由可精确测量元控制的效应代数上的态

Zdenka Riečanová¹ 武俊德^{2*}

(1. Department of Mathematics, Faculty of Electrical Engineering and Information Technology, Slovak Technology University, Ilkovičova 3, SK-812 19 Bratislava, Slovakia; 2. 浙江大学数学系, 杭州 310027)

摘要 证明了由可精确测量元控制的 Archimedes 原子格效应代数能被所谓的元素基本分解性质所刻画. 做为应用, 证明了这类效应代数的态弥漫定理.

关键词 效应代数 可精确测量元 态 由可精确测量元控制的效应代数 态的弥漫

MSC(2000) 主题分类 81P10

1 引言

近几年, 量子效应和模糊事件在 Foulis 和 Bennett^[1] 所引进的效应代数 (在某种意义上等价于 D -偏序集^[2] 或 D -代数^[3]) 的框架下得到了广泛研究. 格效应代数扩充了正交模格 (它可能包含不相容的元素对) 和 MV -代数, 后者来源于构造多值 Lukasiewicz 命题逻辑的代数结构^[4], 因而效应代数在研究不确定现象时有其重要性.

Boolean 代数的所有推广作为态和概率测度的载体已得到广泛研究. 然而, 甚至存在有限效应代数其上没有任何态^[5, 6]. 文献 [7] 已说明一个格效应代数 E 的所有可精确测量元之集 $S(E)$ 是一个正交模格, 也是 E 的一个子格和子效应代数. 在这个意义下, 格效应代数由其可精确测量元之正交模格弥漫而得. 与此同时, 在某些完备原子效应代数情形下, 可精确测量元之集 $S(E)$ 上存在的态能弥漫到整个效应代数 E 上^[8, 9].

不幸的是, 并非每个 (格) 效应代数都能嵌入到一个完备效应代数中^[10]. 所以, 我们感兴趣在找到一族原子格效应代数有如下“基本分解”: 其元素表示成唯一的可精确测量元与原子乘数所成之不可精确测量元的唯一的 $\oplus$ -正交集之和. 我们发现这个判断完全刻画了由可精确测量元素控制的 Archimedes 原子格效应代数. 由可精确测量元控制 (S -控制) 的效应代数由 Gudder 所引进^[11, 12]. 作为一个重要应用, 我们得到了这类效应代数的“态弥漫定理”.

2 效应代数, 基本概念和事实

Foulis 和 Bennett^[1] 所引进的效应代数作为一个代数结构, 为研究可能是不可精确测量的量子效应提供了重要框架.

收稿日期: 2006-11-10; 接受日期: 2007-06-07

国家自然科学基金 (批准号: 10471124) 和浙江省自然科学基金 (批准号: M103057) 资助项目及 The Slovak Research and Development Agency under the contracts SK-CN-017-06 和中国 - 斯洛伐克科技合作项目 APVV-0071-06

*E-mail: wjd@zju.edu.cn

定义 2.1 结构 $(E; \oplus, 0, 1)$ 称为一个效应代数, 若 0 和 1 是 E 的两个不同元, 并且 $\oplus$ 是 E 上的一个部分二元运算, 使得对任意 $a, b, c \in E$ 满足下列条件:

- (Ei) $a \oplus b = b \oplus a$ 若 $a \oplus b$ 被定义,
- (Eii) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ 若一端被定义,
- (Eiii) 对每个 $a \in E$ 存在唯一的 $b \in E$, 使得 $a \oplus b = 1$ (记 $a' = b$),
- (Eiv) 若 $1 \oplus a$ 被定义, 则 $a = 0$.

简记 $(E; \oplus, 0, 1)$ 为 E . 在每个效应代数 E 中, 通过令 $a \leq b$ 和 $b \ominus a = c$ 当且仅当 $a \oplus c$ 被定义并且 $a \oplus c = b$, 则我们定义了 E 的一个新的部分二元运算 $\ominus$ 和偏序 $\leq$.

注意到 $a, b \in E, a \oplus b$ 被定义当且仅当 $b \leq a'$.

若 E 在上述偏序 $\leq$ 下是一个格 (完备格), 则称 E 为一个格 (完备格) 效应代数.

回忆 $Q \subseteq E$ 称为一个子效应代数, 如果

- (i) $1 \in Q$,
- (ii) 若 $a, b, c \in E$ 有 $a \oplus b = c$ 并且 a, b, c 中至少有两个元素属于 Q , 则 $a, b, c \in Q$.

在此情形下, Q 在运算 $\oplus$ 下是一个效应代数.

称格效应代数 E 中元 a 和 b 是相容的 (记为 $a \leftrightarrow b$) 当且仅当 $a \vee b = a \oplus (b \ominus (a \wedge b))$. 若对每对 $a, b \in E$ 都有 $a \leftrightarrow b$, 则 E 称为一个 MV - 效应代数^[13].

注意到如下重要事实: 每个正交模格 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 若按如下定义运算 $a \oplus b = a \vee b$ 当且仅当 $a \leq b'$, 则 $(L; \oplus, 0, 1)$ 是一个格效应代数.

引理 2.2 设 $(E; \oplus, 0, 1)$ 是一个格效应代数, $x, y, z \in E$.

