$\mathbb{C}^n$ 中 μ -Bloch 空间上的原子分解

张学军^{①*}, 李敏^①, 关莹^②, 李俊锋^②^① 湖南师范大学数学与计算机科学学院, 长沙 410006;^② 湖南城市学院数学与计算科学学院, 益阳 413000

E-mail: xuejunttt@263.net, 960784810@qq.com, gyxcz@qq.com, li_jfeng@sina.com

收稿日期: 2014-07-14; 接受日期: 2014-09-30; * 通信作者

湖南省自然科学基金 (批准号: 2015JJ2095)、湖南省教育厅重点项目 (批准号: 12A026)、湖南省重点学科建设项目和湖南师范大学数学与计算机科学学院高性能计算与随机信息处理省部共建教育部重点实验室资助项目

摘要 设 μ 和 ν 是 $[0, 1)$ 上的正规函数, 本文讨论了单位球 B 上正规权 Bloch 型空间 $\beta_\mu(B)$ 的几个问题. 首先给出了 $\beta_\mu(B)$ 函数的一种积分表示, 接着证明了 $\beta_\mu(B)$ 是一类正规权 Bergman 型空间 $A_\nu^1(B)$ 的对偶空间, 最后给出了 $\beta_\mu(B)$ 函数的原子分解.

关键词 μ -Bloch 空间 积分表示 对偶空间 原子分解

MSC (2010) 主题分类 32A37

1 问题的引入和定义

设 $dv(z)$ 表示单位球 B 上的规范 Lebesgue 测度, 满足 $v(B) = 1$; $d\sigma(\xi)$ 为单位球面 S_n 上的规范旋转不变测度, 满足 $\sigma(S_n) = 1$; 设 $\alpha > -1$, 定义 B 上一个测度 $dv_\alpha(z) = c_\alpha(1 - |z|^2)^\alpha dv(z)$, 这里常数 c_α 满足 $v_\alpha(B) = 1$; 用 $H(B)$ 表示 B 上全纯函数的全体.

在本文中, $z = (z_1, \dots, z_n)$ 和 $w = (w_1, \dots, w_n)$, 记 $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \overline{w_j}$. $H(B)$ 中函数 f 的梯度和径向导数分别定义为

$$\nabla f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(z) \right) \quad \text{和} \quad Rf(z) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) = \langle \nabla f(z), \bar{z} \rangle.$$

$[0, 1)$ 上正的连续函数 μ 称为正规函数是指: 存在常数 $0 < a < b$ 和 $0 \leq r_0 < 1$ 使得

- (1) $\frac{\mu(r)}{(1-r^2)^a}$ 在 $[r_0, 1)$ 上递减, 且 $\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{\mu(r)}{(1-r^2)^a} = 0$;
- (2) $\frac{\mu(r)}{(1-r^2)^b}$ 在 $[r_0, 1)$ 上递增, 且 $\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{\mu(r)}{(1-r^2)^b} = \infty$.

例如

$$\mu(r) = (1-r^2)^\alpha \left(\log \frac{2}{1-r^2} \right)^{-1} \quad (\alpha > 0), \quad \mu(r) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k r^{2k-2}}{\log(k+1)} \right\}^{-1},$$

$$\mu(r) = (1-r^2)^\alpha \quad (\alpha > 0), \quad \mu(r) = (1-r^2) \log \log \frac{3}{1-r^2},$$

都是正规函数的例子.

鉴于在论证中, 除了繁琐性外没有本质性的差异, 不失一般性, 本文中设 $r_0 = 0$.

设 μ 是 $[0, 1)$ 上的正规函数, B 上全纯函数 f 属于 μ -Bloch 空间 $\beta_\mu(B)$ 是指:

$$\|f\|_{\beta_\mu(B)} = |f(0)| + \sup_{z \in B} \mu(|z|) |\nabla f(z)| < \infty.$$

当 $\mu(r) = (1 - r^2)^\gamma$ ($\gamma > 0$) 时就是通常的 Bloch 型空间 $\beta_\gamma(B)$.

设 μ 是 $[0, 1)$ 上的正规函数, B 上全纯函数 f 属于正规权 Bers 型空间 X 是指:

$$\|f\|_X = \sup_{z \in B} \mu(|z|) |f(z)| < \infty.$$

上述两个空间 $\beta_\mu(B)$ 和 X 依各自的范数构成 Banach 空间. 设 $p > 0$, B 上 Lebesgue 可测函数 f 属于 $L_\mu^p(B)$ 空间是指

$$\|f\|_{L_\mu^p(B)} = \left\{ \int_B |f(z)|^p \frac{\mu^p(|z|)}{1 - |z|^2} dv(z) \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

$A_\mu^p(B) = L_\mu^p(B) \cap H(B)$ 称为 μ -Bergman 空间. 特别地, 当 $\mu(r) = (1 - r^2)^{\frac{1}{p}}$ 时 $A_\mu^p(B)$ 就是 Bergman 空间 $A^p(B)$, 当 $\mu(r) = (1 - r^2)^{\frac{\beta+1}{p}}$ ($\beta > -1$) 时 $A_\mu^p(B)$ 就是加权 Bergman 空间 $A_\beta^p(B)$. 当 $p \geq 1$ 时 $A_\mu^p(B)$ 依范数 $\|\cdot\|_{L_\mu^p(B)}$ 构成一个 Banach 空间, 当 $0 < p < 1$ 时 $A_\mu^p(B)$ 按距离 $\|\cdot\|_{L_\mu^p(B)}^p$ 构成一个 Fréchet 空间. 同时, 当 $p > 0$ 时 $(A_\mu^p(B), \|\cdot\|_{L_\mu^p(B)})$ 还是一个拓扑向量空间.

