Timoshenko梁理论的物理本质及与Euler梁理论的关系研究

李录贤^{1*}, 裴永乐¹, 段铁城², 耿培帅¹

1. 西安交通大学航天航空学院, 机械结构强度与振动国家重点实验室, 陕西省先进飞行器服役环境与控制重点实验室, 西安 710049;

2. 昆明理工大学航空学院, 昆明 650500

* E-mail: luxianli@mail.xjtu.edu.cn

收稿日期: 2017-03-01; 接受日期: 2017-07-12; 网络版发表日期: 2018-02-12

国家自然科学基金(批准号: 11672221, 11272245, 11321062)资助项目

摘要 与Euler梁理论相比, Timoshenko梁理论具有更高精度和更宽长细比适用范围, 但存在两方面不足: 一方面, 它是能量不自洽的; 另一方面, 它不能以力学方式合理退化为Euler梁理论. 本文从高次位移模式退化角度, 剖析了具有线性位移模式的低阶梁理论. 本文工作表明, 无剪切的Euler梁理论和一阶剪切变形梁理论是满足不同基本条件的两类低阶梁理论, 不能相互转化; Timoshenko梁理论可被视为改进的一阶剪切变形理论, 因而也不能退化为Euler梁理论. 最后, 推导了具有高次位移模式的低阶梁理论, 并揭示出Timoshenko梁理论上与这种梁理论等效的物理本质.

关键词 Timoshenko梁理论, Euler梁理论, 高次位移模式, 线性位移模式

1 问题的提出

1.1 梁理论研究中的基本假设

如图1所示, 考察在 x - z 面内具有单位宽度的平面结构, 其长度为 L , 厚度为 h . 本文研究在各向同性材料、线弹性、小变形3个一般性假设下展开.

作为一个平面应力问题, 三维弹性理论中的6个独立应力分量(即 σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} 和 τ_{xz})减少成了3个(即 σ_x , σ_z 和 τ_{xz}), 3个独立位移分量(即 u_x , u_y 和 u_z)减少成了2个(即 u_x 和 u_z). 当采用平面应力问题求解时, 其目的是求解随二维坐标(x , z)变化的二维位移场(u_x , u_z); 当采用

梁理论求解时, 其目的是求解随一维长度坐标 x 变化的挠度 w 或/和截面转角, 本文将二者统称为梁的广义位移.

对于梁问题, 考虑到 h/L 较小的结构特点, 通常采用如下两个基本假设.

基本假设1: 梁的横向正应力 σ_z 相对于其他两个应力(即横截面上的正应力 σ_x 和剪应力 τ_{xz})较小, 因而在梁理论研究中忽略不计, 即^[1]:

$$\sigma_z = 0. \quad (1)$$

运用基本假设1, 对于梁结构, 弹性理论中的本构关系简化为

引用格式: 李录贤, 裴永乐, 段铁城, 等. Timoshenko梁理论的物理本质及与Euler梁理论的关系研究. 中国科学: 技术科学, 2018, 48: 360–368
Li L X, Pei Y L, Duan T C, et al. Study on physical essence of the Timoshenko beam theory and its relation with the Euler beam theory (in Chinese).
Sci Sin Tech, 2018, 48: 360–368, doi: 10.1360/N092017-00062

图 1 矩形截面梁示意图

$$\begin{cases} \sigma_x = E\varepsilon_x, \\ \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \end{cases} \quad (2)$$

其中, ε_x 和 γ_{xz} 分别为横截面上的正应变和剪应变. 对于小变形问题, 我们有:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \partial u_x / \partial x, \\ \gamma_{xz} = \partial u_z / \partial x + \partial u_x / \partial z. \end{cases} \quad (3)$$

基本假设2: 横向正应变 ε_z 略去不计, 即^[1]:

$$\varepsilon_z = 0. \quad (4)$$

式(4)意味着

$$\partial u_z / \partial z = 0. \quad (5)$$

也就是说, 横向位移 u_z 不随梁的厚度坐标 z 发生变化.

1.2 Timoshenko梁理论的内涵

Timoshenko梁理论(本文简称为TBT)是具有挠度和转角两个广义位移的梁理论. 为叙述方便, 根据Timoshenko的原创性工作^[2], 这里将TBT的内涵以本文的符号予以总结.

