一类扰动超椭圆 Hamilton 系统的 Abel 积分零点个数上确界

孙宪波^{①*}, 吴奎霖^②

① 广西财经学院信息与统计学院应用数学系, 南宁 530003;

② 贵州大学理学院数学系, 贵阳 550025

E-mail: xianbo01@126.com, wukuilin@126.com

收稿日期: 2013-12-12; 接受日期: 2014-12-22; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11301105) 资助项目

摘要 本文研究 Abel 积分

$$\oint_{\Gamma_h} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)ydx$$

零点个数上确界, 其中 Γ_h 是超椭圆 Hamilton 量 $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{9}{2}x^2 + 5x^3 + \frac{7}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ 的闭代数曲线族. 根据 Abel 积分生成元的 Chebyshev 理论和 Abel 积分的渐进展开式, 结合多项式符号计算技术证明 3 是 Abel 积分零点个数的一個上界, 并且可以达到 3 个零点.

关键词 Abel 积分 超椭圆 Hamilton 系统 弱化 Hilbert 第十六问题

MSC (2010) 主题分类 34C07, 34C08, 37G15

1 引言

Arnold^[1] 在 1977 年首次提出了弱化 Hilbert 第十六问题: 设 $H(x, y)$ 是 $n+1$ 次多项式, $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 是至多 n 次多项式, 记 L_h 是含于 $H^{-1}(h)$ 的连续闭曲线族, h 为参数, 考虑如下形式的积分:

$$A_n(h) = \oint_{L_h} q(x, y)dx - p(x, y)dy, \quad h \in J, \quad (1.1)$$

对于给定的正整数 $n \geq 2$ 以及所有可能的闭曲线族 $\{L_h\}$, 求 Abel 积分 $I(h)$ 的孤立零点的最大个数 (包括重数). 弱化 Hilbert 第十六问题是一个难度非常大至今没有被解决的公开问题, 关于其研究进展和部分有效的研究方法见综述性文献 [2]. 弱化 Hilbert 第十六问题与 Hilbert 第十六问题紧密相关, 事实上, $A_n(h)$ 是多项式系统

$$\dot{x} = H_y + \varepsilon p(x, y), \quad \dot{y} = -H_x + \varepsilon q(x, y) \quad (1.2)$$

的 Poincaré 映射关于 ε 的一阶近似, 其中 ε 是正的充分小的参数. 学者们常对不同的系统 (1.2) 研究对应的 Abel 积分 $A_n(h)$.

英文引用格式: Sun X B, Wu K L. The sharp bound on the number of zeros of Abelian integral for a perturbation of hyper-elliptic Hamiltonian system (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 751–764, doi: 10.1360/012015-2

近 20 年来, 学者们关注更为简单形式的系统 (1.2):

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = g(x) + \varepsilon f(x)y, \quad (1.3)$$

即类型 (m, n) 的 Liénard 系统, 其中 $\deg g(x) = m, \deg f(x) = n$, 对应的 Hamilton 量是

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \int g(x)dx.$$

对满足 $m + n \leq 4$ 类型 (m, n) 的系统 (1.2) (除 $(1, 3)$ 型外), 文献 [3] 证明了其对应的 Abel 积分零点个数至多是 1. 对类型 $(3, 2)$, Dumortier 和 Li [4-7] 研究了 5 种不同情形的 Abel 积分零点个数并得到不同的上确界.

对于类型 $(4, 3)$, 根据未扰动系统 $(1.3)_{\varepsilon=0}$ 的拓扑结构, 存在 6 种只有一个周期环域的情形, 参见文献 [8, 9]. 对其中的 3 种情形的 Abel 积分

$$\oint_{L_h} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)ydx$$

零点个数的结果见表 1.

本文研究另一种情形的类型 $(4, 3)$ 的 Liénard 系统:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x(x+1)(x+3)^2 + \varepsilon(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3), \quad (1.4)$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$, a_0, a_1, a_2 和 a_3 是有界参数, 对应的 Hamilton 函数是

$$\tilde{H}(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{9}{2}x^2 + 5x^3 + \frac{7}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5. \quad (1.5)$$

$\tilde{H}(x, y)$ 定义的闭代数曲线族见图 1. 闭代数曲线 $\Gamma_h = \{\tilde{H}(x, y) = h, h \in (0, \frac{21}{20})\}$ 对应系统 $(1.4)_{\varepsilon=0}$ 的逆时针方向的闭轨线, $\tilde{H}(x, y) = \frac{21}{20}$ 定义了系统 $(1.4)_{\varepsilon=0}$ 通过双曲鞍点 $(-1, 0)$ 的同宿环, 记为 $\Gamma_{\frac{21}{20}}$. 幂零尖点 $(-3, 0)$ 在同宿环的左侧. 系统 (1.4) 对应的 Abel 积分是

$$I(h, \delta) = \oint_{\Gamma_h} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)ydx \equiv a_0I_0(h) + a_1I_1(h) + a_2I_2(h) + a_3I_3(h), \quad (1.6)$$

其中 $h \in (0, \frac{21}{20})$, $\delta = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, $I_i(h) = \oint_{\Gamma_h} x^i y dx, i = 0, 1, 2, 3$.

表 1 Abel 积分零点个数

未扰动系统	未扰系统周期环域 $\{L_h\}$ 外边界/内边界	Abel 积分零点个数 上界/下界	文献
$\dot{x} = y, \dot{y} = x(x-1)^3$	连接幂零鞍点的同宿环/初等中心	4/3	[10, 11]
$\dot{x} = y, \dot{y} = x^3(x-1)$	连接双曲鞍点的同宿环/幂零中心	5/3	[12]
$\dot{x} = y, \dot{y} = x(x+1)^2(x-\frac{2}{3})$	连接一个双曲鞍点和幂零尖点的异宿环/初等中心	4/3	[13]

图 1 $\tilde{H}(x, y)$ 定义的水平集

根据 Chebyshev 系统理论和 $I(h, \delta)$ 的渐进展开式, 结合多项式代数的符号计算得到如下主要结果:

定理 A 对任意不全为零的 a_0, a_1, a_2 和 $a_3, I(h, \delta)$ 至多有 3 个零点 (考虑零点重数), 并且存在 $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ 使得 $I(h, \delta)$ 有 3 个零点. 因此, 3 是上确界.

本文在第 2 节列出相关定义及引理; 第 3 节证明 $\{I_0(h), I_1(h), I_2(h), I_3(h)\}$ 构成一个 Chebyshev 系统, 因此, 3 是 $I(h, \delta)$ 零点个数的一個上界 (命题 3.1); 第 4 节证明存在 $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ 使得 $I(h, \delta)$ 确实有 3 个零点 (命题 4.1).

2 定义及引理

对一般的系统 (1.2), 得到 A_n 零点个数的较小上界和精确上界一般比较困难. 学者们针对不同特点的系统 (1.2) 提出了较为特殊有效的方法, 如几何方法^[4-7, 14, 15]、直接方法^[16-21]和辐角原理^[22]等, 参见综述性文献 [2]. 文献 [19] 发展了文献 [18] 中的 Abel 积分生成元的 Chebyshev 判定理论.