序列空间 l^∞ 定义如下:

$$l^\infty = \left\{ \{c_k\} : \|\{c_k\}\|_\infty = \sup_{k \in \{1, 2, \dots\}} |c_k| < \infty, \text{ 这里每个 } c_k \text{ 是复数} \right\}.$$

B 上 Lebesgue 可测函数 f 属于空间 $L^\infty(B)$ 是指 $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{z \in B} |f(z)| < \infty$. 我们记 B 上有界全纯函数空间 $H^\infty(B) = L^\infty(B) \cap H(B)$.

本文中, 我们将主要讨论原子分解. 为了解决这个问题, 首先要讨论 $\beta_\mu(B)$ 函数的一种积分表示, 接着我们证明 $\beta_\mu(B)$ 可看成正规权 Bergman 型空间 $A_\mu^1(B)$ 的对偶空间. 很久以来, 原子分解一直被不少数学工作者所研究, 最近的研究如文献 [1-7] 等, 与其相关问题的研究如文献 [8-19] 等等. 在文献 [1] 中, Coifman 和 Rochberg 在加权 Bergman 空间 A_α^p 上讨论了这个问题; 在文献 [2] 中, Zhu 不仅修正了文献 [1] 中的证明, 而且就 Bloch 型空间给出了如下定理:

定理 A 设 $\lambda > 0$, $t > \max\{n, n + \lambda - 1\}$, 则存在 B 中的序列 $\{a_k\}$ 使得 $\beta_\gamma(B)$ 中的函数恰好可以表示成

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{(1 - |a_k|^2)^{t+1-\gamma}}{(1 - \langle z, a_k \rangle)^t} \quad (z \in B), \quad \text{这里 } \{c_k\} \in l^\infty.$$

本文中, 我们将权 $(1 - |z|^2)^\gamma$ 推广到正规权 $\mu(|z|)$, 给出空间 $\beta_\mu(B)$ 上的每个函数都可分解成一系列优美的原子, 这些原子依照类似核函数的定义, 在某种意义上讲扮演空间 $\beta_\mu(B)$ 基的作用.

本文中我们将用记号 c 、 c' 、 c'' 、 c''' 表示不依赖 z 、 w 和函数的正的常数, 但可以和其他某些参数有关, 不同的地方可以代表不同的数. “ $E \approx F$ ” 表示比较或称等价, 即存在正的常数 A_1 和 A_2 使得 $A_1 E \leq F \leq A_2 E$. 文中的 a 和 b 总指正规函数 μ 定义中的那两个参数.

2 一些引理

为了证明主要结果, 首先我们给出一些引理.

引理 2.1 (参见文献 [2]) 对任意 $0 < r \leq 1$, 存在序列 $\{a_k\} \subset B$ 和正整数 N 以及对每个 $k \in \{1, 2, \dots\}$ 存在 Lebesgue 可测集 D_k 满足下列条件:

- (1) $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} D(a_k, r) = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$;
- (2) 当 $k \neq j$ 时, $D_k \cap D_j = \emptyset$ ($k, j \in \{1, 2, \dots\}$);
- (3) 对每个 $k \in \{1, 2, \dots\}$ 都有 $D(a_k, \frac{r}{4}) \subset D_k \subset D(a_k, r)$;
- (4) B 中每个点至多属于 N 个 $D(a_k, 4r)$.

引理 2.2 (参见文献 [7]) 设 μ 是 $[0, 1)$ 上的正规函数, $0 < r \leq 1$, $w \in B$, 则

- (1) 对任意 $z \in D(w, r)$ 有 $D(z, r) \subset D(w, 2r)$;
- (2) 对任意 $z \in B$ 有

$$\frac{\mu(|z|)}{\mu(|w|)} \leq \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |w|^2} \right)^a + \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |w|^2} \right)^b;$$

- (3) 存在不依赖 r 的常数 $c > 0$ 使得 $c^{-1}\mu(|w|) \leq \mu(|z|) \leq c\mu(|w|)$ 对一切 $z \in D(w, r)$ 成立.

对 $0 < r \leq 1$, 设 η 表示比 r 小得多的正半径. 固定 $D(0, r)$ 中的有限序列 $\{z_1, \dots, z_J\}$ 使得 $\{D(z_j, \eta)\}$ 覆盖 $D(0, r)$, 并且这些 $\{D(z_j, \frac{\eta}{4})\}$ 互不相交. 每个集合 $D(z_j, \frac{\eta}{4}) \cap D(0, r)$ 扩充成一个 Borel 集 $E_j \subset D(z_j, \eta)$ 使得 $D(0, r) = \bigcup_{j=1}^J E_j$. 对于 $k \in \{1, 2, \dots\}$ 和 $j \in \{1, 2, \dots, J\}$, 设 $D_{kj} = D_k \cap \varphi_{a_k}(E_j)$, 其中 $a_{kj} = \varphi_{a_k}(z_j) \in D(a_k, r)$ (具体可参见文献 [2]).

引理 2.3 设 μ 是 $[0, 1)$ 上的正规函数, $t > b - 1$. 若 $g \in X$, 则存在不依赖 r 和 η 的常数 $c > 0$ 使得 $\|(I - S)g\|_X \leq c\sigma\|g\|_X$. 这里

$$\sigma = \eta + \frac{\tanh \eta}{\tanh r}, \quad Sg(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^J \frac{v_t(D_{kj})g(a_{kj})}{(1 - \langle z, a_{kj} \rangle)^{n+t+1}}.$$

证明 当 $t > -1$ 时, 在文献 [2] 的定理 2.29 中取 $\alpha = 0$ 和 $p = 1$, 则有和 r 与 η 无关的常数 c' 使

$$|g(z) - Sg(z)| \leq c'\sigma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - |a_k|^2)^t}{|1 - \langle z, a_k \rangle|^{n+t+1}} \int_{D(a_k, 2r)} |g(w)| dv(w) \quad (2.1)$$

对一切 $0 < r \leq 1$ 和 $z \in B$ 成立. 由文献 [8] 的 (2.2) 式和文献 [7] 的引理 2.3 知, 当 $w \in D(a_k, 2r)$ 和 $z \in B$ 时

$$\frac{1 - \tanh 2}{1 + \tanh 2} \leq \frac{1 - |w|^2}{1 - |a_k|^2} \leq \frac{1 + \tanh 2}{1 - \tanh 2}, \quad A^{-1} \leq \frac{|1 - \langle z, a_k \rangle|}{|1 - \langle z, w \rangle|} \leq A. \quad (2.2)$$