- (i) 若 $x \leq y'$, 则 $x \oplus y = (x \vee y) \oplus (x \wedge y)$.
- (ii) 若 $x, y \leq z'$, 则 $(x \vee y) \oplus z = (x \oplus z) \vee (y \oplus z)$.
- (iii) 若 $x \wedge y = 0$, 并且对 $m, n \in \mathbb{N}$, 元素 mx 和 ny 及 $(mx) \oplus (ny)$ 存在, 则对所有的 $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ 和 $l \in \{1, 2, \dots, n\}$, $(kx) \wedge (ly) = 0$, $(kx) \vee (ly) = (kx) \oplus (ly)$.
- (iv) 若 $Y \subseteq E$, $\vee Y$ 存在, 并且对每个 $x \in E, y \in Y$ 都有 $x \leftrightarrow y$, 则 $x \wedge (\vee Y) = \vee \{x \wedge y | y \in Y\}$, 并且 $x \leftrightarrow \vee Y$.

(i) 的证明参见文献 [14], (iii) 的证明参见文献 [15], (iv) 的证明参见文献 [7]. 我们现在证明 (ii).

事实上, 若 $x, y \leq z'$, 则 $x \vee y \leq z' = 1 \ominus z$, 所以 $(x \vee y) \oplus z$ 存在. 因为 $x \oplus z, y \oplus z \leq (x \vee y) \oplus z$, 故得到 $(x \oplus z) \vee (y \oplus z) \leq (x \vee y) \oplus z$. 进一步地, 若 $d \in E, (x \oplus z), (y \oplus z) \leq d$, 则 $x, y \leq d \ominus z$, 所以 $x \vee y \leq d \ominus z$. 由此得 $(x \vee y) \oplus z \leq d$, 这就证明了 $(x \vee y) \oplus z = (x \oplus z) \vee (y \oplus z)$.

称效应代数 E 的有限系 (元素未必两两不同) $F = (a_k)_{k=1}^n$ 是 $\oplus$ - 正交的, 若 $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus \dots \oplus a_n$ (记为 $\oplus_{k=1}^n a_k$ 或 $\oplus F$) 在 E 中存在. 这里定义 $a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus \dots \oplus a_n = (a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus \dots \oplus a_{n-1}) \oplus a_n$ 如果 $\oplus_{k=1}^{n-1} a_k$ 有定义并且 $\oplus_{k=1}^{n-1} a_k \leq a_n'$. 效应代数 E 的任意系 $G = (a_\kappa)_{\kappa \in H}$ 称为 $\oplus$ - 正交的, 若对每个有限子集 $K \subseteq G$, $\oplus K$ 都存在. 对一个 $\oplus$ - 正交系 $G = (a_\kappa)_{\kappa \in H}$, 若 $\vee \{\oplus K | K \subseteq G \text{ 有限}\}$ 在 E 中存在, 则称 $\oplus G$ 存在并记 $\oplus G = \vee \{\oplus K | K \subseteq G \text{ 有限}\}$.

效应代数 E 称为 Archimedes 效应代数, 若 E 不存在非零元素 e , 使得对每个 $n \in \mathbb{N}$, 元素 $ne = e \oplus e \oplus \dots \oplus e$ (n 次) 在 E 中有定义. 可以证明每个完备效应代数是 Archimedes 效应代数^[16].

效应代数 E 中元素 x 若对每个 $n \in \mathbb{N}$, nx 都有定义, 则记 $\text{ord}(x) = \infty$. 若 n_x (称为 x 的迷向指标) 是使得 $n_x x$ 在 E 中存在的最大正整数, 则记 $\text{ord}(x) = n_x$. 显然在 Archimedes 效应代数 E 中, 对每个 $x \in E$ 都有 $n_x < \infty$.

回忆 $x \in E$ 称为一个可精确测量元, 若 $x \wedge x' = 0$. 集合 $S(E) = \{x \in E | x \wedge x' = 0\}$ 称为 E 的所有可精确测量元集^[11]. 前已说明了对每个格效应代数 E , $S(E)$ 是一个正交模格, 也是 E 的子效应代数和 E 的子格. 进一步地, $S(E)$ 是 E 下列意义的完全子格: $S(E)$ 继承了 $S(E)$ 的子集存在于 E 中的上、下确界.

E 的非零元 a 称为一个原子, 若 $0 \leq b < a$ 一定有 $b = 0$. E 称为原子的, 若对 E 的每个非零元 x 都存在原子 $a \in E$, 使得 $a \leq x$.

引理 2.3 假定 $(E; \oplus, 0, 1)$ 是一个原子格效应代数, $a \in E$ 是一个原子, 并且 $\text{ord}(a) = n_a$, 则

- (i) $(ka) \wedge (ka)' \neq 0$ 对所有 $k \in \{1, 2, \dots, n_a - 1\}$.
- (ii) $n_a a \in S(E)$, 对 $k \neq n_a$, $ka \notin S(E)$.
- (iii) 若 $x \in E$ 并且 $a \leq x \leq ka$, 则存在 $r \in \mathbb{N}$, 使得 $x = ra$.
- (iv) 若 $a, b \in E$ 是原子, $k, l \in \mathbb{N}$ 满足 $k \neq n_a$ 和 $ka = lb$, 则 $a = b$, $k = l$.

(v) 若 E 是 Archimedes 的, 则对每个 $x \in E, x \neq 0$, 存在一个原子集 $\{a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 和正整数集 k_α , 使得

$$x = \oplus \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\} = \vee \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\},$$

其中 $x \in S(E)$ 当且仅当 $k_\alpha = n_{a_\alpha} = \text{ord}(a_\alpha)$ 对所有 $\alpha \in \Lambda$ 成立.

关于引理 2.3 的证明参见文献 [15] 中的定理 2.4 和文献 [8] 中的定理 3.3.