定义 2.1 假定 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ 是定义在开区间 J 上的解析函数,

(i) $\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)\}$ 称为 Chebyshev 系统, 如果任何线性组合

$$k_0 f_0(x) + k_1 f_1(x) + \dots + k_{n-1} f_{n-1}(x)$$

在 J 上至多有 $n-1$ 孤立零点;

(ii) 有序函数列 $\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)\}$ 称为一个 (扩充) 完全 Chebyshev 系统 (extended complete Chebyshev system, ECT-system), 如果对每个 $i = 1, 2, \dots, n$, 线性组合 $k_0 f_0(x) + k_1 f_1(x) + \dots + k_{i-1} f_{i-1}(x)$ 至多有 $i-1$ 零点 (考虑重数).

(iii) 有序函数列 $\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)\}$ 的 Wronski 行列式, 记为 $W[f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)]$, 是如下行列式:

$$W[f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)] = \det(f_i^j)_{0 \leq i, j \leq n-1} = \begin{vmatrix} f_0(x) & f_1(x) & \cdots & f_{n-1}(x) \\ f_0'(x) & f_1'(x) & \cdots & f_{n-1}'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(n-1)}(x) & f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

$f_i'(x)$ 和 $f_i^{(j)}(x)$ 分别是 $f_i(x)$ 的一阶导数和 j 阶导数.

考虑在平面某开子集上解析的如下形式 Hamilton 函数:

$$H(x, y) = A(x) + \frac{1}{2}y^2,$$

假定它在原点 $O(0, 0)$ 有局部最小值 $H(0, 0) = 0$, 环绕中心 $O(0, 0)$ 有一族顺时针方向的闭轨

$$\{L_h\} \subset \{(x, y) \mid H(x, y) = h, 0 < h < h_0\},$$

形成未扰系统的周期环. 每条周期轨与 x -轴有两个交点, 设区间 (x_l, x_r) 是周期轨族在 x -轴上的投影. 根据假设可知, $xA'(x) > 0$, $x \in (x_l, x_r) \setminus \{0\}$, 因此, $A(x)$ 定义了一个对合 $z(x)$ 满足 $A(x) = A(z(x))$, 当 $0 < x < x_r$ 时, $x_l < z(x) < 0$.

引理 2.1 ^[19] 在上述假定条件下, 考虑 Abel 积分

$$I_i(h) = \oint_{L_h} f_i(x) y^{2s-1} dx, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

其中 $h \in (0, h_0)$, L_h 是含于曲线族 $\{\frac{1}{2}y^2 + A(x) = h\}$ 的围绕 $(0, 0)$ 的闭代数曲线. 设 $f_i(x)$ 在 (x_l, x_r) 上解析, $i = 0, 1, \dots, n-1$, 且 $l_i(x) := \frac{f_i(x)}{A'(x)} - \frac{f_i(z(x))}{A'(z(x))}$, 则

(i) $\{l_0(x), l_1(x), \dots, l_{n-1}(x)\}$ 是 $(x_l, 0)$ 或 $(0, x_r)$ 上扩充完全 Chebyshev 系统当且仅当对每个 $i = 1, 2, \dots, n$, 在 $(x_l, 0)$ 或 $(0, x_r)$ 上 Wronski 行列式 $W[l_0, l_1, l_2, \dots, l_{i-1}](x) \neq 0$;

(ii) $\{I_0, I_1, \dots, I_{n-1}\}$ 在 $(0, h_0)$ 上是一个扩充完全 Chebyshev 系统, 如果 $s > n-2$ 且 $\{l_0(x), l_1(x), \dots, l_{n-1}(x)\}$ 在 $(x_l, 0)$ 或 $(0, x_r)$ 上是一个扩充完全 Chebyshev 系统.

在研究一些 Abel 积分时, y 的次数 s 不满足 $s > n-2$, 引理 2.1 并不能直接应用, 此时可以使用如下引理 2.2, 提高 $I_i(h)$ 中 y 的次数, 克服上述问题, 参见文献 [19, 引理 4.1].

引理 2.2 设 $F(x)$ 是关于 x 的一元函数, 并且满足 $\frac{F(x)}{A'(x)}$ 在 $x = 0$ 处解析. 对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 沿着 $A(x) + \frac{1}{2}y^2 = h$ 的每条闭轨线 L_h , 如下等式成立,

$$\oint_{L_h} F(x) y^{k-2} dx = \oint_{L_h} G(x) y^k dx,$$

其中

$$G(x) = \frac{1}{k} \left(\frac{F(x)}{A'(x)} \right)' (x).$$

上述理论可把研究 Abel 积分零点个数上界问题转换成一个代数问题, 即判定相关 Wronski 行列式在区间 $(x_l, 0)$ 或 $(0, x_r)$ 上是否存在根问题. 相关的数学机械化中的符号计算技术, 如正则链和多项式代数三角分解可使问题讨论严密化.

设 K 是一个数域, $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_n$ 是有序变量, $R = K[x_1, \dots, x_n]$ 定义在 K 上的多项式环. 多项式环 R 中的非常数多元多项式 f 的极大变元 x_n 称为主变元, 记为 $\text{mvar}(f)$, 多元多项式 f 可以看作关于主变元的一元多项式. 主变元的系数称为初式.

定义 2.2 多项式环 R 中非空函数列 $T = \{t_1, \dots, t_s\}$ 是一个三角系统, 如果 T 中的多项式不是常数且有不同的主变元.

多项式代数中的三角系统类似于三角形型线性系统, 可以通过从最后一个回代逐步求出其解. 不同的是, 多项式代数中的三角系统通过回代求解可能出现退化情形或无解, 如三角系统 $[yx - 1, y^2 - y]$, $y = 1$ 可得到 $x = 1$, 但 $y = 0$ 得不到变元 x 的值. 下面更为特殊的三角系统能够克服上述问题.

定义 2.3 ^[23] 设 $T = \{t_1, \dots, t_s\}$ 是一个满足 $\text{mvar}(t_1) \prec \dots \prec \text{mvar}(t_s)$ 的三角系统, u_i 是 t_i 的初式, u 是所有 u_i 的乘积, T 是一个正则链 (regular chains), 如果

$$\text{resultant}(u, T) = \text{resultant}(\dots \text{resultant}(u, t_s), \dots, t_i \dots) \neq 0,$$

其中每个 $\text{resultant}(\cdot, t_i)$ 是关于 t_i 的主变元计算的结式.

许多基于正则链的符号计算技术不断嵌入到符号计算系统 Maple 的软件包 RegularChains 中. 文献 [24] 提出了把多项式代数系统 S 化为一组正则链 $S_1, \dots, S_n$ (这个过程称为三角分解), 其算法已经嵌入到至少 Maple 13 的符号计算系统中, 以命令 Triangularize 实现.

