应用耦合映象格子模型模拟 Rayleigh-Bénard 对流中的结构形态

王 亮 章光华 符 松

(清华大学工程力学系, 北京, 100084. E-mail: wangliang99@mails.tsinghua.edu.cn)

摘要 应用耦合映象格子(CML)模型对 Rayleigh-Bénard 对流(RBC)的结构形态作了数值模拟. 在展高比较小($L/d=5$)的情况下, 数值模拟再现了实验中观察到的流动由层流过渡到软湍流再过渡到硬湍流的主要特征以及水平截面内的胞状结构. 在展高比较大($L/d=30$)的情况下, 数值模拟成功地再现了近年来在实验中发现的螺旋-缺陷混沌和靶标型结构. 同时证实, 对于 $Pr=1$ 的流体, 在偏离平衡态的初始阶段的同一参数范围内, 大展高比 RBC 中的理想直涡卷和螺旋-缺陷混沌是相互竞争的两个吸引子, 而初始条件对于形成这两种结构形态中的哪一种起决定性作用. 对于 $Pr=4$ 的流体, 大展高比 RBC 中的结构形态主要呈靶标形, 其尺度和分布形态亦显著地取决于初始条件.

关键词 自然对流 结构形态形成 动力系统 耦合映象格子 螺旋-缺陷混沌

在偏离平衡态的空间分布的非线性动力系统中, 结构形态的形成(pattern formation)是非线性动力学的-一个重要研究方向^[1,2]. Rayleigh-Bénard 对流(简称 RBC)是在理论和实验方面研究得较为深入的一个非线性动力系统, 这个系统具有复杂的非线性动力学行为^[3]. 鉴于在不同物理问题中动力系统的结构形态通常有明显相似之处, 研究 RBC 中的结构形态具有典型意义.

在 RBC 实验中, 流体充满两块相距为 d 的平行于水平面的平板之间, 上、下板的温度分别保持为常值 T_t 和 T_b , $T_b > T_t$. 当温度差 $\Delta T = T_b - T_t$ 超过某一临界值 ΔT_c 时, 流体的静止热传导状态变得不稳定而热对流开始发生. 依据 Boussinesq 方程, 控制 RBC 动力学特性的无量纲参数有两个: 第 1 个参数是 Rayleigh 数, 即 $Ra = \alpha g \Delta T d^3 / (\eta \kappa)$, 这里, α , κ 和 η 分别是流体的热膨胀系数、热扩散率和运动粘性系数, g 是重力加速度. 在理想条件下, 热对流开始发生于 Rayleigh 数的临界值 $Ra_c = 1708$ ^[4]. 第 2 个参数是 Prandtl 数, 即 $Pr = \eta / \kappa$, 这个参数可用以衡量 Boussinesq 方程中非线性项的相对重要性^[4]. 从动力系统的观点出发, 我们可以用另一个无量纲参数来代替 Ra . 定义一个表示偏离平衡态程度的参数 $\varepsilon = \Delta T / \Delta T_c - 1$. ε 稍大于零时, 热对流发生, 系统中开始出现较简单的结构形态; 当 ε 继续增大, 系统的结构形态变得越来越复杂.

另外, 结构形态的形成还取决于系统的几何特

性. 就 RBC 而言, 当上、下板的温度差刚刚超过临界值 ΔT_c 时, 系统中出现成对的反向旋转的直涡卷, 温度场和速度场在水平方向周期性地变化, 其波长 λ_c . $2d$ 称为临界波长. 因而, RBC 的几何特性可由 $\Gamma = L / \lambda_c$ 或展高比 L/d 来定义, L 是系统的水平尺度. 在 Γ 很小的情况下, 结构形态的发展因受侧向限制而冻结; 只有在 $\Gamma \gg 1$ 的情况下, 系统的结构形态才可能随 ε 的增大而进一步发展^[5].