定理 2.4 设 $(E; \oplus, 0, 1)$ 是一个格效应代数, $a, b \in E$ 是原子并且 $ka \leq lb$, 则

- (i) 若 $\text{ord}(b) = \infty$ 或 $l < \text{ord}(b)$, 则 $a = b$.
- (ii) 若 $l = \text{ord}(b) = n_b < \infty$, 则 $a = b$ 或者 $a \leftrightarrow b$ (a, b 不相容) 并且 $n_a a \leq n_b b$.

证明 (i) 假定 $a \neq b$. 我们有 $a \leq ka \leq lb \leq b'$, 由引理 2.2, 这蕴涵着 $a \oplus b = (a \vee b) \oplus (a \wedge b) = a \vee b \leq b'$, 所以 $a \oplus 2b = (a \vee b) \oplus b = (a \oplus b) \vee 2b = a \vee 2b \leq b'$. 归纳地, 有 $a \oplus lb = a \vee lb = lb$, 由此得 $a = 0$, 矛盾. 所以 $a = b$.

(ii) 假定 $a \neq b$ 并且 $a \leftrightarrow b$. 则 $a \vee b = a \oplus (b \ominus (a \wedge b)) = a \oplus b \leq b'$, 由此得 $a \oplus 2b = a \vee 2b \leq b'$. 归纳地, 有 $a \oplus lb = a \vee lb = lb$ 和 $a = 0$, 矛盾. 所以 $a \leftrightarrow b$. 进一步地, $a \leq n_b b$ 蕴涵着 $a \oplus (n_b b)' = (a \vee (n_b b)') \oplus (a \wedge (n_b b)') = a \vee (n_b b)' \leq a'$, 归纳地, 得 $(n_a a) \oplus (n_b b)'$ 存在, 从而 $n_a a \leq n_b b$.

注意若 E 不是格, 则引理 2.3 和定理 2.4 在一般情形下未必成立.

例 2.5 设 $E = \{0, a, b, a \oplus b, 2a = 2b, 1 = 2a \oplus b = 3b\}$. 那么 $\text{ord}(a) = 2$, $\text{ord}(b) = 3$ 和 $S(E) = \{0, 1\}$. 所以 $n_a a = 2a \notin S(E)$. 进一步地, $2b = 2a = n_a a$ 尽管 $a \neq b$ 和 $a \leftrightarrow b$ 因为 $a \oplus b$ 存在.

定理 2.6 设 $(E; \oplus, 0, 1)$ 是一个格效应代数, 对 E 的任意两个原子集 $\{a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$, $\{b_\beta | \beta \in \mathcal{B}\}$, 和正整数 $k_\alpha \neq \text{ord}(a_\alpha)$, $l_\beta \neq \text{ord}(b_\beta)$, 下列条件等价:

- (i) $\oplus \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\} = \oplus \{l_\beta b_\beta | \beta \in \mathcal{B}\}$.
- (ii) 对每个 $\alpha \in \Lambda$ 存在 $\beta \in \mathcal{B}$, 使得 $a_\alpha = b_\beta$, $k_\alpha = l_\beta$.

证明 取 $\alpha_0 \in \Lambda$, 因为 $k_{\alpha_0} < \text{ord}(a_{\alpha_0})$, 所以 $k_{\alpha_0} a_{\alpha_0} \leq a'_{\alpha_0}$. 进一步地, 对每个 $\alpha \neq \alpha_0, \alpha \in \Lambda$ 存在 $k_{\alpha} a_{\alpha} \oplus k_{\alpha_0} a_{\alpha_0}$, 据此得 $k_{\alpha} a_{\alpha} \leq (k_{\alpha_0} a_{\alpha_0})' \leq a'_{\alpha_0}$. 这样对每个 $\beta \in \mathcal{B}$, 有

$$b_{\beta} \leq l_{\beta} b_{\beta} \leq \oplus \{k_{\alpha} a_{\alpha} | \alpha \in \Lambda\} = \vee \{k_{\alpha} a_{\alpha} | \alpha \in \Lambda\} \leq a'_{\alpha_0}.$$

于是 $b_{\beta} \leftrightarrow a_{\alpha_0}$, 由文献 [17] 得到 $k_{\alpha_0} a_{\alpha_0} \leftrightarrow l_{\beta} b_{\beta}$ 对所有 $\beta \in \mathcal{B}$ 成立. 据引理 2.2 (iv), 有

$$k_{\alpha_0} a_{\alpha_0} = k_{\alpha_0} a_{\alpha_0} \wedge (\vee \{l_{\beta} b_{\beta} | \beta \in \mathcal{B}\}) = \vee \{k_{\alpha_0} a_{\alpha_0} \wedge l_{\beta} b_{\beta} | \beta \in \mathcal{B}\}.$$

此外, 据引理 2.2 (iii), $k_{\alpha_0} a_{\alpha_0} \wedge l_{\beta} b_{\beta} = 0$ 对所有 $b_{\beta} \neq a_{\alpha_0}$ 成立, 所以存在 $\beta_0 \in \mathcal{B}$, 使得 $a_{\alpha_0} = b_{\beta_0}$ 和 $k_{\alpha_0} a_{\alpha_0} = l_{\beta_0} a_{\alpha_0}$, 从而有 $k_{\alpha_0} = l_{\beta_0}$.

3 由可精确测量元控制的格效应代数

Gudder 在文献 [11, 12] 中引进了称为由可精确测量元控制和 S -控制的特殊效应代数类. 复 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的由单位算子 I 控制的正线性算子所成之标准算子效应代数 $\mathcal{E}(\mathcal{H})$, 提供了这类效应代数的重要例子 [11, 12].