由 (2.1)–(2.2) 式和引理 2.1 知, 存在和 r 与 η 无关的常数 c'' 使得

$$\begin{aligned} |g(z) - Sg(z)| &\leq c''\sigma \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D(a_k, 2r)} \frac{(1 - |w|^2)^t |g(w)|}{|1 - \langle z, w \rangle|^{n+t+1}} dv(w) \\ &\leq c''N\sigma \int_B \frac{(1 - |w|^2)^t |g(w)|}{|1 - \langle z, w \rangle|^{n+t+1}} dv(w). \end{aligned} \quad (2.3)$$

根据 (2.3) 式和引理 2.2 以及文献 [9] 中命题 1.4.10 可得, 当 $t > b - 1$ 时,

$$\begin{aligned} \mu(|z|)|g(z) - Sg(z)| &\leq c''N\sigma \int_B \frac{(1 - |w|^2)^t \mu(|z|)|g(w)|}{|1 - \langle z, w \rangle|^{n+t+1}} dv(w) \\ &\leq c''N\sigma\|g\|_X \int_B \frac{(1 - |z|^2)^a (1 - |w|^2)^{t-a}}{|1 - \langle z, w \rangle|^{n+t+1}} dv(w) \end{aligned}$$

$$+ c'' N \sigma \|g\|_X \int_B \frac{(1-|z|^2)^b (1-|w|^2)^{t-b}}{|1-\langle z, w \rangle|^{n+t+1}} dv(w) \leq c \sigma \|g\|_X.$$

这样就存在和 r 与 η 无关的常数 c 使得 $\|(I-S)g\|_X \leq c \sigma \|g\|_X$. $\square$

引理 2.4 设 $0 < p < \infty$, μ 是 $[0, 1)$ 上的正规函数, 则多项式在 $A_\mu^p(B)$ 中稠密.

证明 当 $f \in A_\mu^p(B)$ 时, 对任意 $0 < r < 1$, 记 $f_r(z) = f(rz)$ ($z \in B$). 首先证明

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|f_r - f\|_{L_\mu^p(B)} = 0.$$

实际上, 由 $f \in A_\mu^p(B)$ 可知

$$\|f\|_{L_\mu^p(B)}^p = \int_B |f(z)|^p \frac{\mu^p(|z|)}{1-|z|^2} dv(z) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{2n\rho^{2n-1} \mu^p(\rho) M_p^p(\rho, f)}{1-\rho^2} d\rho.$$

因而对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $0 < \delta < 1$ 使得

$$\int_{1-\delta}^1 \frac{2n\rho^{2n-1} \mu^p(\rho) M_p^p(\rho, f)}{1-\rho^2} d\rho < \varepsilon. \quad (2.4)$$

再根据全纯函数 f 积分平均值 $M_p(r, f)$ 的递增性可得

$$\int_{1-\delta}^1 \frac{2n\rho^{2n-1} \mu^p(\rho) M_p^p(r\rho, f)}{1-\rho^2} d\rho \leq \int_{1-\delta}^1 \frac{2n\rho^{2n-1} \mu^p(\rho) M_p^p(\rho, f)}{1-\rho^2} d\rho < \varepsilon. \quad (2.5)$$

另一方面, 由于 f 在 $\{z : |z| \leq 1-\delta\}$ 上全纯, 因而 f 在 $\{z : |z| \leq 1-\delta\}$ 上一致连续, 故存在 $\delta_0 > 0$, 对 $\{z : |z| \leq 1-\delta\}$ 内的任意 z_1 和 z_2 , 只要 $|z_1 - z_2| < \delta_0$ 就有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. 这样, 对 $\{z : |z| \leq 1-\delta\}$ 内的任意 z , 当

$$0 < 1-r < \min\left\{1, \frac{\delta_0}{1-\delta}\right\}$$

时就有

$$\begin{aligned} \max_{|z| \leq 1-\delta} |f_r(z) - f(z)| &< \varepsilon^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \\ \int_{|z| \leq 1-\delta} |f_r(z) - f(z)|^p \frac{\mu^p(|z|)}{1-|z|^2} dv(z) &< \varepsilon \int_B \frac{\mu^p(|z|)}{1-|z|^2} dv(z) \leq c\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.6)$$

这样, 根据 (2.4)-(2.6), 当

$$0 < 1-r < \min\left\{1, \frac{\delta_0}{1-\delta}\right\}$$

时就有

$$\begin{aligned} \|f_r - f\|_{L_\mu^p(B)}^p &= \int_B |f_r(z) - f(z)|^p \frac{\mu^p(|z|)}{1-|z|^2} dv(z) \\ &\leq 2^p \left\{ \int_{1-\delta}^1 \frac{2n\rho^{2n-1} \mu^p(\rho) M_p^p(\rho, f)}{1-\rho^2} d\rho + \int_{1-\delta}^1 \frac{2n\rho^{2n-1} \mu^p(\rho) M_p^p(r\rho, f)}{1-\rho^2} d\rho \right\} \\ &\quad + \int_{|z| \leq 1-\delta} |f_r(z) - f(z)|^p \frac{\mu^p(|z|)}{1-|z|^2} dv(z) < 2^{p+1} \varepsilon + c\varepsilon. \end{aligned}$$

这意味着

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|f_r - f\|_{L_\mu^p(B)}^p = 0.$$