对于大展高比(即水平尺度与流体层厚度比)的 RBC, 实验表明, 当 ε 在大于临界值后继续增大时, RBC 首先发展为随时间和在水平面内的无序状态, 而在竖直方向仍保持相对简单的形态. 只有在 ε (或 Ra) 很大的情况下, RBC 才会发展为在空间三个方向都极不规则的充分发展湍流^[3]. 上述前一阶段的问题, 实际上是要研究系统在水平面内由分岔到混沌的动力学行为. 为此, 近十年来许多学者对大展高比的 RBC 进行了精细的实验研究. 这些实验研究揭示了一些此前人们了解得很少的热对流系统中的时-空混沌状态. 其中特别引起人们重视的, 是 Morris 及其合作者^[6,7]发现的在大展高比圆柱形和正方形容器中气体 RBC 的螺旋-缺陷混沌(spiral-defect chaos, 简称 SDC). 他们发现, 在偏离平衡态的初始阶段的同一参数(ε)范围内, 系统既可形成理想的直涡卷(ideal straight rolls, 简称 ISR)又可形成 SDC, 究竟形成这两种结构形态中的哪一种取决于作为初始条件的扰动.

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/CSB2005-50-4-309>

当 $Pr \approx 1$, $\Gamma \gg 1$ 时, 即使在很小的随机扰动影响下, 系统也会发展为SDC状态. Cakmur等^[8]的实验研究证明, 对于 Pr 接近 1 的流体, SDC和ISR是同一参数范围内相互竞争的两类稳定的吸引子. 在 Pr 较大(例如, $Pr > 3.5$) 的情况下, Assenheimer和Steinberg^[9]发现 SDC 将会过渡为靶标型的混沌(target chaos)状态. 后来的实验研究(例如, Ahlers^[10])和理论工作(例如, Cross^[11]和Pesch^[12])都证实, SDC是 Pr 接近 1 的流体大展高比RBC的固有性质.

除实验研究外, 不少学者对SDC进行了数值模拟. 例如, Xi等^[13]以及Bestehorn等^[14]应用模型方程, Decker等^[15]应用 Boussinesq方程的Galerkin截断方法, 得到了与实验结果非常相似的数值模拟结果. 精确的数值模拟的优点是可以获得更多在实验中难以测定的重要数据.

本文应用一种较为简单的动力学系统模型, 即三维耦合映象格子(coupled map lattice, 简称CML)模型, 来揭示RBC的结构形态. CML模型是Kaneko^[16]1984年首先提出的. 近年来, 这种模型已发展为研究时-空混沌、结构形态形成等空间分布系统动力学行为的有效方法^[17]. CML的主要思想如下:

(1) 在一个空间网格的所有结点上选取宏观场变量(如流体的速度分量、温度和组分浓度等), 网格的维数和拓扑结构与所研究问题的物理空间相同;

(2) 将系统发展的动力学过程分解为独立组成部分(如流体的对流、扩散和浮力效应等);

(3) 系统动力学过程的每一个组成部分都用网格结点上简单和并行的动力学过程代替, 这些过程包括每个网格结点上场变量的非线性映象以及该结点上的变量与适当选择的相邻结点上的变量的耦合;

(4) 将上述动力学过程按时间顺序推进.

早期的CML模型大都采用简单的映象函数, 例如logistic映象函数. 对于热对流问题, Yanagita和Kaneko^[18]把系统随时间的发展分解为Euler步和Lagrange步. Euler步模拟浮力、扩散以及粘性和压力效应, 体现为相邻结点上的变量之间的耦合. Lagrange步模拟对流效应, 它用虚拟质点在每个时间步内的位移代替简单的映象函数. 这种做法使模型更接近真实物理过程. Yanagita和Kaneko 1993年的文章着重阐述了RBC的二维CML模型及其模拟结果, 本文将这个模型推广至三维空间, 从而更真实地再现

和研究了1993年以后在实验中发现的那些更为复杂的结构形态.

1 Rayleigh-Bénard 对流的耦合映象格子模型

在流体占有的空间建立三维网格 (x, y, z) , x 和 z 是结点在水平截面内的坐标, y 是结点在竖直方向的坐标. 给定 t 时刻的速度场 $v^t(x, y, z, t)$ 和温度场 $T^t(x, y, z, t)$. 假设上、下板的温度差为 δT . 因为问题只涉及温度的差值, 为方便起见, 我们可给定上、下板的温度分别为 $-\delta T/2$ 和 $\delta T/2$. 将系统的动力学过程分解为 Euler 步和 Lagrange 步, 前者模拟浮力效应、扩散效应以及粘性和压力效应, 后者模拟对流效应, 在同一时间间隔内二者独立、并行完成.