在TBT中, 挠度 $w(x)$ 定义为中性轴处的横向位移, 即:

$$w(x) = u_z(x, 0). \quad (6)$$

根据基本假设2, 即式(5), 我们可进一步得到:

$$w(x) = u_z(x, z). \quad (7)$$

实际上, 梁的挠度还可定义为截面的平均横向位移¹⁾, 即:

$$w(x) = \frac{1}{A} \int_A u_z(x, z) dA, \quad (8)$$

其中, A 为梁的横截面面积.

考虑到式(5), 在式(8)的平均挠度概念下, 式(7)显然也成立, 表明梁的这两种挠度定义在基本假设2下完全相同.

在TBT中, 截面转角定义为中性轴转角 ψ , 即:

$$\psi = \left. \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=0}. \quad (9)$$

运用式(9), TBT中假定轴向位移按如下变化:

$$u_x = z \cdot \psi. \quad (10)$$

在TBT中, 平衡微分方程组为

$$\begin{cases} M' - Q = 0, \\ Q' + q(x) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

其中, M 和 Q 分别为弯矩和剪力, 本文统称为广义应力, 二者的定义分别为

$$\begin{cases} M = \int_A z \cdot \sigma_x dA, \\ Q = \int_A \frac{dz}{dz} \cdot \tau_{xz} dA. \end{cases} \quad (12)$$

需要说明的是, 式(12)之二式用 dz/dz 来表示1, 是为了体现与式(12)之一式的关联性, 这对高次位移模式中高阶广义应力的定义尤为重要^[3-8]. 稍后将会看到, 式(11)的平衡方程将导致关于挠度的4阶(低阶)常微分方程, 于是我们称式(11)为低阶梁理论的平衡方程组.

TBT中的本构关系为

$$\begin{cases} M = EI\psi', \\ Q = KGA(\psi + w'), \end{cases} \quad (13)$$

其中, K 称为剪切修正系数, 是Timoshenko引入的一个小于1的正常数, 以反映横截面上不均匀的剪应力分布. I 为截面的惯性矩, 其含义为

$$I = \int_A z^2 dA. \quad (14)$$

在TBT中, 梁问题的边界条件为

$$\begin{cases} w & \text{or } Q, \\ \psi & \text{or } M. \end{cases} \quad (15)$$

1) 这里引入沿截面平均横向位移对梁的挠度进行定义, 将与式(12)之二式定义剪力的方式相同, 体现了厚度坐标 z 方向上梁理论物理量定义的一致性.

式(10)的位移假设、式(11)的平衡方程组、式(13)的本构关系以及式(15)的边界条件构成了一套完整的TBT体系.

运用式(13)的本构关系, 式(11)的平衡方程组最终以挠度 w 可表示为

$$EIw^{(4)} = q(x) - \frac{EI}{KGA}q''(x). \quad (16)$$

进一步, 通过挠度 w 可将转角 ψ 表示为

$$\psi = -w' - \frac{EI}{KGA} \left[w'' + \frac{q'(x)}{KGA} \right] \quad (17)$$

1.3 Timoshenko梁理论的能量不自洽性

根据弹性理论及式(10), 考虑到轴向变形和剪切变形, 对于TBT, 梁结构沿长度方向的应变能密度可表示为

$$\begin{aligned} U_T &= \frac{1}{2} \int_A (E\epsilon_x^2 + G\gamma_{xz}^2) dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A [Ez^2\psi'^2 + G(\psi + w')^2] dA \\ &= \frac{1}{2} EI\psi'^2 + \frac{1}{2} GA(\psi + w')^2. \end{aligned} \quad (18)$$

于是, 我们可得到

$$\begin{cases} \partial U_T / \partial \psi' = EI\psi' = M, \\ \partial U_T / \partial (\psi + w') = GA(\psi + w'). \end{cases} \quad (19)$$

式(19)之二式表明, TBT中以式(13)之二式表示的剪力 Q 与 $(\psi + w')$ 不是功共轭的, 也就是说TBT是能量不自洽的.

实际上, 结合式(2)之二式、式(3)之二式、式(7)及式(10), 式(12)之二式的剪力定义将给出:

$$Q = GA(\psi + w'). \quad (20)$$

式(20)表明, TBT中以式(13)之二式表示的剪力 Q 与TBT轴向位移假设式(10)和剪力定义式(12)之二式不一致, 是TBT不自洽性的另一种表现形式.

为了消除这种不自洽现象, 有些研究者^[9,10]将式(18)的应变能密度修改为

$$\bar{U}_T = \frac{1}{2} EI\psi'^2 + \frac{1}{2} KGA(\psi + w')^2. \quad (21)$$

这样就可得到:

$$\partial \bar{U}_T / \partial (\psi + w') = KGA(\psi + w'). \quad (22)$$

式(21)虽可导得与式(13)相同的本构关系式(22), 但由于与式(18)不等价, 式(21)表示的应变能仍然没有从根本上解决TBT的能量不自洽问题.