由此可得, 对任意 $\sigma > 0$, 存在 $0 < r_0 < 1$ 使得

$$\|f_{r_0} - f\|_{L^p_\mu(B)}^p < \sigma. \quad (2.7)$$

另一方面, 由于 f_{r_0} 在 $\{z: |z| \leq 1\}$ 上连续, 故存在多项式 P_{n_0} 使得

$$\sup_{z \in B} |f_{r_0}(z) - P_{n_0}(z)| < \sigma^{\frac{1}{p}}. \quad (2.8)$$

根据 (2.7)–(2.8) 式可得

$$\begin{aligned} \|f - P_{n_0}\|_{L^p_\mu(B)}^p &\leq 2^p \{\|f_{r_0} - f\|_{L^p_\mu(B)}^p + \|f_{r_0} - P_{n_0}\|_{L^p_\mu(B)}^p\} \\ &< 2^p \sigma \left\{ 1 + \int_B \frac{\mu^p(|z|)}{1 - |z|^2} dv(z) \right\} \leq c\sigma \Rightarrow f \text{ 可由多项式依范数逼近.} \end{aligned}$$

证毕. □

引理 2.5 (参见文献 [2]) 设 $\alpha > -1$, 若 $f \in A^1_\alpha$, 则

$$f(z) = \int_B \frac{f(w)}{(1 - \langle z, w \rangle)^{n+1+\alpha}} dv_\alpha(w) \quad (z \in B).$$

3 主要结果及其证明

首先给出 $\beta_\mu(B)$ 函数的一种积分表示.

定理 3.1 设 μ 是 $[0, 1)$ 上的正规函数, $t > \max\{b-1, 0\}$, 则 $f \in \beta_\mu(B)$ 的充要条件为: 存在 $g \in L^\infty(B)$ 使得

$$f(z) = \int_B \frac{g(w)}{\mu(|w|)(1 - \langle z, w \rangle)^{n+t}} dv_t(w) \quad (z \in B).$$

进一步有 $\|f\|_{\beta_\mu(B)} \approx \|g\|_\infty$, 控制常数与 f 和 g 无关.

证明 若 $f \in \beta_\mu(B)$, 由文献 [2] 中定理 3.1 知

$$|Rf(z)| = |\langle \nabla f(z), \bar{z} \rangle| \leq |z| |\nabla f(z)| \leq |\nabla f(z)| \leq \frac{Q_f(z)}{1 - |z|^2}, \quad (3.1)$$

其中

$$Q_f(z) = \sup_{u \in \mathbb{C}^n - \{0\}} \frac{(1 - |z|^2) |\langle \nabla f(z), \bar{u} \rangle|}{\sqrt{(1 - |z|^2)|u|^2 + |\langle z, u \rangle|^2}}.$$

由 (3.1) 式和文献 [10] 中引理 2.2 有

$$|f(z)| \leq \left(1 + \int_0^{|z|} \frac{1}{\mu(\rho)} d\rho \right) \|f\|_{\beta_\mu(B)}.$$

因此, 只要 $t > \max\{b-1, 0\}$, 根据正规函数的定义就有

$$\int_B |f(z)| dv_{t-1}(z) \leq \int_B \left(1 + \int_0^{|z|} \frac{1}{\mu(\rho)(1 - \rho^2)^b} d\rho \right) \|f\|_{\beta_\mu(B)} dv_{t-1}(z) \leq c \|f\|_{\beta_\mu(B)}.$$

这意味着 $f \in A^1_{t-1}$, 根据引理 2.5 可知

$$f(z) = \int_B \frac{f(u)}{(1 - \langle z, u \rangle)^{n+t}} dv_{t-1}(u) \quad (z \in B).$$

因而

$$\begin{aligned} Rf(z) &= \int_B \frac{(n+t)\langle z, u \rangle f(u)}{(1-\langle z, u \rangle)^{n+t+1}} dv_{t-1}(u) \Rightarrow \\ f(z) + \frac{Rf(z)}{n+t} &= \int_B \frac{f(u)}{(1-\langle z, u \rangle)^{n+1+t}} dv_{t-1}(u). \end{aligned} \quad (3.2)$$

我们选取

$$g(z) = \mu(|z|) \left\{ f(z) + \frac{Rf(z)}{n+t} \right\}.$$

根据 (3.1) 式和文献 [10] 中引理 2.2 以及正规函数定义可得

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq \mu(|z|) \left(1 + \int_0^{|z|} \frac{1}{\mu(\rho)} d\rho \right) \|f\|_{\beta_\mu(B)} + \frac{\|f\|_{\beta_\mu(B)}}{n+t} \\ &\leq \left(\mu(0) + 1 + \frac{1}{n+t} \right) \|f\|_{\beta_\mu(B)} \Rightarrow \|g\|_\infty \leq c \|f\|_{\beta_\mu(B)}. \end{aligned}$$

对 B 中的点 z 和 w 以及 u 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\langle w, u \rangle)^{n+t+1}} &= \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\Gamma(n+t+1+|\alpha|)}{\Gamma(n+t+1)\alpha!} w^\alpha \bar{u}^\alpha, \\ \frac{1}{(1-\langle z, w \rangle)^{n+t}} &= \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\Gamma(n+t+|\alpha|)}{\Gamma(n+t)\alpha!} z^\alpha \bar{w}^\alpha. \end{aligned} \quad (3.3)$$

根据文献 [2] 中 (1.21) 式和引理 1.11, 当 $0 \leq r < 1$ 时, 经计算有

$$\begin{aligned} &\int_{S_n} \frac{1}{(1-\langle r\xi, u \rangle)^{n+t+1}(1-\langle z, r\xi \rangle)^{n+t}} d\sigma(\xi) \\ &= \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(n-1)!\Gamma(n+t+1+|\alpha|)\Gamma(n+t+|\alpha|)}{(n-1+|\alpha|)!\alpha!\Gamma(n+t+1)\Gamma(n+t)} r^{2|\alpha|} z^\alpha \bar{u}^\alpha. \end{aligned} \quad (3.4)$$

另外, 根据文献 [2] 中 (1.19) 式经计算可得

$$2nc_t \int_0^1 r^{2n-1+2|\alpha|} (1-r^2)^t dr = \frac{\Gamma(n+t+1)\Gamma(n+|\alpha|)}{(n-1)!\Gamma(n+t+1+|\alpha|)}. \quad (3.5)$$