构成 Euler 步的前提是: (1) 在同一水平面内温度较高的结点上的流体受到竖直向上的浮力, 从而将获得 y 方向的速度增量; (2) 热扩散效应导致内能(即温度)的扩散; (3) 粘性效应导致动量(即速度)的扩散; (4) 对于不可压缩流体, 压力效应要求速度场的散度为 0. Euler 步可表示为如下逐次迭代的耦合映象函数:

() 浮力效应

$$v_y^*(x, y, z, t) = v_y^t(x, y, z, t) - C \Delta_{(x,z)} T^t(x, y, z, t), \quad (1)$$

$$v_x^*(x, y, z, t) = v_x^t(x, y, z, t), \quad (2)$$

$$v_z^*(x, y, z, t) = v_z^t(x, y, z, t), \quad (3)$$

这里, 带*号的变量表示速度分量的中间值, $\Delta_{(x,z)}$ 是水平面内的 Laplace 算子, C 是一个常量. 在(1)式中, $\Delta_{(x,z)} T^t < 0$ 表示该结点上的流体温度高于同一水平面内相邻结点上的流体温度, 因而浮力使该结点上的流体获得 y 方向向上的速度增量; 反之, 则获得 y 方向向下的速度增量. 若选取均匀网格, 且 x, y, z 三个方向的结点间距均取为 h , $\Delta_{(x,z)}$ 的离散形式为

$$\begin{aligned} \Delta_{(x,z)} A(x, y, z) = & \frac{1}{h^2} [A(x+h, y, z) + A(x-h, y, z) \\ & + A(x, y, z+h) + A(x, y, z-h) \\ & - 4A(x, y, z)]. \end{aligned} \quad (4)$$

() 热扩散效应

$$T'(x, y, z, t) = T^t(x, y, z, t) + \kappa \Delta T^t(x, y, z, t), \quad (5)$$

这里, 带'号的变量表示中间变量, Δ 是三维 Laplace 算子, Δ 在上述均匀网格中的离散形式为

$$\Delta A(x, y, z) = \frac{1}{h^2} [A(x+h, y, z) + A(x-h, y, z) + A(x, y+h, z) + A(x, y-h, z) + A(x, y, z+h) + A(x, y, z-h) - 6A(x, y, z)]. \quad (6)$$

(3) 粘性和压力效应

$$v'_x(x, y, z, t) = v_x^*(x, y, z, t) + \eta \Delta v_x^*(x, y, z, t) + \gamma \partial/\partial x (\nabla \cdot \mathbf{v}^*), \quad (7)$$

$$v'_y(x, y, z, t) = v_y^*(x, y, z, t) + \eta \Delta v_y^*(x, y, z, t) + \gamma \partial/\partial y (\nabla \cdot \mathbf{v}^*), \quad (8)$$

$$v'_z(x, y, z, t) = v_z^*(x, y, z, t) + \eta \Delta v_z^*(x, y, z, t) + \gamma \partial/\partial z (\nabla \cdot \mathbf{v}^*), \quad (9)$$

这里, η 是流体的运动粘性系数, γ 是一个常量. 严格地说, 上面给出的耦合映象函数并未严格满足 $\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$ 这个前提. 但是, 由 (7)~(9) 式可知,

$\nabla \cdot \mathbf{v}' = \nabla \cdot \mathbf{v}^* + (\eta + \gamma) \Delta (\nabla \cdot \mathbf{v}^*)$. 如果 $\nabla \cdot \mathbf{v}^*$ 足够小, 适当选取大于 0 的常量 γ , 使方程 (7)~(9) 右边最后一项对动量扩散效应的影响不大, 而这些项的加入足以使 $\nabla \cdot \mathbf{v}'$ 大幅度扩散, 使之不致增长过大. 本文的计算结果表明, 在逐次迭代过程中 $\nabla \cdot \mathbf{v}'$ 始终是一个小量. 以上三组耦合-映象函数构成一个 Euler 步.

Lagrange 步模拟速度和内能的对流. 设想 t 时刻在每个网格结点 (x, y, z) 上放置一个虚拟质点, 其速度为 $\mathbf{v}(x, y, z)$, 温度为 $T(x, y, z)$. $t+\Delta t$ 时刻这个“质点”运动到 $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$. 这里, $\delta x = \Delta t v_x(x, y, z)$, $\delta y = \Delta t v_y(x, y, z)$, $\delta z = \Delta t v_z(x, y, z)$. 一般来说, $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ 并非网格结点, 因而需要将“质点”携带的变量分配到网格结点上. 最简单的分配方法是一阶近似的杠杆原理, 应用这个方法可将每个“质点”上的变量独立地分配于离它最近的 6 个结点. 得到 $t+\Delta t$ 时刻所有网格结点上的变量分布后, 就完成了 Lagrange 步.