引理 2.3 ^[24] 设 S 是有理数域上多项式环 K 中的一个代数系统, 则 S 可以三角分解为一列正则链 r 且 X 是 S 的零点当且仅当 X 是某个 S_i , $i = 0, 1, \dots, n$ 的零点.

因此, 可以通过对 S 三角分解, 然后计算所有正则链的零点, 得到所有 S 的零点. 由文献 [25] 知, 对无平方因子 (square-free) 且零维 (zero dimensional, 数域 K 上多项式环中的一个多项式系统称为零维的, 如果它在闭的代数域 $\bar{K}$ 有有限个零点) 的正则链 S_i , 可以由文献 [25] 的算法计算零点存在区间, 由 Maple 中命令 RealRootIsolate 实现. 基于上述多项式代数系统的理论, 以 Triangularize 和 RealRootIsolate 为主要命令可以构造出简单程序来计算多项式代数系统的零点存在区间, 参见文献 [26] 及其附录 A 详细解释.

计算 $A_n(h)$ 零点的一个有效办法是研究其在系统 $(1.2)_{\varepsilon=0}$ 周期环域 $\{L_h\}$ 端点附近的渐进展开式, 参见文献 [27, 28]. 设系统 $(1.2)_{\varepsilon=0}$ 周期环域 $\{L_h\}$ 的内边界是初等中心 $C(0, 0)$, 外边界是连接双曲鞍点 $S_1(x_1, y_1)$ 的同宿环 L_{h_s} , 满足 $H(C) = 0$, $H(x_1, y_1) = H(S_1) = h_s$.

引理 2.4 ^[29, 30] 在以上假定条件下 $A_n(h, \delta)$ 有如下渐进展开式:

(i) 若

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{i+j \geq 3} \tilde{h}_{ij} x^i y^j, \quad p(x, y) = \sum_{i+j \geq 0} \tilde{a}_{ij} x^i y^j, \quad q(x, y) = \sum_{i+j \geq 0} \tilde{b}_{ij} x^i y^j, \quad (2.1)$$

当 $0 < h \ll 1$ 时,

$$A_n(h, \delta) = \sum_{j \geq 0} b_j(\delta) h^{j+1}; \quad (2.2)$$

(ii) 若

$$\begin{aligned} H(x, y) &= h_s + \frac{\lambda}{2}(y - y_1)^2 - \frac{1}{2}(x - x_1)^2 + \sum_{i+j \geq 2} h_{ij}(x - x_1)^i (y - y_1)^j, \\ p(x, y) &= \sum_{i+j \geq 0} a_{ij}(x - x_1)^i (y - y_1)^j, \quad q(x, y) = \sum_{i+j \geq 0} b_{ij}(x - x_1)^i (y - y_1)^j, \end{aligned} \quad (2.3)$$

当 $0 < -(h - h_s) \ll 1$ 时,

$$A_n(h, \delta) = c_0(\delta) + c_1(\delta)(h - h_s) \ln |h - h_s| + c_2(\delta)(h - h_s) + c_3(\delta)(h - h_s)^2 \ln |h - h_s| + O(|h - h_s|^2), \quad (2.4)$$

其中 $b_j(\delta)$ 可以由文献 [30] 的方法得到,

$$\begin{aligned} c_0(\delta) &= \oint_{L_{h_s}} q(x, y) dx - p(x, y) dy, \quad c_1(\delta) = -\frac{1}{|\lambda|} (p_x(x, y) + q_y(x, y))(x_1, y_1), \\ c_2(\delta) &= \oint_{L_{h_s}} (p_x(x, y) + q_y(x, y)) dt, \quad c_1(\delta) = 0, \\ c_3(\delta) &= \frac{-1}{2|\lambda|\lambda} \left\{ (-3a_{30} - b_{21} + a_{12} + 3b_{03}) - \frac{1}{\lambda} [(2b_{02} + a_{11})(3h_{03} - h_{21}) \right. \\ &\quad \left. + (2a_{20} + b_{11})(3h_{30} - h_{12})] \right\} + \bar{b}c_1(\delta), \end{aligned}$$

b 和 $\bar{b}$ 是确定的常数.

引理 2.5 若 (2.2) 和 (2.4) 满足如下条件:

$$\text{rank} \frac{\partial(c_0, c_1, \dots, c_{m-1}, b_0, b_1, \dots, b_{k-1})}{\partial \delta}(\delta_0) = m + k, \quad (2.5)$$

且存在 $\delta_0 \in \mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) 以及正整数 m 和 k , 使得

$$c_0(\delta_0) = c_1(\delta_0) = \dots = c_{m-1}(\delta_0) = b_0(\delta_0) = b_1(\delta_0) = \dots = b_{k-1}(\delta_0) = 0,$$

$$c_m(\delta_0) \neq 0, \quad b_k(\delta_0) \neq 0. \quad (2.6)$$

则存在 δ_0 附近的参数 δ 使得 $A_n(h, \delta)$ 至少存在 $m + k + \frac{1 - \operatorname{sgn}(A_n(h_1, \delta_0)A_n(h_2, \delta_0))}{2}$ 个零点, 其中 $h_1 = h_s - \varepsilon_0$, $h_2 = 0 + \varepsilon_0$, ε_0 是充分小的正参数. m 个零点在 $h = h_s$ 附近, k 个零点在 $h = 0$ 附近.

注 2.1 引理 2.5 是文献 [31, 定理 3.1] 的不同叙述, 我们给出较为清晰的证明.

证明 取 $m = 3$ 的情形证明, 其他情形类似. 由 (2.2)、(2.4) 和 (2.6) 得

$$\begin{aligned} A_n(h, \delta_0) &= b_k(\delta_0)h^{k+1} + O(h^{k+1}), \quad 0 < h \ll 1, \\ A_n(h, \delta_0) &= c_3(\delta_0)(h - h_s)^2 \ln |h - h_s| + O((h - h_s)^2 \ln |h - h_s|), \quad 0 < -(h - h_s) \ll 1. \end{aligned}$$

取 ε_0 为充分小的正参数, $h_1 = h_s - \varepsilon_0$ 及 $h_2 = 0 + \varepsilon_0$ 满足 $0 < -(h_1 - h_s) \ll 1$ 和 $0 < h_2 \ll 1$, 不难发现, $A_n(h, \delta_0)$ 在 (h_2, h_1) 中 (至少) 有 $\frac{1 - \operatorname{sgn}(A_n(h_1, \delta_0)A_n(h_2, \delta_0))}{2}$ 个零点, 记为 h_0^* .

由 (2.5) 及隐函数定理, $c_0, c_1, c_2, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$ 可以看成自由参数. 依次取 $c_2, c_1, c_0, b_{k-1}, b_{k-2}, \dots, b_1, b_0$ 满足如下条件:

$$\begin{aligned} |c_0| \ll |c_1| \ll |c_2| \ll |c_3(\delta_0)|, \quad c_3(\delta_0)c_2 < 0, \quad c_2c_1 > 0, \quad c_1c_0 < 0, \\ |b_0| \ll |b_1| \ll \dots \ll |b_{k-1}| \ll |b_k(\delta_0)|, \quad b_k(\delta_0)b_{k-1} < 0, \quad b_{j-1}b_j < 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, \end{aligned} \quad (2.7)$$

则依次得到 $A_n(h, \delta)$ 在 (h_1, h_s) 中的 3 个零点, 在 $(0, h_2)$ 中的 k 个零点.