定义 3.1 [11, 12] 效应代数 $(E; \oplus, 0, 1)$ 称为由可精确测量元控制的, 若对每个 $a \in E$, 存在一个最小的可精确测量元 $\hat{a}$, 使得 $a \leq \hat{a}$. 也就是说, $\hat{a} \in S(E)$ 并且若 $b \in S(E)$ 满足 $a \leq b$, 则 $\hat{a} \leq b$. 由可精确测量元控制的效应代数 E 称为 S -控制的, 如果对每个 $a \in E$ 和每个 $p \in S(E)$, $a \wedge p$ 都存在.

下面将用到 $S(E)$ 是 E 的一个子格和子效应代数这个事实 [7].

显然格效应代数 E 是 S -控制的当且仅当 E 由可精确测量元控制.

引理 3.2 设 $(E; \oplus, 0, 1)$ 是一个格效应代数, 则下列条件等价:

- (i) E 是一个由可精确测量元控制的效应代数.
- (ii) 对每个 $x \in E$, 存在 $\tilde{x} \in S(E)$, 使得 $\tilde{x} \leq x$, 并且若 $u \in S(E)$ 满足 $u \leq x$, 则 $u \leq \tilde{x}$.
- (iii) 对每个 $x \in E$ 存在唯一的 $v_x \in S(E)$, $v_x \leq x$, 并且若 $v \in S(E)$ 满足 $v \leq x \oplus v_x$, 则 $v = 0$.

证明 (i) $\Leftrightarrow$ (ii). 由于 E 是一个 DM-偏序集, 所以由 de Morgan 律易知结论成立.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 设 $\tilde{x}$ 是小于 x 的最大可精确测量元. 若 $v \in S(E)$ 满足 $v \leq x \oplus \tilde{x}$, 则 $v \oplus \tilde{x} \leq x$, 因为 $v \oplus \tilde{x} \in S(E)$, 故有 $v \oplus \tilde{x} \leq \tilde{x}$, 由此得 $v = 0$. 假定 $u \in S(E)$, $u \leq x$ 并且若 $v \in S(E)$ 满足 $v \leq x \oplus u$, 则 $v = 0$. 于是 $u \leq \tilde{x} \leq x$, 所以 $\tilde{x} \oplus u \leq x \oplus u$, 这蕴涵着 $\tilde{x} \oplus u = 0$, 因为由文献 [7], $\tilde{x} \oplus u \in S(E)$. 这就证明了 $u = \tilde{x}$, 从而 $v_x = \tilde{x}$ 是满足 (iii) 的唯一元素.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). 设 $x \in E, x \neq 0$ 并且 v_x 满足 (iii), 则 $v_x \in S(E), v_x \leq x$. 此外, 若 $u \in S(E)$ 满足 $u \leq x$, 则由文献 [7] 得 $v_x \vee u \in S(E), v_x \vee u \leq x$. 进一步地, 若 $v \leq x \oplus (v_x \vee u) \leq x \oplus v_x$, 则 $v = 0$, 由 (iii) 得 $v_x \vee u = v_x$, 所以 $u \leq v_x$, 这证明了 $v_x = \tilde{x}$ 满足 (ii).

注 3.3 存在由可精确测量元控制的原子格效应代数 (甚至 MV-效应代数) 但不是 Archimedes 的. 这方面的最简单例子是 Chang 的 MV-效应代数 $E = \{0, a, 2a, 3a, \dots, (3a)', (2a)', a', 1\}$, 其中 a 是唯一的原子且 $\text{ord}(a) = \infty$. 可精确测量元集是 $S(E) = \{0, 1\}$, 所以 E 是可精确测量元控制的.

下面定理刻画了由可精确测量元控制的 Archimedes 原子格效应代数的特征. 首先记

$$M(E) = \{x \in E | \text{若 } v \in S(E) \text{ 满足 } v \leq x, \text{ 则 } v = 0\}.$$

定理 3.4 设 $(E; \oplus, 0, 1)$ 是一个原子格效应代数, 则下列条件等价:

(i) E 是由可精确测量元控制的 Archimedes 原子格效应代数.

(ii) 对每个 $x \in E, x \neq 0$, 存在唯一的 $v_x \in S(E)$, 唯一的原子集 $\{a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 和唯一的正整数 $k_\alpha \neq \text{ord}(a_\alpha)$, 使得

$$x = v_x \oplus (\oplus \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}).$$

证明 (i) $\implies$ (ii). 设 $x \in E, x \neq 0$. 由引理 3.2, 存在唯一的 $v_x \in S(E)$, 使得 $x = v_x \oplus (x \ominus v_x)$ 并且 $x \ominus v_x \in M(E)$. 据文献 [8] 中的定理 3.3, 存在一个原子集 $\{a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 和正整数 $k_\alpha, \alpha \in \Lambda$, 使得 $x \ominus v_x = \oplus \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\} = \vee \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$. 因为 $n_{a_\alpha} a_\alpha \in S(E)$, $x \ominus v_x \in M(E)$, 故得到 $k_\alpha \neq n_{a_\alpha}$. 再由定理 2.6 得知 $\{a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 和 $\{k_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是唯一的.