综合以上所述, CML 模型每个时间步的计算过程可表示为

$$\underbrace{\{ \mathbf{v}^t(x, y, z); T^t(x, y, z) \} \rightarrow \{ \mathbf{v}^*(x, y, z); T^t(x, y, z) \} \rightarrow \{ \mathbf{v}'(x, y, z); T'(x, y, z) \}}_{\text{Euler 步}} \rightarrow \{ \mathbf{v}^{t+\Delta t}(x, y, z); T^{t+\Delta t}(x, y, z) \} \quad (\text{Lagrange 步}) \dots \dots \rightarrow \{ \mathbf{v}^{t+\Delta t}(x, y, z); T^{t+\Delta t}(x, y, z) \}$$

边界条件的选择如下: (1) 在上、下板面上, 速度取无滑移条件, 温度分别由等温条件确定, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, 0, z) &= \mathbf{v}(x, d, z) = 0, \\ T(x, 0, z) &= -T(x, d, z) = \delta T/2; \end{aligned} \quad (10)$$

(2) 对于大展高比问题, 即 $L/d \gg 1$ 的情况, 计算域四个侧面上的速度和温度可取周期条件, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(0, y, z) &= \mathbf{v}(L_x, y, z), \quad \mathbf{v}(x, y, 0) = \mathbf{v}(x, y, L_z), \\ T(0, y, z) &= T(L_x, y, z), \quad T(x, y, 0) = T(x, y, L_z), \end{aligned} \quad (11)$$

其中 L_x, L_z 分别为平板在 x 和 z 方向的尺度. 若上、下平板的水平尺度有限, 则侧面上速度和温度的边界条件按容器侧壁上的具体情况确定.

当几何参数 L_x, L_z 和 d 设定后, 上述数学模型中还有 5 个需要确定的参数, 即 $\delta T, C, \eta, \kappa$ 和 γ . 对于 δT , 我们给定 $\varepsilon = \delta T/(\delta T)_c - 1$, 其中 $(\delta T)_c$ 是流体开始发生对流时上下平板温度差的阈值. 对于 η 和 κ , 我们给定 η 和 Pr . 常量 C 和 γ 的取值由试算确定. 在本文的数值计算中取 $C=0.25, \gamma=6\eta$. 计算结果表明, 在逐次迭代过程中 $\nabla \cdot \mathbf{v}'$ 始终是一个很小的量.

2 数值模拟结果

在这一节, 我们分别展示 $L/d=5$ 和 $L/d=30$ 两个展高比的正方形平板间 RBC 的 CML 模拟结果. 前一个模拟的目的是再现 RBC 的基本结构形态, 如随参数 ε 的大范围增长 RBC 由层流向湍流转捩的几个阶段, 以及水平面内胞状结构的形成. 后一个模拟的目的是揭示大展高比 RBC 水平面内时-空混沌结构形态形成的基本规律.

在数值模拟中, 为了确定参数 ε , 需要先确定开始发生对流时上、下平板温度差的阈值 $(\delta T)_c$. 由 $Ra_c=1708, (\delta T)_c=1708 \nu \kappa / \alpha g d^3$. 可见阈值 $(\delta T)_c$ 与流体的性质和上、下平板间的距离有关. 对于同一种流体, $(\delta T)_c \propto d^{-3}$. 由于本文所作数值模拟只要求定性地考察 RBC 的结构形态, 我们无需精确计算某种流体的 $(\delta T)_c$, 因而可用试算方法大致确定这个阈值.

2.1 展高比较小情况下的结构形态

在这部分数值模拟中, 取 $L/d=5, \eta=0.033, Pr=1, C=0.25, \gamma=0.2$. 为了促成结构形态的形成, 在沿 y 方

向线性分布的初始温度场上叠加局部的微小扰动,扰动的幅值小于 $\delta T/100$. 图1示出模拟所得不同 ε 值时温度等于平均温度($T=0$)的等值面. 图2示出 $x=L/2$ 截面上不同 ε 值时的温度分布. 由图1和图2可见,对流开始发生后,平板之间出现由下而上的热羽流和由上而下的冷羽流. 随 ε 值的增大,羽流结构的水平尺度减小,而在空间三个方向的尺度分级增多. 由图2可见, ε 稍大于零时对流即已发生. $\varepsilon=15$ 时,羽流结构是光滑的,这对应于层流流动. $\varepsilon=50$ 时,热羽流已部分转捩为湍流状态,但湍流状态尚未完全穿透整个流体层. 当 $\varepsilon=200$ 时,热羽流和冷羽流都转变为在空间三个方向极不规则的充分发展湍流状态. Libchaber的研究组^[19]在实验中已观察到这个转捩过程. 他们将后两种状态分别定义为软湍流和硬湍流,