取 $U(\delta_0) = \{\delta \mid (2.7) \text{ 成立}\}$, 它是 δ_0 的半径为 ϵ 的邻域. 取 $\delta \in U(\delta_0)$, 则 $A_n(h, \delta) = A_n(h, \delta_0) + O(\epsilon)$. 因此,

$$\frac{1 - \operatorname{sgn}(A_n(h_1, \delta)A_n(h_2, \delta))}{2} = \frac{1 - \operatorname{sgn}(A_n(h_1, \delta_0)A_n(h_2, \delta_0))}{2}.$$

所以, $A_n(h, \delta)$ 在 h_0^* 附近有 $\frac{1 - \operatorname{sgn}(A_n(h_1, \delta_0)A_n(h_2, \delta_0))}{2}$ 个零点. 因此, 存在 $\delta \in U(\delta_0)$ 使得 $A_n(h, \delta)$ 有 $3 + k + \frac{1 - \operatorname{sgn}(A_n(h_1, \delta_0)A_n(h_2, \delta_0))}{2}$ 个零点.

3 $I(h, \delta)$ 的零点个数上界

本节利用引理 2.1 和 2.2 以及多项式符号计算技术证明 (1.6) 中 Abel 积分 $I(h, \delta)$ 的生成元

$$I_i(h) = \int_{\Gamma_h} x^i y dx, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

在 $(0, \frac{21}{20})$ 上构成一个 Chebyshev 系统. 考虑系统 (1.4) 的 Abel 积分, 对应于引理 2.1,

$$A(x) = \tilde{H}(x, 0) = \frac{9}{2}x^2 + 5x^3 + \frac{7}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5, \quad s = 1, \quad n = 4.$$

闭代数曲线 $\{\Gamma_h\}$ 在 x -轴上的投影是 $(-1, x_r)$, 其中

$$x_r = \frac{(195 + 40\sqrt{14})^{\frac{2}{3}} - 9(195 + 40\sqrt{14})^{\frac{1}{3}} + 25}{4(195 + 40\sqrt{14})^{\frac{1}{3}}} \approx 0.3942452325.$$

显然, 当 $x \in (-1, x_r) \setminus \{0\}$ 时, $xA'(x) > 0$. $A(x)$ 在 $(-1, x_r)$ 上定义了一个解析对合 $z(x)$ 满足 $A(x) = A(z)$ 和 $A(-1) = A(x_r)$. 由 $A(x) = A(z)$ 得 $-\frac{1}{20}(x - z)q(x, z)$, 其中,

$$q(x, z) = 4x^4 + 35x^3 + 4zx^3 + 100x^2 + 35zx^2 + 4z^2x^2 + 90x + 100zx + 35z^2x + 4xz^3 + 90z + 100z^2 + 35z^3 + 4z^4.$$

事实上, $q(x, z) = 0$ 是定义解析对合 $z(x)$ 的隐式.

引理 3.1 对 $i = 0, 1, 2, 3$,

$$4h^2 I_i(h) = \int_{\Gamma_h} f_i(x) y^5 dx \equiv \tilde{I}_i(h),$$

其中

$$f_i(x) = \frac{x^i \tilde{f}_i(x)}{1500(x+3)^6(x+1)^4},$$

而

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(x) = & 1749600 + 729000i + 9606600x + 19091100x^5 + 31080555x^4 + 33818280x^3 + 23608800x^2 \\ & + 2072449ix^6 + 5421155ix^5 + 9600440ix^4 + 11356140ix^3 + 8593200ix^2 + 3766500ix \\ & + 7931487x^6 + 2202402x^7 + 1836x^{10} + 40392x^9 + 391788x^8 + 72900i^2 + 129474i^2x^6 \\ & + 369360i^2x^5 + 714205i^2x^4 + 921480i^2x^3 + 756900i^2x^2 + 356400i^2x + 30464i^2x^7 \\ & + 352ix^{10} + 8332ix^9 + 87215ix^8 + 408x^9i^2 + 4617x^8i^2 + 16x^{10}i^2 + 530529ix^7. \end{aligned}$$

证明 因为在每条闭代数曲线 $\Gamma_h \subseteq \{\tilde{H}(x, y) = h\}$ 上 $\frac{2A(x)+y^2}{2h} = 1$, 所以,

$$I_i(h) = \frac{1}{2h} \int_{\Gamma_h} (2A(x) + y^2) x^i y dx = \frac{1}{2h} \int_{\Gamma_h} 2x^i A(x) y dx + \frac{1}{2h} \int_{\Gamma_h} x^i y^3 dx, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

由引理 2.2 得

$$\int_{\Gamma_h} 2x^{2i} A(x) y dx = \int_{\Gamma_h} G_i(x) y^3 dx, \quad (3.2)$$

其中

$$G_i(x) = \frac{x^i g_i(x)}{30(x+3)^3(x+1)^2},$$

而

$$g_i(x) = 4ix^5 + 4x^5 + 44x^4 + 51ix^4 + 252ix^3 + 193x^3 + 595ix^2 + 435x^2 + 660ix + 510x + 270 + 270i.$$

把 (3.2) 代入 (3.1) 得

$$\begin{aligned} I_i(h) &= \frac{1}{2h} \int_{\Gamma_h} (x^i + G_i(x)) y^3 dx = \frac{1}{4h^2} \int_{\Gamma_h} (2A(x) + y^2) (x^i + G_i(x)) y^3 dx \\ &= \frac{1}{4h^2} \int_{\Gamma_h} (2A(x) (x^i + G_i(x)) y^3 dx + \frac{1}{4h^2} \int_{\Gamma_h} (x^i + G_i(x)) y^5 dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

应用引理 2.2 得

$$\int_{\Gamma_h} 2A(x) (x^i + G_i(x)) y^3 dx = \int_{\Gamma_h} \tilde{G}_i(x) y^5 dx \equiv \tilde{I}_i(h), \quad (3.4)$$

其中

$$\tilde{G}_i(x) = \frac{d}{5dx} \left(\frac{2A(x)(x^i + G_i(x))}{A'(x)} \right) = \frac{x^i \tilde{g}_i(x)}{1500(x+3)^6(x+1)^4},$$

而

$$\tilde{g}_i(x) = 291600 + 1263600x + 886899ix^6 + 2330205ix^5 + 4166990ix^4 + 5015190ix^3 + 3901950ix^2$$

$$\begin{aligned}
 &+ 1782000ix + 621637x^6 + 167302x^7 + 136x^{10} + 2992x^9 + 29238x^8 + 129474i^2x^6 \\
 &+ 369360i^2x^5 + 714205i^2x^4 + 921480i^2x^3 + 756900i^2x^2 + 356400i^2x + 30464i^2x^7 \\
 &+ 72900i^2 + 152ix^{10} + 3582ix^9 + 37365ix^8 + 408x^9i^2 + 4617x^8i^2 + 16x^{10}i^2 \\
 &+ 226879ix^7 + 364500i + 1570500x^5 + 2741505x^4 + 3283980x^3 + 2609550x^2.
 \end{aligned}$$