1.4 Timoshenko梁理论向Euler梁理论的退化

TBT比Euler梁理论(本文简称为EBT)具有更高的精度和更宽的长细比适用范围, 这已成为大家普遍认可的共识, 因而, 认为TBT可退化为EBT作为其特殊情形是一个很自然的想法.

我们知道, TBT与EBT的主要区别在于是否考虑了截面的剪切变形. 观察发现, 当截面剪切刚度²⁾ $KGA \rightarrow \infty$ 时, 式(16)从数学角度可退化为

$$EIw^{(4)} = q(x). \quad (23)$$

此时, 式(17)的转角相应地可退化为

$$\psi = -w'. \quad (24)$$

将式(24)代入式(10), 位移模式则退化为

$$u_x = -z \cdot w'. \quad (25)$$

将式(24)代入式(12)之一式, 再运用式(2)之一式和式(3)之一式, 弯矩就可表示为

$$M = -EIw''. \quad (26)$$

式(25)、(26)和(23)分别就是EBT的位移模式、本构关系及控制微分方程. 这似乎预示着顺利实现了从TBT到EBT的退化.

但遗憾的是, $KGA \rightarrow \infty$ 是一个无法实现的条件! 首先, 剪切系数是一个最大为1的有限正值; 其次, 截面面积也是一个有限值, 而且在梁问题中还是一个小尺度参数; 这样, 欲使 $KGA \rightarrow \infty$, 只能假定材料剪切模量 G 趋于无限^[1], 在正常泊松比下此时弹性模量 E 无疑也将趋于无限, 使得梁结构不再成为弹性体、从而脱离梁理论研究的范畴.

TBT理论既不是能量自洽的, 又不能退化为EBT, 但却具有更高精度和更宽长细比适用范围, 因而, 需要更进一步研究, 以揭示集这些矛盾特性于一身的TBT的物理本质.

2) 从数学角度, $KGA L^2/EI \rightarrow \infty$ 也是式(16)退化的一个条件, 对矩形截面梁相当于 $L^2/h^2 \rightarrow \infty$, 但考虑到TBT并不限于这种特殊尺寸的梁结构, 本文采用具有剪切刚度含义的 KGA 作为退化条件, 遵循了梁板问题研究的惯常做法^[1].

2 高次位移模式

2.1 梁问题的基本条件

一般地, 梁问题首先满足这样一个条件, 即:

基本条件1: 梁上下表面的剪应力 τ_{xz} 自由.

根据式(2)之二式, 该条件可等效为剪应变 γ_{xz} 为0条件, 即:

$$\gamma_{xz}(x, \pm h/2) = 0. \quad (27)$$

另外, 以截面转角为广义位移的梁理论还需满足以下条件, 即:

基本条件2: 截面转角需要有明确的定义.

很多梁理论研究工作中的截面转角概念, 在使用之前并没有给出其明确定义, 甚至存在转角概念因其他因素变化而浑然不觉的情况^[5,11~14], 因而, 强调这一条件是非常有意义的. 事实上, 目前梁理论研究结果中出现的混乱局面、甚至存在的某些基本问题, 其根源正是对该条件没有给予足够重视.

2.2 高次轴向位移模式及其正交二项展开形式

考虑到2.1节讨论的两个基本条件, 矩形截面梁的轴向位移可一般性地表示为两项形式, 即:

$$u_x(x, z) = z \cdot f_1(x) + g(z) \cdot f_R(x), \quad (28)$$

其中, $f_1(x)$ 和 $f_R(x)$ 为两个关于 x 的待定函数, 将运用两个基本条件来确定.

式(28)中第一项为厚度坐标 z 的纯线性函数, 第二项中的 $g(z)$ 是 z 的纯高次奇函数, 以保证两项之间在数学上相互独立, 因此, $g(z)$ 满足

$$\begin{cases} g(z)|_{z=0} = (dg/dz)|_{z=0} = 0, \\ (dg/dz)|_{z=h/2} = (dg/dz)|_{z=-h/2} = c \neq 0. \end{cases} \quad (29)$$

现在运用两个基本条件来确定 $f_1(x)$ 和 $f_R(x)$.