(3.3)-(3.5) 式结合文献 [2] 中引理 1.8 有

$$\begin{aligned} \int_B \frac{(1-\langle w, u \rangle)^{-(n+1+t)}}{(1-\langle z, w \rangle)^{n+t}} dv_t(w) &= 2nc_t \int_0^1 r^{2n-1+2|\alpha|} (1-r^2)^t \\ &\quad \times \int_{S_n} \frac{1}{(1-\langle r\xi, u \rangle)^{n+t+1}(1-\langle z, r\xi \rangle)^{n+t}} d\sigma(\xi) dr \\ &= \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\Gamma(n+t+|\alpha|)}{\alpha!\Gamma(n+t)} z^\alpha \bar{u}^\alpha = \frac{1}{(1-\langle z, u \rangle)^{n+t}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

由 (3.2) 式、Fubini 定理、(3.6) 式以及引理 2.5 可得

$$\int_B \frac{g(w)}{\mu(|w|)(1-\langle z, w \rangle)^{n+t}} dv_t(w)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_B \left\{ \int_B \frac{f(u)}{(1 - \langle w, u \rangle)^{n+1+t}} dv_{t-1}(u) \right\} \frac{1}{(1 - \langle z, w \rangle)^{n+t}} dv_t(w) \\
&= \int_B \left\{ \int_B \frac{(1 - \langle w, u \rangle)^{-(n+1+t)}}{(1 - \langle z, w \rangle)^{n+t}} dv_t(w) \right\} f(u) dv_{t-1}(u) \\
&= \int_B \frac{f(u)}{(1 - \langle z, u \rangle)^{n+t}} dv_{t-1}(u) = f(z).
\end{aligned}$$

反过来, 若存在 $g \in L^\infty(B)$ 使得

$$f(z) = \int_B \frac{g(w)}{\mu(|w|)(1 - \langle z, w \rangle)^{n+t}} dv_t(w) \quad (z \in B),$$

那么 $f \in H(B)$, 且当 $t > b - 1$ 时, 根据引理 2.2 和文献 [9] 中命题 1.4.10 就有

$$\begin{aligned}
\mu(|z|)|\nabla f(z)| &= \mu(|z|) \left| \int_B \frac{(n+t)\bar{w}g(w)}{\mu(|w|)(1 - \langle z, w \rangle)^{n+t+1}} dv_t(w) \right| \\
&\leq (n+t)c_t\|g\|_\infty \int_B \frac{(1 - |z|^2)^a(1 - |w|^2)^{t-a}}{|1 - \langle z, w \rangle|^{n+t+1}} dv(w) \\
&\quad + (n+t)c_t\|g\|_\infty \int_B \frac{(1 - |z|^2)^b(1 - |w|^2)^{t-b}}{|1 - \langle z, w \rangle|^{n+t+1}} dv(w) \leq c\|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

另外,

$$|f(0)| = \left| \int_B \frac{g(w)}{\mu(|w|)} dv_t(w) \right| \leq \frac{c_t\|g\|_\infty}{\mu(0)} \int_B (1 - |z|^2)^{t-b} dv(z) \leq c'\|g\|_\infty.$$

因此, $f \in \beta_\mu(B)$, 且 $\|f\|_{\beta_\mu(B)} \leq c''\|g\|_\infty$. □

下面给出空间 $A_\nu^1(B)$ 的对偶空间就是 $\beta_\mu(B)$.

定理 3.2 设 μ 是 $[0, 1)$ 上的正规函数, $t > \max\{b - 1, 0\}$, 记

$$\nu(\rho) = (1 - \rho^2)^{t+1} \mu^{-1}(\rho) \quad (0 \leq \rho < 1),$$

则 $A_\nu^1(B)$ 的对偶空间为 $\beta_\mu(B)$, 即 $(A_\nu^1(B))^* = \beta_\mu(B)$, 其中对偶关系由积分

$$\langle f, g \rangle = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_B f(rz) \overline{g(rz)} dv_{t-1}(z) \quad (f \in A_\nu^1(B), g \in \beta_\mu(B))$$

决定.

证明 设 $g \in \beta_\mu(B)$, 根据定理 3.1 知, 存在 $h \in L^\infty(B)$ 使得

$$g(z) = \int_B \frac{h(w)}{\mu(|w|)(1 - \langle z, w \rangle)^{n+t}} dv_t(w) \quad (z \in B).$$

因此, 对任意 $0 \leq r < 1$ 和 $f \in A_\nu^1(B)$, 根据 Fubini 定理和引理 2.5 以及全纯函数积分平均值的递增性有

$$\begin{aligned}
\int_B f(rz) \overline{g(rz)} dv_{t-1}(z) &= \int_B \frac{\overline{h(w)}}{\mu(|w|)} \left\{ \int_B \frac{f(rz)}{(1 - \langle rw, z \rangle)^{n+t}} dv_{t-1}(z) \right\} dv_t(w) \\
&= \int_B \frac{\overline{h(w)} f(r^2 w)}{\mu(|w|)} dv_t(w) \Rightarrow |\langle f, g \rangle| \leq c_t \|h\|_\infty \|f\|_{L_\nu^1(B)}.
\end{aligned}$$

从而结合定理 3.1 有 $|\langle f, g \rangle| \leq c \|g\|_{\beta_\mu(B)} \|f\|_{L_\nu^1(B)}$, 也就是通过上述积分使得 $\beta_\mu(B)$ 中每个函数 g 诱导 $A_\nu^1(B)$ 上一个有界线性泛函. 反过来, 对任意 $f \in A_\nu^1(B)$ 以及任意 $0 \leq r < 1$, 记 $f_r(z) = f(rz)$, 则 $f_r \in H^\infty(B)$, 因而

$$f_r(z) = \int_B \frac{f_r(w)}{(1 - \langle z, w \rangle)^{n+t}} dv_{t-1}(w) \quad (z \in B).$$