把 (3.4) 代入 (3.3) 得到

$$I_i(h) = \frac{1}{4h^2} \int_{\Gamma_h} (x^i + G_i(x) + \tilde{G}_i(x)) y^5 dx \equiv \frac{1}{4h^2} \int_{\Gamma_h} f_i(x) y^5 dx.$$

引理 3.1 证毕. $\square$

由引理 3.1 知, $\{I_0, I_1, I_2, I_3\}$ 是 $(0, \frac{21}{20})$ 上的 Chebyshev 系统当且仅当 $\{\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_0, \tilde{I}_3\}$ 也是 $(0, \frac{21}{20})$ 上的 Chebyshev 系统. 对 $\{\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_0, \tilde{I}_3\}$ 应用引理 2.1, 这种情形 $s = 3, n = 4$, 所以, $s > n - 2$ 成立. 由引理 2.1, 取

$$l_i(x) = \left(\frac{f_i}{A'}\right)(x) - \left(\frac{f_i}{A'}\right)(z(x)), \quad 0 < x < 1, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (3.5)$$

其中 $z(x)$ 是 $q(x, z) = 0$ 定义的解析对合, 因此,

$$\frac{d}{dx} l_i(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{f_i}{A'}\right)(x) - \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{f_i}{A'}\right)(z)\right] \frac{dz}{dx}, \quad (3.6)$$

其中

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial q(x, z)/\partial x}{\partial q(x, z)/\partial z}.$$

限制 $x \in (-1, 0)$, 此时,

$$-1 < x < 0 < z < x_r. \quad (3.7)$$

引理 3.2 $\{l_1(x), l_2(x), l_0(x), l_3(x)\}$ 在 $(-1, 0)$ 上是扩充完全 Chebyshev 系统.

证明 考虑到 (3.6), 结合符号计算系统 Maple 16 直接计算判断函数的 4 个 Wronski 行列式得

$$\begin{aligned}
 W[l_1] &= -\frac{(x-z)w_1(x, z)}{1500(x+3)^8(x+1)^5(z+3)^8(z+1)^5}, \\
 W[l_1, l_2] &= -\frac{(x-z)^3w_2(x, z)}{375000(z+1)^9(z+3)^{16}(x+1)^9(x+3)^{16}p(x, z)}, \\
 W[l_1, l_2, l_0] &= \frac{(x-z)^6w_3(x, z)}{93750000x^3(x+3)^{23}(x+1)^{12}z^3(z+3)^{23}(z+1)^{12}p^3(x, z)}, \\
 W[l_1, l_2, l_0, l_3] &= \frac{(x-z)^{10}w_4(x, z)}{3906250000x^4(x+3)^{30}(x+1)^{15}z^4(z+3)^{30}(z+1)^{15}p^6(x, z)},
 \end{aligned}$$

其中

$$p(x, z) = 4x^3 + 35x^2 + 8x^2z + 100x + 70xz + 12xz^2 + 90 + 200z + 105z^2 + 16z^3,$$

$w_1(x, z)$, $w_2(x, z)$, $w_3(x, z)$ 和 $w_4(x, z)$ 是次数分别为 22, 44, 67 和 90 的二元多项式. 计算 $p(x, z)$ 和 $q(x, z)$ 关于 z 的结式得

$$\begin{aligned}
 R(p, q, z) &= 2048000x^{12} + 43008000x^{11} + 381696000x^{10} + 1840000000x^9 + 5124744000x^8 \\
 &+ 7995024000x^7 + 6005864000x^6 + 1499808000x^5 + 1126920000x^4 + 997392000x^3
 \end{aligned}$$

$$-795240000x^2 + 302400000x - 136080000.$$

由 Sturm 定理得, 在 $(-1, 0)$ 上 $R(p, q, z) \neq 0$, 即 $q(x, z)$ 和 $p(x, z)$ 没有满足 (3.7) 的公共根, 所以,

$$p(x, z) \neq 0, \quad x \in (-1, x_r).$$

因此, 研究 4 个 Wronski 行列式是否有零点只需研究每个 $w_i(x, z)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 是否有零点. 因为 z 满足 $q(x, z) = 0$, 所以只需研究 $w_i(x, z)$ 和 $q(x, z)$ 是否有满足条件 (3.7) 的公共根.

(i) 计算 $q(x, z)$ 和 $w_1(x, z)$ 关于 z 的结式得 $R(q, w_1, z) = (x+1)^4(x+3)^{14}r_1(x)$, 其中 $r_1(x)$ 是次数为 70 的项数较多的多项式. 由 Sturm 定理, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $r_1(x) \neq 0$. 因此, $w_1(x, z)$ 和 $q(x, z)$ 没有满足条件 (3.7) 的公共根. 所以, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $W[l_1] \neq 0$.

(ii) 为研究 $q(x, z)$ 和 $w_2(x, z)$ 是否有满足条件 (3.7) 的公共根, 把 $q(x, z)$ 和 $w_2(x, z)$ 代入文献 [26] 附录 A 中的程序中:

```
> with(RegularChains):
> with(ChainTools):
> with(SemiAlgebraicSetTools):
> sys := [w_2(x, z), q(x, z)]:
> R := PolynomialRing([x, z]):
> dec := Triangularize(sys, R);
[regular_chain, regular_chain, regular_chain]
> L := map(Equations, dec, R);
```

$$[[p_1^r(x, z), p_2^r(z)], [z+3, x+3], [z+1, x+1]],$$

其中 $p_1^r(x, z) = p_{11}(z)x + p_{12}(z)$, $p_{11}(z)$ 是次数为 116 的多项式, $p_{12}(z)$ 是次数为 117 的多项式, $p_2^r(z)$ 是次数为 142 的多项式. 在 Maple 程序中, $L[i][j]$ 表示第 i 个正则链的第 j 个多项式 (如 $L[1][1]$ 和 $L[1][2]$ 分别表示 $p_1^r(x, z)$ 和 $p_2^r(z)$). 正则链 $[z+3, x+3]$ 和正则链 $[z+1, x+1]$ 显然没有满足 (3.7) 的零点. 正则链 $[p_1^r(x, z), p_2^r(z)]$ 无平方因子且零维 (变量个数等于方程个数, 有有限个零点), 调整 $[p_1^r(x, z), p_2^r(z)]$ 中多项式顺序后实根隔离:

```
> C := Chain([L[1][2], L[1][1]], Empty(R), R);
regular_chain
> RL := RealRootIsolate(C, R, 'abserr' = 1/10^5);
[box, box, box, box, box, box]
> map(BoxValues, RL, R);
```

