本值如表 1.

分析表 1 可以发现, 如果 $F(0, 0, \dots, 0, 0) = 1$, 则和样本 $(0, 0, \dots, 0, 0)$ 的 Hamming 距离为奇数的样本的样本值都为 0, 和样本 $(0, 0, \dots, 0, 0)$ 的 Hamming 距离为偶数的样本的样本值都为 1, 所以布尔空间中的 n 元奇校验及偶校验问题均是由一系列具有相同中心的 Hamming 球面组成的几何结构, 这就是该问题的几何意义.

图 8 为 4 元奇校验, 如果隐层不引入抑制元, 必须要 $2^{4-1} = 8$ 个隐元才能实现该问题, 其几何意义可以用一种几何图来直观表达, 图 8 中的 4 元奇校验的几何图对应于图 9, 其中 d 为 Hamming 半径, 每一个圆环都是一个 Hamming 球面, 阴影部分表示样本值为 1.

根据样本的标准排序方法, 对于表 1 中的奇校验问题, 当样本排列到 $F(1, 0, \dots, 0, 0) = 0$ 后, 下一个样本排序可以认为循环回 $F(0, 0, \dots, 0, 0) = 1$. 所以如果以 $F(0, 0, \dots, 0, 1) = 0$ 为中心, 表 1 中的奇校验又可以解释为: 和样本 $(0, 0, \dots, 0, 1)$ 的 Hamming 距离为奇数的样本的样本值都为 1, 和样本 $(0, 0, \dots, 0, 1)$ 的 Hamming 距离为偶数的样本的样本值都为 0. 因此, Hamming 球面系的中心是可以任意选择的, 图 10 是 B_2^n 中对奇校验的几种不同的几何图表达, X^c 是 Hamming 中心. 对于偶校验问题可以有类似地表达.

5 奇偶校验问题的逻辑表达式

定义 10 设 $P_1, P_2, \dots, P_N$ 是 N 个前提, Q 是结论, 如果 N 个前提中存在不多于 M 个前提为真时, Q 为真, 则称表达的逻辑规则为 LEM(less than or equal to) 规则, 记为

$$\text{if LE } M \text{ of } \{P_1, P_2, \dots, P_N\} \text{ then } Q.$$

如果又满足: N 个前提中存在多于 M 个前提为真时, Q 为假, 则称为完全 LEM 规则, 记为

$$\text{if LE } M \text{ of } \{P_1, P_2, \dots, P_N\} \text{ then } Q \text{ else } \bar{Q}.$$

定理 5 布尔空间中任何一个 Hamming 球 $U(d)$ 和一条 LEM 规则等价; 如果 $U(d) = F^{-1}(1)$, 则 $U(d)$ 和一条完全 LEM 规则等价 [28].

图 11 B_2^4 中取 $X^c=(1,1,1,1)$, 且 $F(X^c)=1$ 时的奇校验网络实现

Figure 11 Implementation of the 4-bit odd parity with $X^c = (1, 1, 1, 1)$ and $F(X^c) = 1$

离为 $0 \sim 3$ 的 Hamming 球. 从图中还可以看出, 这个网络中的 H_3 和 H_1 就是抑制神经元, 对应于图 9 中的白色部分, 相当于从布尔空间全集 H_4 中“抠掉”的部分.

6 结论

本文通过对二进神经网络隐层规模问题的研究, 对于在隐层构建“与”关系, 输出元采用“或”关系的二进神经网络, 首先证明了 B_2^n 中的奇偶校验问题需要 2^{n-1} 个隐元才能表达. 其次, 在引入抑制神经元之后, 可进一步地使表达奇偶校验问题时隐层所需神经元的数目从 2^{n-1} 减至 n 个, 并且指出每个隐层神经元可表达为一个 Hamming 球, 所有隐元在输出元构成一个 SP 函数, 体现了抑制神经元在二进神经网络的构造和分析中的独特作用. 研究结果将文献 [23] 的结论进行了推广, 得出所需隐元最小数目的上界是 n , 但是否为上确界需做进一步研究.