(ii) $\implies$ (i). 设 $x \in E, x \neq 0$ 并且 v_x 和原子集 $\{a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 满足 (ii). 显然若 $x \in S(E)$, 则 $v_x = x = \hat{x}$ 是控制 x 的最小可精确测量元. 假定 $x \notin S(E)$, 则 $x \ominus v_x \in M(E)$, 否则存在 $v \in S(E), v \neq 0$ 有 $v \leq x \ominus v_x$. 此外, 因为 $x \notin S(E)$, 所以 $v \neq x \ominus v_x$. 由此得到 $x = v_x \oplus v \oplus (x \ominus (v_x \oplus v))$, 再由 (ii) 存在 $u \in S(E)$ 和原子集 $\{b_\beta | \beta \in \mathcal{B}\}$, 使得 $x \ominus (v_x \oplus v) = u \oplus (\oplus \{b_\beta | \beta \in \mathcal{B}\})$, 这与 (ii) 矛盾. 据引理 3.2 得到 E 是由可精确测量元控制的.

进一步地, 我们证明对每个原子 $a \in E, \text{ord}(a) < \infty$. 若不然, 存在原子 $a \in E, \text{ord}(a) = \infty$. 让 $\omega = \hat{a} \in S(E)$ 是控制 a 的最小可精确测量元, 则 $\omega = a \oplus (\omega \ominus a), \omega \ominus a \in M(E)$, 因为否则存在 $v \neq 0, v \in S(E)$ 满足 $v \leq \omega \ominus a$, 所以有 $a \leq \omega \ominus v \in S(E)$ 和 $\omega \leq \omega \ominus v$, 矛盾. 由 (ii) 存在唯一的原子集 $\{a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 和正整数 $k_\alpha, k_\alpha \neq \text{ord}(a_\alpha), \alpha \in \Lambda$, 使得 $\omega \ominus a = \oplus \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\} = \vee \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$, 所以 $\omega = a \oplus \vee \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\} = \vee \{(k_\alpha a_\alpha) \oplus a | \alpha \in \Lambda\}$.

如果存在 $\alpha_0 \in \Lambda$, 使得 $a = a_{\alpha_0}$, 则对每个 $\alpha \in \Lambda, \alpha \neq \alpha_0$, 由于 $a_\alpha \wedge a_{\alpha_0} = 0$ (引理 2.2(iii)), 故有 $k_\alpha a_\alpha \oplus a_{\alpha_0} = k_\alpha a_\alpha \vee a_{\alpha_0} \leq a'_{\alpha_0}$. 注意到 $\text{ord}(a_{\alpha_0}) = \text{ord}(a) = \infty$, 得到 $k_{\alpha_0} a_{\alpha_0} \oplus a = k_{\alpha_0} a_{\alpha_0} \oplus a_{\alpha_0} = (k_{\alpha_0} + 1)a_{\alpha_0} < a'_{\alpha_0}$. 于是有 $a \leq \omega \leq a'_{\alpha_0} = a'$, 从而 $a \leq \omega'$, 矛盾. 若 $a \notin \{a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$, 由引理 2.2(iv), $a \wedge (\vee \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}) = 0$, 所以再由引理 2.2(i), 得到 $a \leq \omega = a \vee (\vee \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}) \leq a'$, 矛盾.

从刚刚证明的对每个原子 $a \in E, \text{ord}(a) = n_a < \infty$, 可得对每个 $x \in E, x \neq 0, \text{ord}(x) = n_x < \infty$. 若不然, 由 E 是原子的可取一个原子 $a \in E, a \leq x$, 所以对每个正整数 n , 元素 $na \leq nx$ 存在, 从而 $\text{ord}(a) = \infty$, 矛盾. 综上证明了 E 是 Archimedes 的.

定理 3.5 设 $(E; \oplus, 0, 1)$ 是一个格效应代数. 对每个原子 $a \in E$, 若 $\text{ord}(a) < \infty$, 则 $n_a a$ 是控制 a 的最小可精确测量元.

证明 设 $a \in E$ 是一个原子并且 $\omega \in S(E), a \leq \omega$, 则 $a \oplus \omega'$ 被定义并且由于 $a \wedge \omega' \leq \omega \wedge \omega' = 0$, 由引理 2.2(i), 有 $a \oplus \omega' = a \vee \omega' \leq a'$. 而由引理 2.2(iii), 存在 $2a \oplus \omega' = 2a \vee \omega' \leq a'$, 所以 $3a \oplus \omega$ 存在. 归纳地, 可得 $n_a a \oplus \omega'$ 存在, 所以 $n_a a \leq \omega$. 这样证明了 $n_a a$ 是控制 a 的最小可精确测量元.

注 3.6 若 E 不是格效应代数, 则定理 3.4 和 3.5 不一定成立.

例 3.7 考虑效应代数 $(E; \oplus, 0, 1)$, 其中 $E = \{0, a, b, a \oplus b, 2a = 2b, 3b = 2a \oplus b = 1\}$.

因为 E 是有限的并且 $S(E) = \{0, 1\}$, E 是由可精确测量元控制的 Archimedes 效应代数. 尽管 $\text{ord}(a) = 2$, 我们有 $2a \notin S(E)$, 因为 $(2a)' = b$, 所以 $(2a) \wedge (2a)' = b$. 尽管 $\text{ord}(a) = 2 < \text{ord}(b) = 3$, 我们有 $2a = 2b$. 显然 E 不是格, 因为 $a \vee b$ 在 E 中不存在.