首先根据基本条件2引入转角概念. 本文采用平均转角³⁾ $\phi(x)$ 作为截面转角的定义, 也就是说, 此时基本条件2意味着:

$$\phi(x) = \frac{1}{I} \int_A z \cdot u_x(x, z) dA, \quad (30)$$

其中, I 就是式(14)中已说明过的截面惯性矩.

将式(28)代入式(30)中, 可得:

$$\phi(x) = f_1(x) + \lambda \cdot f_R(x), \quad (31)$$

其中,

$$\lambda = \frac{1}{I} \int_A z \cdot g(z) dA. \quad (32)$$

由于 λ 恒不为0, 由式(31)解得:

$$f_R = [\phi(x) - f_1(x)] / \lambda. \quad (33)$$

于是, 横截面上的剪切变形可表示为

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} = & (f_1'(x) + w'(x)) \\ & + [dg(z)/dz][\phi(x) - f_1(x)] / \lambda. \end{aligned} \quad (34)$$

再考虑到基本条件1, 将式(34)代入式(27)可得到:

$$f_1(x) = \frac{c\phi(x) + \lambda w'(x)}{c - \lambda}. \quad (35)$$

最终得到矩形截面梁轴向位移模式的一般表示形式为

$$u_x(x, z) = z \cdot \frac{c\phi + \lambda w'}{c - \lambda} - \frac{g(z)}{c - \lambda}(\phi + w'). \quad (36)$$

式(36)经整理可重新表示为

$$u_x(x, z) = z \cdot \phi + \tilde{g}(z)(\phi + w'), \quad (37)$$

其中,

$$\tilde{g}(z) = \frac{\lambda z - g(z)}{c - \lambda}. \quad (38)$$

结合式(29)和式(30), $g(z)$ 满足:

$$\begin{cases} \tilde{g}(z)|_{z=0} = 0, \\ (d\tilde{g}/dz)|_{z=h/2} = (d\tilde{g}/dz)|_{z=-h/2} = -1, \\ \int_A z \cdot \tilde{g}(z) dA = 0. \end{cases} \quad (39)$$

式(39)之三式表明, $g(z)$ 与 z 在截面积分意义上具有正交性, 因而, 称式(37)为高次位移模式的正交二项展开表示.

这里需要强调的是, 运用式(9)的中性轴转角 ψ , 会得到与式(37)不同的表示形式, 但二者在数学上是等价的高次位移模式. 关于平均转角 ϕ 与中性轴转角 ψ 之间的关系将在4.2节予以探讨.

3) 此处采用截面平均转角对梁的截面转角进行定义, 与式(12)之一式定义梁弯矩的方式相同, 体现了长度坐标 x 方向上梁理论物理量定义的一致性.

3 具有线性位移模式的梁理论

3.1 线性位移模式——高次位移模式的退化

本节我们研究一般高次位移模式式(28)的退化情形.

我们知道, EBT和TBT包含共同的刚性截面假设, 即变形前后横截面保持为平面. 这一假设需要式(28)中与横截面翘曲相关的纯高次奇函数 $g(z)=0$, 也就是说, 从式(28)高次位移模式的退化角度, EBT和TBT在数学上具有相同的线性位移模式, 即:

$$u_x(x, z) = z \cdot f_1(x). \quad (40)$$

此时, 相应的剪切变形为

$$\gamma_{xz} = f_1(x) + w'. \quad (41)$$

式(40)的位移模式仅有一个待定函数 $f_1(x)$, 只需一个基本条件就可确定位移模式. 接下来, 我们考察2.1节中两个基本条件分别满足的情形.

3.2 只满足基本条件1的线性位移模式——无剪切变形低阶梁理论

若式(40)只满足基本条件1, 将式(41)代入式(27)中, 我们得到:

$$f_1(x) = -w'. \quad (42)$$

将式(42)代入式(40), 得到轴向位移模式的显式表达式为

$$u_x(x, z) = -z \cdot w'(x). \quad (43)$$

显然, 由式(41)和(42)可得到:

$$\gamma_{xz} = 0. \quad (44)$$

于是, 此情形下剪切变形恒为零. 此时的位移模式式(43)就是式(25)的EBT位移模式. 因此, 从高次位移模式的退化角度, EBT是一种不满足基本条件2(不需引入截面转角)、但满足基本条件1(符合上下表面剪应力自由)的具有线性位移模式的梁理论. 需要说明的是, 由于没有引入截面转角这一物理概念, 因而, 在EBT中将 $-w'$ 理解为截面转角是值得商榷的.