对任意 $w \in B$ 和多重指标 α , 记 $K_w(z) = \frac{1}{(1 - \langle z, w \rangle)^{n+t}}$ 以及 $T_\alpha(z) = z^\alpha$. 若 F 是 $A_\nu^1(B)$ 上任意一个有界线性泛函, 由于

$$f_r(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \left\{ \frac{\Gamma(n+t+|\alpha|)}{\alpha! \Gamma(n+t)} \int_B f_r(w) \bar{w}^\alpha dv_{t-1}(w) \right\} z^\alpha,$$

因而

$$F(f_r) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \left\{ \frac{\Gamma(n+t+|\alpha|)}{\alpha! \Gamma(n+t)} \int_B f_r(w) \bar{w}^\alpha dv_{t-1}(w) \right\} F(T_\alpha) = \int_B f_r(w) F(K_w) dv_{t-1}(w).$$

取

$$g(w) = \overline{F(K_w)} = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\Gamma(n+t+|\alpha|)}{\alpha! \Gamma(n+t)} \overline{F(T_\alpha)} w^\alpha,$$

因而 $g \in H(B)$, 且

$$F(f_r) = \int_B f_r(w) \overline{g(w)} dv_{t-1}(w) = \langle f_r, g \rangle = \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \int_B f_r(\rho w) \overline{g(\rho w)} dv_{t-1}(w).$$

这样就有 $F(f) = \lim_{r \rightarrow 1^-} F(f_r) = \langle f, g \rangle$. 另一方面, 经计算可得

$$\begin{aligned} Rg(w) &= \sum_{|\alpha| > 0} \frac{|\alpha| \Gamma(n+t+|\alpha|)}{\alpha! \Gamma(n+t)} \overline{F(T_\alpha)} w^\alpha \Rightarrow \\ \overline{Rg(w)} &= \sum_{|\alpha| > 0} \frac{|\alpha| \Gamma(n+t+|\alpha|)}{\alpha! \Gamma(n+t)} F(T_\alpha) \bar{w}^\alpha = F(RK_w). \end{aligned} \quad (3.7)$$

由 (3.7) 式、 F 为 $A_\nu^1(B)$ 上的有界泛函和引理 2.2 及文献 [9] 中的命题 1.4.10 得

$$\begin{aligned} \mu(|w|) |Rg(w)| &= \mu(|w|) |\overline{F(RK_w)}| \leq \mu(|w|) \|F\| \|RK_w\|_{L_\nu^1(B)} \\ &\leq (n+t) \|F\| \int_B \frac{\mu(|w|) |\langle z, w \rangle| (1 - |z|^2)^t}{\mu(|z|) |1 - \langle z, w \rangle|^{n+t+1}} dv(z) \\ &\leq (n+t) \|F\| \int_B \frac{(1 - |w|^2)^a (1 - |z|^2)^{t-a}}{|1 - \langle z, w \rangle|^{n+t+1}} dv(z) \\ &\quad + (n+t) \|F\| \int_B \frac{(1 - |w|^2)^b (1 - |z|^2)^{t-b}}{|1 - \langle z, w \rangle|^{n+t+1}} dv(z) \leq c \|F\|. \end{aligned}$$

又

$$g(0) = \overline{F(K_0)} = \overline{F(1)} \Rightarrow |g(0)| \leq \|F\| \int_B \frac{\nu(|w|)}{1 - |w|^2} dv(w) \leq c' \|F\|,$$

再根据文献 [11] 中的定理 2 可得 $\|g\|_{\beta_\mu(B)} \leq c'' \|F\|$. □

最后我们证明 μ -Bloch 空间 $\beta_\mu(B)$ 中的每个函数能分解成一系列原子.

定理 3.3 设 μ 是 $[0, 1)$ 上的正规函数, $t > \max\{b-1, 0\}$, 则存在序列 $\{w_k\} \subset B$ 使得 $\beta_\mu(B)$ 中的函数恰好表示成

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \frac{(1 - |w_k|^2)^{n+t+1}}{\mu(|w_k|)(1 - \langle z, w_k \rangle)^{n+t}} \quad (z \in B).$$

这里 $\{d_k\} \in l^\infty$, 且当 $\beta_\mu(B)$ 看成 $A_\nu^1(B)$ 的对偶空间时, 级数依 $\beta_\mu(B)$ 拓扑 * 弱收敛, 其中

$$\nu(\rho) = (1 - \rho^2)^{t+1} \mu^{-1}(\rho) \quad (0 \leq \rho < 1).$$

证明 我们取引理 2.3 中的序列 $\{a_{kj}\}$. $f(z)$ 可以改写为如下形式,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^J \frac{c_{kj}(1 - |a_{kj}|^2)^{n+t+1}}{\mu(|a_{kj}|)(1 - \langle z, a_{kj} \rangle)^{n+t}}, \quad (3.8)$$

这里 J 是一个固定的正整数, $\{c_{kj}\} \in l^\infty$. 实际上, 记 $w_1 = a_{11}, \dots, w_J = a_{1J}, w_{J+1} = a_{21}, \dots, w_{J+J} = a_{2J}, w_{2J+1} = a_{31}, \dots, d_1 = c_{11}, \dots, d_J = c_{1J}, d_{J+1} = c_{21}, \dots, d_{J+J} = c_{2J}, d_{2J+1} = c_{31}, \dots$ 即可.

首先, 若 f 有表达式 (3.8), 先证明右边级数在 B 的任意紧子集上一致收敛.