4 由可精确测量元控制的效应代数上的态弥漫定理

借助于文献 [7] 所证明的每个格效应代数 E 的所有可精确测量元集 $S(E)$ 是一个正交模格, 也是 E 的子效应代数和 E 的子格, 以及定理 3.4 关于元素的基本分解性质, 我们将证明若 $S(E)$ 上存在 (o) - 连续的态, 则在由可精确测量元控制的 Archimedes 原子格效应代数上存在态. 关于不存在态的效应代数的例子参见文献 [5].

偏序集 $(P, \leq)$ 中的网 $(a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ 称为序收敛到 $a \in P$, 如果存在 $(P, \leq)$ 中网 $(u_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ 和 $(v_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, 使得

$$a \uparrow u_\alpha \leq a_\alpha \leq v_\alpha \downarrow a.$$

我们用 $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$ 表示序收敛 (或简记为 $a_\alpha \xrightarrow{(o)} a$), 其中 $u_\alpha \uparrow a$ 蕴涵着 $u_\alpha \leq u_\beta$ 对所有 $\alpha \leq \beta$ 和 $a = \vee \{u_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$. 对偶地, $v_\alpha \downarrow a$ 的意义明显.

回忆映射 $\omega: E \rightarrow [0, 1]$ 称为效应代数 $(E; \oplus, 0, 1)$ 上的一个 (有限可加) 态, 若 $\omega(1) = 1$ 并且 $x \leq y' \Rightarrow \omega(x \oplus y) = \omega(x) + \omega(y)$. 态 ω 称为忠实的, 若 $\omega(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. 态 ω 称为 (o) - 连续的 (序 - 连续的), 若 $x_\alpha \xrightarrow{(o)} a \Rightarrow \omega(x_\alpha) \rightarrow \omega(a)$ 对 E 中的每个网 $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ 都成立.

引理 4.1 效应代数 E 上的态 ω 是 (o) -连续当且仅当对每个 $x_\alpha \in E$, $x_\alpha \downarrow 0 \Rightarrow \omega(x_\alpha) \downarrow 0$.

引理 4.1 的证明参见文献 [18] 中的引理 4.4.

最后, 回忆映射 $\omega: L \rightarrow [0, 1]$ 是正交模格 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 上的一个态当且仅当 $\omega(1) = 1$, 并且对所有的 $x \leq y', x, y \in L$, $\omega(x \vee y) = \omega(x) + \omega(y)$. 因为由正交模格 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 可得格效应代数 $(L; \oplus, 0, 1)$, 并且 $x \oplus y = x \vee y$ 当且仅当 $x \leq y'$, 所以正交模格 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 上的态 ω 也是效应代数 $(L; \oplus, 0, 1)$ 上的一个态, 反之亦然.

定理 4.2 设 $(E; \oplus, 0, 1)$ 是由可精确测量元控制的 Archimedes 原子格效应代数, $x \in E$, $\{a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是 E 的满足 $x = \oplus \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 的原子集, 则

(i) $\oplus \{k_\alpha a_\alpha | k_\alpha = \text{ord}(a_\alpha), \alpha \in \Lambda\}$ 和 $\oplus \{k_\alpha a_\alpha | k_\alpha \neq \text{ord}(a_\alpha), \alpha \in \Lambda\}$ 都在 E 中存在.

(ii) $v_x = \oplus \{k_\alpha a_\alpha | k_\alpha = \text{ord}(a_\alpha), \alpha \in \Lambda\} \in S(E)$, $x = v_x \oplus (\oplus \{k_\alpha a_\alpha | k_\alpha \neq \text{ord}(a_\alpha), \alpha \in \Lambda\})$ 是 x 的基本分解.

证明 由引理 2.2 (iii) 和 $\oplus D$ 关于 $\oplus$ - 正交系 D 的定义, 有

$$\begin{aligned} \oplus \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\} &= \vee \{ \oplus \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in K\} | K \subseteq \Lambda \text{ 有限} \} \\ &= \vee \{ \vee \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in K\} | K \subseteq \Lambda \text{ 有限} \} = \vee \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}. \end{aligned}$$

据引理 3.2 存在唯一元 $v_x \in S(E)$, $x \ominus v_x \in M(E)$, 使得 $x = v_x \oplus (x \ominus v_x)$. 因为 $x \ominus v_x \leq v'_x$ 和 $v_x \in S(E)$, 所以有 $v_x \wedge (x \ominus v_x) = 0$, 故由引理 2.2 (i), $v_x \oplus (x \ominus v_x) = v_x \vee (x \ominus v_x)$.

取 $\alpha_0 \in \Lambda$, 满足 $k_{\alpha_0} \neq \text{ord}(a_{\alpha_0})$, 则 $k_{\alpha_0} a_{\alpha_0} \leq a'_{\alpha_0}$, 并且对每个 $\alpha \in \Lambda, \alpha \neq \alpha_0$, 因为 $(k_{\alpha_0} a_{\alpha_0}) \oplus k_\alpha a_\alpha$ 被定义, 所以有 $k_\alpha a_\alpha \leq (k_{\alpha_0} a_{\alpha_0})' \leq a'_{\alpha_0}$. 由此得到 $v_x \oplus (x \ominus v_x) = x = \vee \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\} \leq a'_{\alpha_0}$, 这表明 $v_x, x \ominus v_x$ 是和 a_{α_0} 相容的, 所以和 $k_{\alpha_0} a_{\alpha_0}$ 也是相容的 [17]. 进一步地, $(k_{\alpha_0} a_{\alpha_0}) \wedge v_x = 0$, 否则由定理 2.4 易得 $a_{\alpha_0} \leq (k_{\alpha_0} a_{\alpha_0}) \wedge v_x$, 这蕴涵着 $n_{a_{\alpha_0}} a_{\alpha_0} \leq v_x \leq x \leq a'_{\alpha_0}$, 矛盾, 故得到 $k_{\alpha_0} a_{\alpha_0} \wedge (v_x \vee (x \ominus v_x)) = k_{\alpha_0} a_{\alpha_0} \wedge (x \ominus v_x)$, 所以 $k_{\alpha_0} a_{\alpha_0} \leq x \ominus v_x$.