同时指出,软湍流对应的对流层中的温度概率分布为类 Gauss 分布,而硬湍流对应的对流层中的温度概率分布近似为指数分布. 我们对 ε 取不同值时计算域中间部分 $\left(y=\frac{1}{6}d \sim \frac{5}{6}d\right)$ 所有网格点在 10^4 个时间步的温度值作了概率统计,得到的温度概率分布如图3所示. 由这个图可见,当 $\varepsilon=50$ (软湍流)时,温度的概率分布接近高斯分布;当 $\varepsilon=200$ (硬湍流)时,温度的概率分布集中于上、下平板温度的平均值,这表明在硬湍流的情况下对流层中流体的温度已掺混得很均匀了. 图4示出 $\varepsilon=0.6$ 时的速度矢量场. 由图可见,自下而上的热羽流和自上而下的冷羽流在平板之间形成涡卷,这些涡卷在水平截面内构成随机分布的小涡环. 图5示出 $\varepsilon=0.1$ 和 $\varepsilon=0.5$ 时下平板表面

图1 不同 ε 值时温度等于平均温度($T=0$)的等值面

图 2 $x=L/2$ 截面上不同 ε 值时的温度分布

图 3 计算域中间部分 ($y=\frac{1}{6}d \sim \frac{5}{6}d$) 所有网格点在 10^4 个时间步的温度的概率分布

的结构形态, 这些胞状结构是冷、热羽流在下平板表面上的横截面. 上述数值模拟结果都与实际观察结果定性一致. 它们与在干涸湖底所见的结构形态是相似的.

2.2 大展高比情况下的结构形态

在这部分数值模拟中, 取 $L/d=30$, $\eta=0.033$, $C=0.25$, $\gamma=0.2$. 先考虑 $Pr=1$ 的情况. 若在沿 y 方向线性分布的初始温度场上叠加一个规则的微小扰动, 扰动沿水平中截面内每条平行于 z 轴的网格线按同一正弦规律分布, 扰动温度的幅值小于 $\delta T/100$. 给定 $\varepsilon=0.3$, 数值模拟时按时间推进 3000 步, 所得水平中截面内的温度分布如图 6 所示. 图中深色表示低温, 浅色表示高温. 由图 6 可见, 在规则的初始条件下, 当参数 ε 较小时 RBC 的结构表现为理想直涡卷形态.

直涡卷之间的距离(波长)约为上、下平板间距离的 2 倍, 这与理论分析结果(见文献[5])是一致的. 若给定 $\varepsilon=0.7$, 在相同的规则初始条件下, 数值模拟所得水平中截面内的温度分布如图 7 所示. 由图 7 可见, 即使时间推进 12000 步, RBC 的结构仍基本上保持为直涡卷形态, 只在图形右侧靠近边界处有不规则的缺陷, 表现为涡卷的微小曲率和靠近边界处温度分布的局部颗粒状不规则性. 这些缺陷随时间发展极为缓慢, 因而可以说, 在这种情况下直涡卷形态仍基本上是稳定的. 在 $\varepsilon=0.7$ 时, 直涡卷之间的距离约与上、下平板间的距离相等. 可见参数 ε 愈大, 结构形态的水平尺度愈小.