实际上, 根据引理 2.2 和文献 [8] 中的 (2.2) 式可得: 对一切 $k \in \{1, 2, \dots\}$ 和 $j \in \{1, 2, \dots, J\}$, 由于 $a_{kj} \in D(a_k, r)$, 所以当 $z \in D(a_k, r)$ 时,

$$1 - |z|^2 \approx 1 - |a_k|^2 \approx 1 - |a_{kj}|^2, \quad \mu(|z|) \approx \mu(|a_k|) \approx \mu(|a_{kj}|).$$

再根据引理 2.1 结合 $\{c_{kj}\} \in l^\infty$ 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^J \frac{|c_{kj}|(1 - |a_{kj}|^2)^{n+t+1}}{\mu(|a_{kj}|)} &\leq cJ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D(a_k, r)} \frac{(1 - |z|^2)^t}{\mu(|z|)} dv(z) \\ &\leq cJ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D(a_k, 4r)} \frac{\nu(|z|)}{1 - |z|^2} dv(z) \\ &\leq cJN \int_B \frac{\nu(|z|)}{1 - |z|^2} dv(z) \leq c'. \end{aligned} \quad (3.9)$$

这意味着级数 (3.8) 在 B 上收敛于一个全纯函数, 即 $f \in H(B)$. 我们记

$$f_m(z) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^J \frac{c_{kj}(1 - |a_{kj}|^2)^{n+t+1}}{\mu(|a_{kj}|)(1 - \langle z, a_{kj} \rangle)^{n+t}}.$$

根据引理 2.4 可知, 多项式在 $A_\nu^1(B)$ 上稠密, 这样对任一多项式 P , 由文献 [9] 中命题 1.4.10 有

$$\begin{aligned} |\langle P, f_m - f \rangle| &= \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^J \frac{\overline{c_{kj}}(1 - |a_{kj}|^2)^{n+t+1}}{\mu(|a_{kj}|)} \int_B \frac{P(z)}{(1 - \langle a_{kj}, z \rangle)^{n+t}} dv_{t-1}(z) \right| \\ &\leq c \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^J \frac{(1 - |a_{kj}|^2)^{n+t+1}}{\mu(|a_{kj}|)} \log \frac{2}{1 - |a_{kj}|^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

类似 (3.9) 式的证明可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^J \frac{(1 - |a_{kj}|^2)^{n+t+1}}{\mu(|a_{kj}|)} \log \frac{2}{1 - |a_{kj}|^2} \leq c' \int_B \frac{\nu(|z|)}{1 - |z|^2} \log \frac{2}{1 - |z|^2} dv(z) < \infty. \quad (3.11)$$

由 (3.10) 和 (3.11) 式可得 $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle P, f_m - f \rangle = 0$, 即

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle P, f_m \rangle = \langle P, f \rangle. \quad (3.12)$$

对任意 $g \in A_\nu^1(B)$ 以及 $0 \leq \rho < 1$, 根据引理 2.5 有

$$\begin{aligned} \int_B g(\rho z) \overline{f_m(\rho z)} dv_{t-1}(z) &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^J \frac{c_{kj}(1 - |a_{kj}|^2)^{n+t+1}}{\mu(|a_{kj}|)} \int_B \frac{g(\rho z)}{(1 - \langle \rho a_{kj}, z \rangle)^{n+t}} dv_{t-1}(z) \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^J \frac{c_{kj}(1 - |a_{kj}|^2)^{n+t+1}}{\mu(|a_{kj}|)} g(\rho^2 a_{kj}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

对一切 $k \in \{1, 2, \dots\}$ 和 $j \in \{1, 2, \dots, J\}$, 由引理 2.2 可得

$$D(a_{kj}, r) \subset D(a_k, 2r) \subset D(a_k, 4r).$$

结合文献 [12] 中引理 2.3 可知

$$\begin{aligned} |g(\rho^2 a_{kj})| &\leq \frac{c}{(1 - |a_{kj}|^2)^n \nu(|a_{kj}|)} \int_{D(a_{kj}, r)} \frac{|g(\rho^2 w)| \nu(|w|)}{1 - |w|^2} dv(w) \\ &\leq \frac{c\mu(|a_{kj}|)}{(1 - |a_{kj}|^2)^{n+t+1}} \int_{D(a_k, 4r)} \frac{|g(\rho^2 w)| \nu(|w|)}{1 - |w|^2} dv(w). \end{aligned} \quad (3.14)$$

根据 (3.13)–(3.14) 式结合引理 2.1 以及全纯函数积分平均值的递增性可得

$$\begin{aligned} \left| \int_B g(\rho z) \overline{f_m(\rho z)} dv_{t-1}(z) \right| &\leq Jc' \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D(a_k, 4r)} \frac{|g(\rho^2 w)| \nu(|w|)}{1 - |w|^2} dv(w) \\ &\leq Jc'N \int_B \frac{|g(\rho^2 w)| \nu(|w|)}{1 - |w|^2} dv(w) \leq Jc'N \|g\|_{L_\nu^1(B)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

故

$$|\langle g, f_m \rangle| = \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \left| \int_B g(\rho z) \overline{f_m(\rho z)} dv_{t-1}(z) \right| \leq Jc'N \|g\|_{L_\nu^1(B)} \Rightarrow \|f_m\| \leq Jc'N.$$

实际上 (3.15) 式证明了 $|\langle g, f \rangle| \leq Jc'N \|g\|_{L_\nu^1(B)}$, 这表明 f 按上述积分诱导 $A_\nu^1(B)$ 上的一个有界线性泛函, 由定理 3.2 知 $f \in \beta_\mu(B)$.

由于 $\|f_m\| \leq Jc'N$ 对一切正整数 m 成立, 结合 (3.12) 式, 根据泛函分析和定理 3.2 可得 $\{f_m\}$ 依 $\beta_\mu(B)$ 拓扑 * 弱收敛于 f .