取 $\alpha_0 \in \Lambda, k_{\alpha_0} = \text{ord}(a_{\alpha_0})$. 因为 $n_{a_{\alpha_0}} a_{\alpha_0} \in S(E)$ 并且 v_x 是小于 x 的最大可精确测量元, 我们有 $n_{a_{\alpha_0}} a_{\alpha_0} \leq v_x \leq x$, 由此得 $v_x, x \ominus v_x$ 是和 $n_{a_{\alpha_0}} a_{\alpha_0}$ 相容的. 因为 $n_{a_{\alpha_0}} a_{\alpha_0} \leq v_x$, 显然有

$$n_{a_{\alpha_0}} a_{\alpha_0} \wedge (x \ominus v_x) = 0.$$

我们已经证明了对每个 $\alpha \in \Lambda$, $k_\alpha a_\alpha$, v_x 和 $x \ominus v_x$ 是两两相容的, 由引理 2.2 (iv), 有

$$v_x = \vee \{(k_\alpha a_\alpha) \wedge v_x | \alpha \in \Lambda\} = \vee \{k_\alpha a_\alpha | k_\alpha = \text{ord}(a_\alpha), \alpha \in \Lambda\}$$

和

$$x \ominus v_x = \vee \{(k_\alpha a_\alpha) \wedge (x \ominus v_x) | \alpha \in \Lambda\} = \vee \{k_\alpha a_\alpha | k_\alpha \neq \text{ord}(a_\alpha), \alpha \in \Lambda\}.$$

定理证毕.

定理 4.3 设 $(E; \oplus, 0, 1)$ 是由可精确测量元控制的 Archimedes 原子格效应代数, 则对每个 $S(E)$ 上的 (o) -连续态 ω , 存在 E 上的一个态 $\hat{\omega}$, 使得 $\hat{\omega}|_{S(E)} = \omega$.

证明 设 $\omega: S(E) \rightarrow [0, 1]$ 是 $S(E)$ 上的一个 (o) -连续态, 考虑如下映射 $\hat{\omega}: E \rightarrow [0, 1]$:

(1) 对每个原子 $a \in E$, 令 $\hat{\omega}(a) = \frac{\omega(n_a a)}{n_a}$, 其中 $n_a = \text{ord}(a)$.

(2) 对每个有基本分解 $x = v_x \oplus (\oplus \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\})$ 的 $x \in E, x \neq 0$, 令

$$\hat{\omega}(x) = \omega(v_x) + \sup \left\{ \sum_{\alpha \in K} k_\alpha \hat{\omega}(a_\alpha) | K \subseteq \Lambda \text{ 有限} \right\}.$$

我们证明若 $x = \oplus \{l_\beta b_\beta | \beta \in \mathcal{B}\}$, 其中 $\{b_\beta | \beta \in \mathcal{B}\}$ 是 E 的一个原子集, l_β 是满足 $l_\beta \leq n_{b_\beta}$ 的正整数, $\beta \in \mathcal{B}$, 则 $\hat{\omega}(x) = \sup \{\sum_{\beta \in K} l_\beta \hat{\omega}(b_\beta) | K \subseteq \mathcal{B} \text{ 有限}\}$. 记 $\mathcal{B}_1 = \{\beta \in \mathcal{B} | l_\beta = \text{ord}(b_\beta)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\beta \in \mathcal{B} | l_\beta \neq \text{ord}(b_\beta)\}$. 显然 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$. 由定理 4.2 有

$x = (\oplus \{l_\beta b_\beta | \beta \in \mathcal{B}_1\}) \oplus (\oplus \{l_\beta b_\beta | \beta \in \mathcal{B}_2\})$, $\oplus \{l_\beta b_\beta | \beta \in \mathcal{B}_1\} = v_x$, 并且 $x = v_x \oplus (\oplus \{l_\beta b_\beta | \beta \in \mathcal{B}_2\})$ 是 x 的基本分解.

假定 $K \subseteq \mathcal{B}$ 有限, 记 $F = K \cap \mathcal{B}_1$, $G = K \cap \mathcal{B}_2$, $x_K = \oplus_{\beta \in K} l_\beta b_\beta$, $x_F = \oplus_{\beta \in F} l_\beta b_\beta$, $x_G = \oplus_{\beta \in G} l_\beta b_\beta$, 则由定理 4.2, $x_K = x_F \oplus x_G$ 是 x_K 的基本分解, 所以由 (2) 有 $\hat{\omega}(x_K) = \omega(x_F) + \hat{\omega}(x_G)$. 此外, 由定理 4.2 和 $\oplus D$ 关于 $\oplus$ -正交系 D 的定义, 有 $x_K \uparrow x$, $x_F \uparrow v_x$, $x_G \uparrow x \ominus v_x = \oplus \{l_\beta b_\beta | \beta \in \mathcal{B}_2\}$. 注意到 ω 在 $S(E)$ 上是 (o) -连续的, 由 $\hat{\omega}$ 的定义得到 $\sup \{\hat{\omega}(x_K) | K \subseteq \mathcal{B} \text{ 有限}\} = \sup \{\omega(x_F) + \hat{\omega}(x_G) | F = K \cap \mathcal{B}_1, G = K \cap \mathcal{B}_2, K \subseteq \mathcal{B} \text{ 有限}\} = \sup \{\omega(x_F) | F \subseteq \mathcal{B}_1 \text{ 有限}\} + \sup \{\hat{\omega}(x_G) | G \subseteq \mathcal{B}_2 \text{ 有限}\} = \omega(v_x) + \sup \{\sum_{\beta \in G} l_\beta \hat{\omega}(b_\beta) | \beta \in \mathcal{B}_2\} = \hat{\omega}(x)$.