$$\begin{aligned} [x = [-\frac{173253}{131072}, -\frac{43313}{32768}], z = [-\frac{209527427486803270341881267}{309485009821345068724781056}, -\frac{104763713743401635170940633}{154742504910672534362390528}]], \\ [x = [-\frac{49423}{131072}, \frac{3089}{8192}], \\ z = [-\frac{58979335350785471902544891490991965576390236293583083}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568}, \\ -\frac{235917341403141887610179565963967862305560945174332331}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272}]], \\ [x = [-\frac{88739}{131072}, -\frac{44369}{65536}], \\ z = [-\frac{120739096781654008103785666698519087638762173911}{91343852333181432387730302044767688728495783936}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{241478193563308016207571333397038175277524347821}{182687704666362864775460604089535377456991567872} \Big], \\
 [x = & \left[\frac{1993}{65536}, \frac{3987}{131072} \right], \\
 z = & \left[-\frac{44222871848335310310430279559222473272686580030756629349}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816}, \right. \\
 & \left. -\frac{11055717962083827577607569889805618318171645007689157337}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704} \right], \\
 [x = & \left[-\frac{80711}{65536}, -\frac{161421}{131072} \right], z = \left[\frac{101219555}{268435456}, \frac{25304889}{67108864} \right], \\
 [x = & \left[-\frac{236395}{131072}, -\frac{118197}{65536} \right], z = \left[\frac{255133}{8388608}, \frac{127567}{4194304} \right].
 \end{aligned}$$

上述 6 个区间对是 $q(x, z)$ 和 $w_2(x, z)$ 在整个 x - z 平面上所有公共根存在的区间. 不难知道, $q(x, z)$ 和 $w_2(x, z)$ 没有满足条件 (3.7) 的公共根. 所以, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $w_2(x, z) \neq 0$. 因此,

$$W[l_1, l_2] \neq 0, \quad x \in (-1, 0).$$

(iii) 把 $w_3(x, z)$ 和 $q(x, z)$ 代入上述算法程序, 三角分解得到正则链:

$$[[p_3^r(x, z), p_4^r(z)], [z + 3, x + 3], [z + 1, x + 1]],$$

其中 $p_3^r(x, z) = p_{31}(z)x + p_{32}(z)$, p_{31} , p_{32} 和 p_4^r 是次数为 179, 180 和 222 的多项式. 实根隔离得到 $q(x, z)$ 和 $w_3(x, z)$ 在整个 x - z 平面上所有公共根存在的 8 个区间对:

$$\begin{aligned}
 [x = & \left[-\frac{36757}{32768}, -\frac{147027}{131072} \right], \\
 z = & \left[-\frac{153012395372630399766672954809800794223881}{174224571863520493293247799005065324265472}, -\frac{612049581490521599066691819239203176895523}{696898287454081973172991196020261297061888} \right], \\
 [x = & \left[\frac{103347}{262144}, \frac{206699}{524288} \right], \\
 z = & \left[-\frac{7254110217899824183896454307739765092613237445594149218553538844920433086937}{7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496}, \right. \\
 & \left. -\frac{29016440871599296735585817230959060370452949782376596874214155379681732347747}{28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984} \right], \\
 [x = & \left[-\frac{57557}{65536}, -\frac{115113}{131072} \right], \\
 z = & \left[-\frac{85952288888244858036351618288877244072010126564647045}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088}, \right. \\
 & \left. -\frac{171904577776489716072703236577754488144020253129294089}{153249554086588858358347027150309183618739122183602176} \right], \\
 [x = & \left[\frac{2167}{8192}, \frac{34673}{131072} \right], \\
 z = & \left[-\frac{361292232427080091626861930449131188768855634709014796850815246593877581765}{226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328}, \right. \\
 & \left. -\frac{722584464854160183253723860898262377537711269418029593701630493187755163529}{452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656} \right], \\
 [x = & \left[\frac{2671}{131072}, \frac{167}{8192} \right], \\
 z = & \left[-\frac{104485074435856417847833264266822664226845808403967624452012327484370232346359}{57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968}, \right. \\
 & \left. -\frac{208970148871712835695666528533645328453691616807935248904024654968740464692717}{115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936} \right], \\
 [x = & \left[-\frac{65691}{65536}, -\frac{131381}{131072} \right], z = \left[\frac{27092204845}{68719476736}, \frac{54184409691}{137438953472} \right], \\
 [x = & \left[-\frac{13087}{8192}, -\frac{209391}{131072} \right], z = \left[\frac{71010079}{268435456}, \frac{568080633}{2147483648} \right], \\
 [x = & \left[-\frac{118273}{65536}, -\frac{236545}{131072} \right], z = \left[\frac{1367811}{67108864}, \frac{2735623}{134217728} \right],
 \end{aligned}$$

不难得到 $w_3(x, z)$ 和 $q(x, z)$ 不存在满足条件 (3.7) 的公共根. 因此,

$$W[l_1, l_2, l_0] \neq 0, \quad x \in (-1, 0).$$

(v) 把 $w_4(x, z)$ 和 $q(x, z)$ 代入上述算法程序, 三角分解得到正则链:

$$[[p_5^r(x, z), p_6^r(z)], [z + 3, x + 3], [z + 1, x + 1]],$$

$p_5^r(x, z) = p_{51}(z)x + p_{52}(z)$, p_{51} , p_{52} 和 p_6^r 分别是次数为 242, 242 和 302 的多项式. 实根隔离得到 $w_4(x, z)$ 和 $q(x, z)$ 的所有公共根存在的 6 个区间对:

$$\begin{aligned} [x = [-\frac{234653}{131072}, -\frac{58663}{32768}], z = [-\frac{379857637}{4294967296}, -\frac{3038861095}{34359738368}]], \\ [x = [-\frac{188077}{131072}, -\frac{47019}{32768}], z = [-\frac{44433638421780070442843907357}{79228162514264337593543950336}, -\frac{88867276843560140885687814713}{158456325028528675187087900672}]], \\ [x = [\frac{6381}{16384}, \frac{51049}{131072}], \\ z = [-\frac{69793608120712563521063490085044178810852988031637499987120166315745009961669969377657}{62165404551223330269422781018352605012557018849668464680057997111644937126566671941632}, \\ -\frac{139587216241425127042126980170088357621705976063274999974240332631490019923339938755313}{124330809102446660538845562036705210025114037699336929360115994223289874253133343883264}]], \\ [x = [-\frac{36755}{65536}, -\frac{73509}{131072}], \\ z = [-\frac{85069391959718447209861937542393711472558447220875765834659983574578852372396207}{59285549689505892056868344324448208820874232148807968788202283012051522375647232}, \\ -\frac{42534695979859223604930968771196855736279223610437882917329991787289426186198103}{29642774844752946028434172162224104410437116074403984394101141506025761187823616}]], \\ [x = [-\frac{11593}{131072}, -\frac{1449}{16384}], \\ z = [-\frac{489468416351020936679263245385940834630732178036759608567431919812759056228105039451463233035364839}{273406340597876490546562778389702670669146178861651554553221325801244124899921990402939147127881728}, \\ -\frac{244734208175510468339631622692970417315366089018379804283715959906379528114052519725731616517682419}{136703170298938245273281389194851335334573089430825777276610662900622062449960995201469573563940864}]], \\ [x = [-\frac{36789}{32768}, -\frac{147155}{131072}], z = [\frac{428229203015}{1099511627776}, \frac{53528650377}{137438953472}]]. \end{aligned}$$