反过来, 对任意 $f \in \beta_\mu(B)$, 取 $g(z) = f(z) + \frac{Rf(z)}{n+t}$, 由文献 [10] 中引理 2.2 知

$$\begin{aligned} \mu(|z|)|g(z)| &\leq \mu(|z|) \left\{ 1 + \int_0^{|z|} \frac{1}{\mu(\rho)} d\rho \right\} \|f\|_{\beta_\mu(B)} + \frac{\|f\|_{\beta_\mu(B)}}{n+t} \\ &\leq \left\{ \mu(0) + \frac{n+t+1}{n+t} \right\} \|f\|_{\beta_\mu(B)} \Rightarrow \|g\|_X \leq \left\{ \mu(0) + \frac{n+t+1}{n+t} \right\} \|f\|_{\beta_\mu(B)}. \end{aligned}$$

由引理 2.3 可知 $\|T - S\| \leq c\sigma$, 只要 $0 < \sigma < \frac{1}{c}$ 就有 S 在 X 上可逆, 从而 $h = S^{-1}g \in X$, 且

$$g(z) = Sh(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^J \frac{v_t(D_{kj})h(a_{kj})}{(1 - \langle z, a_{kj} \rangle)^{n+t+1}}.$$

对

$$L(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^J \frac{v_t(D_{kj})h(a_{kj})}{(1 - \langle z, a_{kj} \rangle)^{n+t}},$$

经计算得 $L(z) + \frac{RL(z)}{n+t} = g(z)$. 设 $(L-f)(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} b_{\alpha} z^{\alpha}$, 由

$$(L-f)(z) + \frac{R(L-f)(z)}{n+t} \equiv 0$$

可得

$$(L-f)(0) + \sum_{|\alpha| > 0} \left(1 + \frac{|\alpha|}{n+t}\right) b_{\alpha} z^{\alpha} \equiv 0.$$

由 $L-f$ 之 Taylor 系数的唯一性可得 $L=f$. 因此

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^J \frac{v_t(D_{kj})h(a_{kj})}{(1 - \langle z, a_{kj} \rangle)^{n+t}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^J \frac{c_{kj}(1 - |a_{kj}|^2)^{n+t+1}}{\mu(|a_{kj}|)(1 - \langle z, a_{kj} \rangle)^{n+t}},$$

其中

$$c_{kj} = \frac{\mu(|a_{kj}|)v_t(D_{kj})h(a_{kj})}{(1 - |a_{kj}|^2)^{n+t+1}}.$$

由引理 2.1 和文献 [2] 中引理 1.24 知

$$v_t(D_{kj}) \leq v_t(D_k) \approx (1 - |a_k|^2)^{n+1+t} \approx (1 - |a_{kj}|^2)^{n+1+t},$$

故 $|c_{kj}| \leq c\|h\|_X \Rightarrow \{c_{kj}\} \in l^{\infty}$. □

致谢 感谢审稿人对本文提出了很好的修改建议.

参考文献

- Coifman R, Rochberg R. Representation theorems for holomorphic and harmonic function in L^p . *Asterisque*, 1980, 77: 11–66
- Zhu K H. *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*. GTM 226. New York: Springer-Verlag, 2005
- Rochberg R. Decomposition theorems for Bergman spaces and their applications. In: Power S C, ed. *Operators and Function Theory*. NATO ASI series 153. Berlin: Springer-Verlag, 1985, 225–277
- Luecking D. Representation and duality in weighted spaces of analytic functions. *Indiana Univ Math J*, 1985, 34: 319–336
- Aleksandrov A B. Function theory in the ball. In: Khenkin G M, Vitushkin A G, eds. *Several Complex Variables II*. Berlin: Springer-Verlag, 1994
- Rochberg R, Semmes S. A decomposition theorem for BMO and applications. *J Funct Anal*, 1986, 67: 228–263
- Zhang X J, Xi L H, Fan H X, et al. Atomic decomposition of μ -Bergman space in $\mathbb{C}^n$. *Acta Math Sci*, 2014, 34: 779–789
- Zhang X J, Xiao J B, Hu Z J. The multipliers between the mixed norm space in $\mathbb{C}^n$. *J Math Anal Appl*, 2005, 311: 664–674
- Rudin W. *Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$* . New York: Springer-Verlag, 1980
- Zhang X J, Xiao J B. Weighted composition operators between μ -Bloch spaces on the unit ball. *Sci China Ser A*, 2005, 48: 1349–1368
- Chen H H, Gauthier P. Composition operators on μ -Bloch spaces. *Canad J Math*, 2009, 61: 50–75
- Zhang X J, Yi K Y, Xiao J B. Composition operators on μ -Bergman spaces in the unit ball. *Chin J Conte Math*, 2009, 30: 185–194
- Ren G B, Shi J H. Bergman type operator on mixed spaces with applications. *Chin Ann Math*, 1997, 18: 265–276

- 14 Zhou Z H, Chen R Y. Weighted composition operator from $F(p,q,s)$ to Bloch type spaces on the unit ball. *Int J Math*, 2008, 19: 899–926
- 15 Hu Z J. Extended Cesàro operators on mixed norm spaces. *Proc Amer Math Soc*, 2003, 131: 2171–2179
- 16 Lou Z J. Composition operators on Bloch type spaces. *Analysis*, 2003, 23: 81–95
- 17 Wulan H S. Compactness of the composition operators from the Bloch space B to Q_k spaces. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2005, 21: 1415–1424
- 18 Ouyang C H, Yang W S, Zhao R H. Characterizations of Bergman spaces and Bloch space in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. *Trans Amer Math Soc*, 1995, 347: 4301–4319
- 19 Shi J H, Luo L. Composition operators on the Bloch space of several complex variables. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2000, 16: 85–98

Atomic decomposition for μ -Bloch space in $\mathbb{C}^n$

ZHANG XueJun, LI Min, GUAN Ying & LI JunFeng

Abstract Let μ be a normal function on $[0, 1)$. In this paper, we discuss several problems on the normal weight Bloch type space $\beta_\mu(B)$ in the unit ball B . First, we give an integral representation for functions in $\beta_\mu(B)$. Second, we prove that $\beta_\mu(B)$ can be identified with the dual space of the normal weight Bergman type space $A_\nu^1(B)$. Finally, we give and prove the main result, i.e., every function in the μ -Bloch space $\beta_\mu(B)$ can be decomposed into a series of very nice functions (called atoms).

Keywords μ -Bloch space, integral representation, dual space, atomic decomposition

MSC(2010) 32A37

doi: 10.1360/012014-60