现在, 取 $x, y \in E, x \leq y'$, 则存在 E 的原子集 $\{a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$, $\{b_\beta | \beta \in \mathcal{B}\}$, 使得

$$x = \oplus \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}, y = \oplus \{l_\beta b_\beta | \beta \in \mathcal{B}\}.$$

此外, 如上所示, $\hat{\omega}(x) = \sup \{\sum_{\alpha \in K} k_\alpha \hat{\omega}(a_\alpha) | K \subseteq \Lambda \text{ 有限}\}$ 和 $\hat{\omega}(y) = \sup \{\sum_{\beta \in M} l_\beta \hat{\omega}(b_\beta) | K \subseteq \mathcal{B} \text{ 有限}\}$, 因为 $x \oplus y = (\oplus \{k_\alpha a_\alpha | \alpha \in \Lambda\}) \oplus (\oplus \{l_\beta b_\beta | \beta \in \mathcal{B}\})$, 由此得到 $\hat{\omega}(x \oplus y) = \hat{\omega}(x) + \hat{\omega}(y)$. 注意到 $0, 1 \in S(E)$, 故有 $\hat{\omega}(0) = \omega(0) = 0$, $\hat{\omega}(1) = \omega(1) = 1$. 这样证明了 $\hat{\omega}$ 是 E 上的一个态. 进一步地, 因为 $x \in S(E)$ 当且仅当 $x = v_x$, 所以 $\hat{\omega}|_{S(E)} = \omega$.

注 4.4 下例说明定理 4.3 中的 E 是格这个条件不能省略.

例 4.4 文献 [5] 中的例 2.3 给出了不存在态的最小效应代数, 即 $E = \{0, a, b, c, 2a, 2b, 2c, 3b, 1\}$, 其运算定义为 $1 = a \oplus b \oplus c = 3a = 4b = 3c$, 从而 $b \oplus c = 2a, a \oplus b = 2c, a \oplus c = 3b$. 因为 $a \vee b$ 不存在, 所以 E 不是格. 进一步地, $S(E) = \{0, 1\}$, 所以 E 是由可精确测量元控制且是 Archimedes 的. 然而, 不存在 E 上的态是由 $S(E)$ 上的态延拓而得.

致谢 作者诚挚地感谢两位审稿人提出的宝贵修改意见.

参 考 文 献

- 1 Foulis D J, Bennett M K. Effect algebras and unsharp quantum logics. *Found Phys*, **24**: 1331–1352 (1994)
- 2 Kôpka F, Chovanec F. D -posets. *Math Slovaca*, **43**: 21–34 (1994)
- 3 Gudder S P. D -algebras. *Found Phys*, **26**: 813–822 (1996)
- 4 Chang C C. Algebraic analysis of many-valued logics. *Trans Amer Math Soc*, **88**: 467–490 (1958)
- 5 Riečanová Z. Proper effect algebras admitting no states. *Internat J Theoret Phys*, **40**: 1683–1691 (2001)
- 6 Greechie R J. Orthomodular lattices admitting no states. *J Comb Theory Ser A*, **10**: 119–132 (1971)
- 7 Jenča G, Riečanová Z. On sharp elements in lattice ordered effect algebras. *BUSEFAL*, **80**: 24–29 (1999)
- 8 Riečanová Z. Smearings of states defined on sharp elements onto effect algebras. *Internat J Theoret Phys*, **41**: 1511–1524 (2002)
- 9 Riečanová Z. Basic decomposition of elements and Jauch-Piron effect algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, **155**: 138–149 (2005)
- 10 Riečanová Z. Macneille completions of D -posets and effect algebras. *Internat J Theoret Phys*, **39**: 855–865 (2000)
- 11 Gudder S P. Sharply dominating effect algebras. *Tatra Mt Math Publ*, **15**: 23–30 (1998)
- 12 Gudder S P. Gudder. S -dominating effect algebras. *Internat J Theoret Phys*, **37**: 915–923 (1998)
- 13 Kôpka F. Compatibility in D -posets. *Internat J Theor Phys*, **34**: 1525–1531 (1995)
- 14 Riečanová Z. On proper orthoalgebras, difference posets and Abelian relative inverse semigroups. *Tatra Mountains Math Publ*, **10**: 119–128 (1997)
- 15 Riečanová Z. Continuous lattice effect algebras admitting order-continuous states. *Fuzzy Sets and Systems*, **136**: 41–54 (2003)
- 16 Riečanová Z. Archimedean and block-finite lattice effect algebras. *Demonstratio Math*, **33**: 443–452 (2000)
- 17 Riečanová Z. Generalization of blocks for D -lattice and lattice-ordered effect algebras. *Internat J Theoret Phys*, **39**: 231–236 (2000)
- 18 Riečanová Z. Lattice effect algebras with (o) -continuous faithful valuations. *Fuzzy Sets and Systems*, **124**: 321–327 (2001)