参考文献

- 1 Wang D, Chaudhair N S. A fast modified constructive-covering algorithm for binary multi-layer neural networks. *Neurocomputing*, 2006, 70: 445–461
- 2 Zhang J Y, Liang J L, Bao Z. Classifier design for heavy-overlap patterns based on capture/inhibition principle. *Act Electron Sin*, 2006, 34: 2154–2160 [张军英, 梁军利, 保铮. 强混叠模式下基于神经元捕获/抑制原理的分类器设计. *电子学报*, 2006, 34: 2154–2160]
- 3 Iyoda E M, Nobuhara H, Hirota K. A solution for the n-bit parity problem using a single translated multiplicative neuron. *Neur Process Lett*, 2003, 18: 213–218
- 4 Shen Y J, Wang B W. A fast learning algorithm of neural network with tunable activation function. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2004, 47: 126–136
- 5 Grochowski M, Duch W. Learning highly non-separable boolean functions using constructive feed-forward neural network. In: *Proceedings of the 17th International Conference on Artificial Networks*, Porto, 2007. 180–189
- 6 Lavtritsky E. On the exact solution of the parity-n problem using ordered neural networks. *Neur Netw*, 2000, 13: 643–649
- 7 Wilamowski B M, Hunter D, Malinowski A. Solving parity-n problems with feed-forward neural networks. *Neur Netw*, 2003, 4: 2546–2551
- 8 Liu D R, Hohil M E, Smith S H. N-bit parity neural networks: new solutions based on linear programming. *Neurocomputing*, 2002, 48: 477–488

- 9 Moraga C. Design of neural networks. In: Proceedings of the 11th International Conference on Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems, Vietri sul Mare, 2007. 26–33
- 10 Duch W. K-Separability. *Lect Notes Comput Sci*, 2006, 4131: 188–197
- 11 Setiono R. On the solution of the parity problem by a single hidden layer feed-forward neural network. *Neurocomputing*, 1997, 16: 225–235.
- 12 Stork D G, Allen J D. How to solve the n-bit parity problem with two hidden units. *Neur Netw*, 1992, 5: 923–926
- 13 Brown D A. Neural network letter. *Neur Netw*, 1993, 6: 607–608
- 14 Minor J M. Parity with two layer feedforward nets. *Neur Netw*, 1993, 6: 705–707
- 15 Hohil M E, Liu D R, Smith S H. Solving the n-bit parity problem using neural networks. *Neur Netw*, 1999, 12: 1321–1323
- 16 Huang S C, Huang Y F. Bounds on the number of hidden neurons in multilayer perceptrons. *IEEE Trans Neur Netw*, 1991, 2: 47–55
- 17 Gray D L, Michel A N. A training algorithm for binary feedforward neural networks. *IEEE Trans Neur Netw*, 1992, 3: 176–194
- 18 Abe T, Saito T. An approach to prediction of spatio-temporal patterns based on binary neural networks and cellular automata. In: *IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, 2008. 2494–2499
- 19 Tian H, Chen S L, Zhang J Y. Study on the classification ability of feedforward neural network through experiments. *Microelectron Comput*, 2004, 21: 99–101 [田华, 陈森林, 张军英. 前向神经网络的分类能力的实验研究. *微电子学与计算机*, 2004, 21: 99–101]
- 20 Cui R Y, Hong B R. On constructing a hidden layer for three-layered feedforward neural networks. *J Comput Res Develop*, 2004, 41: 524–530 [崔荣一, 洪炳熔. 关于三层前馈神经网络隐层构建问题的研究. *计算机研究与发展*, 2004, 41: 524–530]
- 21 Erhan O. Sign-representation of boolean functions using a small number of monomials. *Neur Netw*, 2009, 22: 938–948
- 22 Erhan O. An upper bound on the minimum number of monomials required to separate dichotomies of $\{-1, 1\}^n$. *Neur Computat*, 2006, 18: 3119–3138
- 23 Fung H K, Li L K. Minimal feedforward parity networks using threshold gates. *Neural Comput*, 2001, 13: 319–326
- 24 Lu Y, Han J H, Gao J. Research on the minimal upper bound of the number of hidden nodes in binary neural networks. *Patt Recog Artif Intell*, 2000, 13: 254–257 [陆阳, 韩江洪, 高隽. 二进神经网络隐元数目最小上界研究. *模式识别与人工智能*, 2000, 13: 254–257]
- 25 Ma X M, Yang Y X, Zhang Z Z, et al. A Efficient Algorithm for boolean neural network. *J China Inst Commun*, 1999, 20: 13–18 [马晓敏, 杨义先, 章照止, 等. 布尔神经网络的一种高效率学习算法. *通信学报*, 1999, 20: 13–18]
- 26 Lu Y, Han J H, Wei Z. A general judging and constructing method of SP functions in binary neural networks. *ACT Autom Sin*, 2003, 29: 234–241
- 27 Kim J H, Park S K. The geometrical learning of binary neural networks. *IEEE Trans Neur Netw*, 1995, 6: 237–247
- 28 Lu Y, Wei Z, Gao J, et al. Logical meaning of hamming sphere and its general judgment method in binary neural networks. *J Comput Res Develop*, 2002, 39: 79–86 [陆阳, 魏臻, 高隽, 等. 二进神经网络中汉明球的逻辑意义及一般判别方法. *计算机研究与发展*, 2002, 39: 79–86]