不难发现 $w_4(x, z)$ 和 $q(x, z)$ 不存在满足条件 (3.7) 的公共根. 因此,

$$W[l_1, l_2, l_0, l_3] \neq 0, \quad x \in (-1, 0).$$

根据引理 2.1(i), 引理 3.2 结论成立. 证毕. $\square$

根据引理 3.2 和引理 2.1(ii), 不难得下面的命题:

命题 3.1 $\{\tilde{I}_1(h), \tilde{I}_2(h), \tilde{I}_0(h), \tilde{I}_3(h)\}$ 在 $(0, \frac{21}{20})$ 上是一个扩充完全 Chebyshev 系统. 因此, $I(h, \delta)$ 在 $(0, \frac{21}{20})$ 上至多有 3 个零点.

4 $I(h, \delta)$ 的 3 个根

由引理 2.4(i), $I(h, \delta)$ 在 $h = 0$ 附近有如下展式:

$$I(h, \delta) = b_0(\delta)h + b_1(\delta)h^2 + b_2(\delta)h^3 + b_3(\delta)h^4 + O(h^5).$$

取尺度变换 $x = \frac{1}{3}u$, $y = v$ 和时间变换 $t = 3t$, 系统 (1.4) 变为

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = -\frac{1}{243}u(u+3)(u+9)^2 + \varepsilon \left(\frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{9}u + \frac{a_2}{27}u^2 + \frac{a_3}{81}u^3 \right)v, \quad (4.1)$$

其 Hamilton 函数变为 (2.1) 的形式, 而 Abel 积分 $I(h, \delta)$ 保持不变. 对系统 (4.1) 应用文献 [30] 的符号计算方法得

$$b_0(\delta) = \frac{2}{3}\pi a_0, \quad b_1(\delta) = \frac{187}{2916}\pi a_0 - \frac{5}{81}\pi a_1 + \frac{1}{27}\pi a_2,$$

$$\begin{aligned} b_2(\delta) &= \frac{377545}{17006112}\pi a_0 - \frac{5183}{236196}\pi a_1 + \frac{1435}{78732}\pi a_2 - \frac{25}{2187}\pi a_3, \\ b_3(\delta) &= \frac{10782879359}{991796451840}\pi a_0 - \frac{19859357}{1836660096}\pi a_1 + \frac{5924905}{612220032}\pi a_2 - \frac{63931}{8503056}\pi a_3. \end{aligned}$$

取尺度变换 $x = \frac{1}{2}u - 1$, $y = v$ 和时间变换 $x = 2t$, 系统 (1.4) 变为

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = -\frac{1}{32}u(u-2)(u+4)^2 + \varepsilon \frac{1}{2} \left(a_0 + a_1 \left(\frac{1}{2}u - 1 \right) + a_2 \left(\frac{1}{2}u - 1 \right)^2 + a_3 \left(\frac{1}{2}u - 1 \right)^3 \right) v, \quad (4.2)$$

其 Hamilton 函数变为 (2.3) 的形式, 而 Abel 积分 $I(h, \delta)$ 没有改变. 对系统 (4.2) 应用引理 2.4(ii) 得, 当 $0 < -(h - \frac{21}{20}) \ll 1$ 时,

$$I(h, \delta) = c_0(\delta) + c_1(\delta) \left(h - \frac{21}{20} \right) \ln \left| h - \frac{21}{20} \right| + c_2(\delta) \left(h - \frac{21}{20} \right) + c_3(\delta) \left(h - \frac{21}{20} \right)^2 \ln \left| h - \frac{21}{20} \right| + \text{h.o.t.}$$

其系数

$$c_0 = \sum_{i=0}^3 \lambda_i a_i, \quad c_1 = \frac{1}{2}(-a_0 + a_1 - a_2 + a_3), \quad c_3 = \frac{a_2}{16} - \frac{3a_3}{16},$$

当 $c_1(\delta) = 0$ 时,

$$c_2 = \sum_{i=1}^3 \eta_i a_i,$$

其中

$$\lambda_i = 2 \int_{-1}^{x_r} x^i y dx, \quad \eta_i = 2 \int_{-1}^{x_r} \frac{x^i + 1}{y} dx.$$

不难得到 $\det \frac{\partial(b_0, b_1, b_2)}{\partial(a_0, a_1, a_2)} \neq 0$. 解方程 $b_0 = b_1 = b_2 = 0$ 得 $\{a_0 = 0, a_1 = \frac{225}{166}a_3, a_2 = \frac{375}{166}a_3\}$. 取 $\delta_0 = \{0, \frac{225}{166}a_3, \frac{375}{166}a_3, a_3\}$, 代入展式中首个非零系数得到

$$b_3(\delta_0) = -\frac{3059}{9802134}\pi a_3, \quad c_0(\delta_0) = \frac{225\lambda_1 + 375\lambda_2 + 166\lambda_3}{166}a_3 \approx -0.0100823301a_3.$$

所以,

$$\frac{1 - \operatorname{sgn}(I(h_1, \delta_0)I(h_2, \delta_0))}{2} = \frac{1 - \operatorname{sgn}(b_3(\delta_0)c_0(\delta_0))}{2} = 0.$$

由引理 2.5 知, $I(h, \delta)$ 在 $h = 0$ 附近有 3 个零点.

命题 4.1 存在 $\delta \in \mathbb{R}^4$ 使得 $I(h, \delta)$ 在 $(0, \frac{21}{20})$ 上有 3 个零点.

注 4.1 类似于上述讨论, 应用引理 2.5 可以得到 $I(h, \delta)$ 在 $h = \frac{21}{20}$ 附近有 3 个零点. 事实上, 固定 $a_3 = 1$, 任取 $h_1^*, h_2^*, h_3^* \in (0, \frac{21}{20})$, 取方程组

$$\begin{cases} a_0 I_0(h_1^*) + a_1 I_1(h_1^*) + a_2 I_2(h_1^*) = -I_3(h_1^*), \\ a_0 I_0(h_2^*) + a_1 I_1(h_2^*) + a_2 I_2(h_2^*) = -I_3(h_2^*), \\ a_0 I_0(h_3^*) + a_1 I_1(h_3^*) + a_2 I_2(h_3^*) = -I_3(h_3^*). \end{cases} \quad (4.3)$$

根据引理 3.2 的证明, $\{I_1, I_2, I_0\}$ 在 $(0, \frac{21}{20})$ 上也是完全 Chebyshev 系统, 所以, 根据文献 [19, 定理 B 和引理 2.3] 知, $\{I_1, I_2, I_0\}$ 的所有离散 Wronski 行列式不等于 0, 而方程组 (4.3) 左端系数行列式是 $\{I_1, I_2, I_0\}$ 在 $\{h_1^*, h_2^*, h_3^*\}$ 处的离散 Wronski 行列式 (不为 0), 所以, 方程组 (4.3) 必有唯一的解 $\{a_0^*, a_1^*, a_2^*\}$. 取 $\delta^* = (a_0^*, a_1^*, a_2^*, 1)$, 即 $I(h, \delta^*)$ 有 3 个根 h_1^*, h_2^* 和 h_3^* . 根据命题 3.1 知, $I(h, \delta)$ 的 3 个根必是单根.