如果保持上面给定的几何参数和模型方程中的常数不变, 但在计算域内每个网格结点上对沿 y 方向线性分布的初始温度场叠加一个随机的微小扰动, 随机分布函数是由计算机产生的白噪声, 扰动的幅值仍小于 $\delta T/100$. 对于给定的几个 ε 值, 数值模拟所得水平中截面内的温度分布如图 8 所示. 由图可见, 在随机的初始条件下, 当 $\varepsilon=0.3$ 时, 涡卷在整个对流空间内卷曲, 并在水平面内开始形成螺旋状结构. 当 $\varepsilon=0.7$ 时, 对流空间内基本上已不存在直涡卷, 在水平面内普遍形成极不规则的螺旋状结构, 其中包含数目大致相等的左螺旋和右螺旋以及少量封闭的小型靶标结构. 这些结构(弯曲的涡卷)大致都与边界垂直. 上述特征表明, 本文应用 CML 模拟得到的 RBC 的结构形态与 Morris 等在实验中发现的大展高比正方形容器中气体 RBC 的螺旋-缺陷混沌(见文献[7]中图 5)是定性一致的.

实验结果[3,9]表明, 当 Prandtl 数自 $Pr=1$ 不断增大时, 大展高比 RBC 中的螺旋型结构逐渐向靶标型结

图4 $z=L/2$ 截面上的速度矢量图($\varepsilon=0.6$)

图5 CML 模拟的下平板表面的胞状结构

图6 $\varepsilon=0.3$ 时在规则初始条件下 CML 模拟所得水平中截面内的温度分布($Pr=1$)

构转化. 当 $Pr=4$ 时, 大展高比 RBC 的结构形态主要呈靶标型(见文献[9]中图 1). 这里, 图 9 示出用 CML

模拟得到的两个典型的靶标型结构. 保持上述算例中所设的几何参数不变, 给定 $Pr=4$, $\varepsilon=0.7$, 在计算域内每个网格点上对沿 y 方向线性分布的初始温度场上叠加一个幅值小于 $\delta T/100$ 的随机扰动, 应用 CML 作数值模拟, 在按时间步推进 3000 步后, 可得到如图 9(a)所示的结构. 这个结构与文献[9]在实验中得到的分布小靶标型结构类似. 图中显示的大多数结构元素接近封闭的同心圆. 如果只在计算域边界附近的网格线上对沿 y 方向线性分布的初始温度场上叠加上幅值小于 $\delta T/100$ 的随机扰动, 则由 CML 数值模拟得到如图 9(b)所示的大靶标型结构. 大靶标型结构是以计算域中心为中心的同心涡环. 形成这个较规则的大靶标型结构的原因是我们边界附近给定了统计对称的初始扰动.

3 结论

在各种物理问题中非线性动力系统偏离平衡态后的发展有某些普适性的规律, 在不同条件下系统形成各种不同的结构形态就属于这种规律. CML 模

图 7 $\varepsilon=0.7$ 时在规则初始条件下 CML 模拟所得水平中截面内的温度分布 ($Pr=1$)

图 8 不同 ε 值时在随机初始条件下 CML 模拟所得水平中截面内的温度分布 ($Pr=1$)

图 9 $Pr=4$ 时由 CML 模拟得到的靶标形结构($\varepsilon=0.7$)

(a) 完全随机初始扰动, (b) 只在侧面边界附近加初始扰动

型在理论意义上是一个非线性动力系统, 应用这种模型的主要目的在于模拟物理问题中动力系统发展的这些普适性规律。

本文应用 CML 模型模拟 RBC 中的结构形态, 所

得数值模拟结果多方面再现了实验观测结果, 特别是近年来在大展高比 RBC 实验中发现的新型的结构形态, 如理想直涡卷、螺旋-缺陷混沌和靶标型结构等。数值模拟表明, 空间分布的非线性动力系统

离平衡态后的初始阶段, 结构形态的形成对于初始条件是非常敏感的. 就 Pr 接近 1 的流体大展高比的 RBC 而言, 若初始条件是规则的, 当 $\varepsilon=0.3\sim 0.7$ 时, 数值模拟随时间推进的结果形成稳定的直涡卷; 若在规则的初始条件上叠加随机扰动, 则在参数 ε 的同一范围内数值模拟随时间推进的结果形成水平面内固有的螺旋型时-空混沌形态, 即螺旋-缺陷混沌. 因而可信, 在 RBC 偏离平衡态后的某一参数 ε 的范围内, 理想直涡卷和螺旋-缺陷混沌是相互竞争的两类稳定的吸引子. 初始条件(初始扰动)对于形成这两种结构形态中的哪一种起决定性作用. 对于 $Pr \gg 4$ 的大展高比 RBC, 其结构形态主要呈靶标型, 而靶标结构的尺度和分布形态亦显著地依赖于初始条件. 上述数值模拟结果都与实验研究结果一致.