The upper bound of the minimal number of hidden neurons for the parity problem in binary neural networks

LU Yang*, YANG Juan, WANG Qiang & HUANG ZhenJin

School of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China

*E-mail: luyang.hf@126.com

Abstract Binary neural networks (BNNs) have important value in many application areas. They adopt linearly

separable structures, which are simple and easy to implement by hardware. For a BNN with single hidden layer, the problem of how to determine the upper bound of the number of hidden neurons has not been solved well and truly. This paper defines a special structure called most isolated samples (MIS) in the Boolean space. We prove that at least 2^{n-1} hidden neurons are needed to express the MIS logical relationship in the Boolean space if the hidden neurons of a BNN and its output neuron form a structure of AND/OR logic. Then the paper points out that the n -bit parity problem is just equivalent to the MIS structure. Furthermore, by proposing a new concept of restraining neuron and using it in the hidden layer, we can reduce the number of hidden neurons to n . This result explains the important role of restraining neurons in some cases. Finally, on the basis of Hamming sphere and SP function, both the restraining neuron and the n -bit parity problem are given a clear logical meaning, and can be described by a series of logical expressions.

Keywords binary neural network, restraining neuron, n -bit parity problem, Hamming sphere, SP function

LU Yang was born in 1967. He received Ph.D. degree from Hefei University of Technology in 2002. Currently, he is a Professor and Ph.D. supervisor at the School of Computer and Information, Hefei University of Technology. His research interests include artificial intelligence, computer control and sensor network.

YANG Juan was born in 1983. She received her M.S. degree from Hefei University of Technology in 2009. Currently, she is a Ph.D. candidate at the School of Computer and Information, Hefei University of Technology. Her research interests include artificial intelligence and neural networks.

WANG Qiang was born in 1983. He received his M.S. degree from Hefei University of Technology in 2008. Currently, he is a Ph.D. candidate at the School of Computer and Information, Hefei University of Technology. His research interests include software redundant technology, system reliability design and analysis.

HUANG ZhenJin was born in 1975. He received his M.S. degree from South China University of Technology in 2005. Currently, he is a Ph.D. candidate at the School of Computer and Information, Hefei University of Technology. His research interests include artificial intelligence and computer control.