致谢 作者诚挚感谢评审专家对初稿评审付出的时间和精力以及提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Arnold V I. Arnold's problems. In: Fakis, Moscow 2000. English Transl. Berlin: Springer-Verlag, 2004
- 2 Li C. Abelian integrals and limit cycles. *Qual Theory Dyn Syst*, 2012, 11: 111–128
- 3 Christopher C, Lloyd N. Small-amplitude limit cycles in Liénard systems. *Nonlinear Differential Equations Appl*, 1996, 3: 183–190
- 4 Dumortier F, Li C. Perturbations from an elliptic Hamiltonian of degree four, I: Saddle loop and two saddle cycle. *J Differential Equations*, 2001, 176: 114–157
- 5 Dumortier F, Li C. Perturbations from an elliptic Hamiltonian of degree four, II: Cuspidal loop. *J Differential Equations*, 2001, 175: 209–243
- 6 Dumortier F, Li C. Perturbations from an elliptic Hamiltonian of degree four, III: Global centre. *J Differential Equations*, 2003, 188: 473–511
- 7 Dumortier F, Li C. Perturbations from an elliptic Hamiltonian of degree four, IV: Figure eight-loop. *J Differential Equations*, 2003, 188: 512–514
- 8 Xiao D. Bifurcations on a five-parameter family of planar vector field. *J Dynam Differential Equations*, 2008, 20: 961–980
- 9 Yang J, Han M. Limit cycle bifurcations of some Liénard systems with a cuspidal loop and a homoclinic loop. *Chaos Solitons Fractals*, 2011, 44: 269–289
- 10 Wang J, Xiao D. On the number of limit cycles in small perturbations of a class of hyper-elliptic Hamiltonian systems with one nilpotent saddle. *J Differential Equations*, 2011, 250: 2227–2243
- 11 Wang J. Perturbations of several planar integral system with denenerate singularity. PhD Thesis. Shanghai: Shanghai Jiao Tong Univesity, 2012
- 12 Sun X, Su J, Han M. On the number of zeros of Abelian integral for some Liénard system of type (4,3). *Chaos Solitons Fractals*, 2013, 51: 1–12
- 13 Atabaigi A, Zangeneh R Z H. Bifurcation of limit cycles in small perturbations of a class of hyper-elliptic Hamiltonian systems of degree 5 with a cusp. *J Appl Anal Comput*, 2011, 1: 299–313
- 14 Liang H, Wu K, Zhao Y. Quadratic perturbations of a class of quadratic reversible center of genus one. *Sci China Math*, 2013, 56: 577–596
- 15 Liu C. The cyclicity of period annuli of a class of quadratic reversible systems with two centers. *J Differential Equations*, 2012, 252: 5260–5273
- 16 Liu C, Xiao D. The monotonicity of the ratio of two Abelian integrals. *Trans Amer Math Soc*, 2013, 365: 5525–5544
- 17 Mardešić P. Chebyshev Systems and the Versal Unfolding of the Cusp of Order n . *Travaux en Cours*. Paris: Hermann, 1998
- 18 Li C, Zhang Z. A criterion for determining the monotonicity of the ratio of two Abelian integral. *J Differential Equations*, 1996, 127: 407–424
- 19 Grau M, Mañosas F, Villadelprat J. A Chebyshev criterion for Abelian integrals. *Trans Amer Math Soc*, 2011, 363: 109–129
- 20 Chen L, Ma X, Zhang G, et al. Cyclicity of several quadratic reversible systems with center of genus one. *J Appl Anal Comput*, 2011, 1: 439–447
- 21 Kazemi R, Zangeneh H Z. Bifurcation of limit cycles in small perturbations of a hyper-elliptic Hamiltonian system with two nilpotent saddles. *J Appl Anal Comput*, 2012, 2: 395–413
- 22 Petrov G S. Number of zeros of complete elliptic integrals. *Funct Anal Appl*, 1984, 18: 148–149
- 23 Yang L, Zhang J. Searching dependency between algebraic equations: An algorithm applied to automated reasoning. In: *Artificial Intel ligence in Mathematics*. New York: Oxford University Press, 1994
- 24 Moreno M M. On triangular decompositions of algebraic varieties. Technical Report TR 4/99. Oxford: NAG Ltd, 1999
- 25 Rioboo R. Computation of the real closure of an ordered field. In: *ISSAC'92*. San Francisco: Academic Press, 1992
- 26 Sun X, Xi H, Zangeneh R, et al. Bifurcation of limit cycles in small perturbation of a class of Liénard systems. *Int J Bifur Chaos*, 2014, 24: 1450004
- 27 Han M. Asymptotic expansions of Melnikov functions and limit cycle bifurcations. *Int J Bifur Chaos*, 2012, 22: 1250296
- 28 Sun X, Han M, Yang J. Bifurcation of limit cycles from a heteroclinic loop with a cusp. *Nonlinear Anal*, 2011, 74: 2948–2965
- 29 Han M, Yang J, Tarta A, et al. Limit cycles near homoclinic and heteroclinic loops. *J Dynam Differential Equations*, 2008, 20: 923–944
- 30 Han M, Yang J, Yu P. Hopf bifurcations for near-Hamiltonian systems. *Int J Bifur Chaos*, 2009, 19: 4117–4130

- 31 Han M, Wang Z, Zang H. Limit cycles by Hopf and homoclinic bifurcations for near-Hamiltonian systems. Chinese J Contemp Math, 2007, 28: 423–434

The sharp bound on the number of zeros of Abelian integral for a perturbation of hyper-elliptic Hamiltonian system

SUN XianBo & WU KuiLin

Abstract In this paper, we study the number of zeros of the Abelian integral

$$\oint_{\Gamma_h} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)ydx$$

defined on the compact level curves Γ_h of the quintic hyper-elliptic Hamiltonian:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{9}{2}x^2 + 5x^3 + \frac{7}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5.$$

It is proved that 3 is an upper bound of the number of zeros of the above Abelian integral and 3 zeros can be reached. The proof relies on a Chebyshev criterion (Grau et al. (2011)), some techniques in mathematical mechanization and the asymptotic expansions of Abelian integral.

Keywords Abelian integral, hyper-elliptic Hamiltonian, weak Hilbert's 16th problem

MSC(2010) 34C07, 34C08, 37G15

doi: 10.1360/012015-2