与应用简单映象函数(例如 logistic 映象函数)的 CML 模型相比较, 本文应用的模型在映象过程中考虑了更多的热对流的物理机制, 因而可以更准确地模拟对流现象的主要特征. 尽管如此, 这个模型的精度仍然无法与应用流体动力学方程的直接数值模拟相比, 它不可能精确地再现 RBC 的速度场和温度场. 但对于 RBC 中出现的各种结构形态, 这个模型的模拟结果与实验结果符合得很好. 这说明 RBC 这个动力系统中结构形态的形成与模型的细节关系不大.

我们认为, 耦合映象格子模型至少有以下应用价值: (1) 应用这种模型模拟动力系统结构形态比应用直接数值模拟要便捷得多. 进一步研究这种模型并推广应用于那些我们还不能准确写出其发展方程的动力系统(例如心脏房颤问题), 其应用价值就更显著了. (2) 既然应用这种模型可以逼真地模拟实验中发现的 RBC 中的复杂现象(包括流动由层流到软/硬湍流的过渡以及那些物理机制目前还不很清楚的现象), 这就进一步论证了: 湍流是一个由确定的非线性动力系统随时间发展而来的流体运动的混沌状态, 它遵从一般非线性动力系统发展的普适性规律.

致谢 本工作为国家自然科学基金资助项目(批准号: 10232020).

参 考 文 献

- Newell A C, Passot T, Lega J. Order parameter equations for patterns. *Annu Rev Fluid Mech*, 1993, 25: 399~453 [DOI]
- Cross M C, Hohenberg P C. Pattern formation out of equilibrium. *Rev Mod Phys*, 1993, 65(3): 851~1112 [DOI]
- Bodenschatz E, Pesch W, Ahlers G. Recent developments in Rayleigh-Bénard convection. *Annu Rev Fluid Mech*, 2000, 32: 709~778 [DOI]
- Busse F H. Transition to turbulence in Rayleigh-Bénard convection. In: *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*. Swinney, Gollub: Springer-Verlag, 1981
- Manneville P. *Dissipative Structures and Weak Turbulence*. New York: Academic Press, 1990
- Morris S W, Bodenschatz E, Cannell D C, et al. Spiral defect chaos in large aspect ratio Rayleigh-Bénard convection. *Phys Rev Lett*, 1993, 71(13): 2026~2029 [DOI]
- Morris S W, Bodenschatz E, Cannell D C, et al. The spatio-temporal structure of spiral-defect chaos. *Physica D*, 1996, 97: 164~179
- Cakmur R V, Egolf D A, Plapp B B, et al. Bistability and competition of spatiotemporal chaotic and fixed point attractors in Rayleigh-Bénard convection. *Phys Rev Lett*, 1997, 79(10): 1853~1856 [DOI]
- Assenheimer M, Steinberg V. Transition between spiral and target states in Rayleigh-Bénard convection. *Nature*, 1994, 367: 345~347 [DOI]
- Ahlers G. Experiments on spatio-temporal chaos. *Physica A*, 1998, 249: 18~26
- Cross M C. Theoretical modeling of spiral chaos in Rayleigh-Bénard convection. *Physica D*, 1995, 97(1-3): 65~80
- Pesch W. Complex spatiotemporal convection patterns. *Chaos*, 1993, 6(3): 384~357
- Xi H-W, Gunton J D, Vinals J. Spiral defect chaos in a model of Rayleigh-Bénard convection. *Phys Rev Lett*, 1993, 71(13): 2030~2033 [DOI]
- Bestehorn M, Fantz M, Friedrich R, et al. Spiral patterns in thermal convection. *Z Phys B*, 1992, 88(1): 93~94
- Decker W, Pesch W, Weber A. Spiral defect chaos in Rayleigh-Bénard convection. *Phys Rev Lett*, 1994, 73(5): 648~651 [DOI]
- Kaneko K. Period-doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled map lattice: toward a prelude of a "field theory of chaos". *Prog Theor Phys*, 1984, 72: 480
- Kaneko K. *Theory and Applications of Coupled Map Lattices*. New York: John Wiley & Sons, 1993
- Yanagita T, Kaneko K. Coupled map lattice model for convection. *Phys Lett A*, 1993, 175: 415~420 [DOI]
- Heslot F, Castaing B, Libchaber A. Transition to turbulence in helium gas. *Phys Rev A*, 1987, 36: 5870~5873 [DOI]