EBT中的线性位移模式因满足基本条件1导致剪切变形为零, 因而, EBT是不考虑剪切效应的梁理论, 相应地, 式(43)是不考虑剪切效应的线性位移模式. 考虑到控制微分方程可表示成挠度 w 的4阶常微分方程

式(23), EBT理论是无剪切变形低阶梁理论.

3.3 只满足基本条件2的线性位移模式——剪切变形低阶梁理论

若只满足基本条件2, 考虑式(30)的转角定义, 由式(40)可立即得到:

$$f_1(x) = \phi. \quad (45)$$

此时, 式(40)的轴向位移模式变为

$$u_x(x, z) = z \cdot \phi. \quad (46)$$

再由式(41), 梁的剪切变形成为

$$\gamma_{xz} = \phi + w'. \quad (47)$$

式(47)表明, 这种情形下的剪切变形在横截面上是均匀分布的. 根据式(9)和(46)中的平均转角 ϕ 在物理上也可解释为中性轴转角 ψ , 于是, 轴向位移式(46)与式(10)的TBT位移模式形式相同.

依据式(12)之二式剪力的定义, 不难得到:

$$Q = GA(\phi + w'). \quad (48)$$

式(48)虽也可考虑剪切效应, 但由于没有出现剪切修正系数 K , 与TBT的式(13)之二式则不同, 我们称此情形为一阶剪切变形理论(本文简称为FSDT). 此时, 得到以挠度 w 表示的控制微分方程为

$$EIw^{(4)} = q(x) - \frac{EI}{GA}q''(x). \quad (49)$$

式(49)是一个以挠度 w 表示的4阶常微分方程, 因而, FSDT是一阶剪切变形低阶梁理论.

比较式(16)与式(49)发现, 由于具有相同的线性位移模式, TBT可被视为是含截面剪切修正系数 K 的修正FSDT.

3.4 讨论

3.2节和3.3节从满足两个不同基本条件之一的角度, 分别得到了EBT和FSDT: EBT不涉及截面剪切效应, FSDT考虑了截面剪切效应. 虽然二者都是具有线性位移模式的低阶梁理论, 但由于所满足基本条件的物理意义不同, 这两种理论分属两种不同体系, 因而不可相互转化, 从而排除了作为修正FSDT的TBT退化为属于另一种体系的EBT的可能性, 因此, 1.4节的退化做法是不必要的.

4 TBT的本质探秘

4.1 高次位移模式下梁的基本方程

通常的广义应力包括弯矩和剪力. 弯矩定义式(12)之一式与截面上的正应力 σ_x 相关, 形式与同方向上的广义位移-平均转角-定义式(30)类似, 都是截面上厚度坐标 z 的加权积分平均; 剪力定义式(12)之二式与截面上的剪应力 τ_{xz} 相关, 形式与同方向上的广义位移-平均挠度-定义式(8)类似, 都是截面上的积分平均.

在式(37)的高次位移模式下, 依据式(12)的定义, 得到弯矩和剪力分别为

$$\begin{cases} M = EI\phi', \\ Q = K_p GA(\phi + w'), \end{cases} \quad (50)$$

其中, K_p 称为剪切刚度系数, 不难得到其含义为

$$K_p = (1/A) \int_A (1 + d\tilde{g}(z)/dz) dA. \quad (51)$$

若根据广义位移 w 和 ϕ , 定义梁问题的广义应变为

$$\begin{cases} \kappa = \phi', \\ \Gamma = \phi + w'. \end{cases} \quad (52)$$

那么, 式(50)就可表示为梁问题的本构关系, 即:

$$\begin{cases} M = EI\kappa, \\ Q = K_p GA\Gamma. \end{cases} \quad (53)$$

若仍然采用低阶梁理论的平衡方程组式(11)⁴⁾, 不难得到以挠度 w 表示的控制微分方程为

$$EIw^{(4)} = q(x) - \frac{EI}{K_p GA} q''(x). \quad (54)$$

进一步, 运用挠度 w 可将转角 ϕ 表示为

$$\phi = -w' - \frac{EI}{K_p GA} \left[w''' + \frac{q'(x)}{K_p GA} \right]. \quad (55)$$

边界条件为

$$\begin{cases} w & \text{or } Q, \\ \phi & \text{or } M. \end{cases} \quad (56)$$

4.2 TBT的物理本质

通过3.3节的推导可以看出, 若按线性位移模式, 只能得到FSDT, 不会出现任何附加系数. 但比较式

(54)与式(16)发现, 高次位移模式下剪切刚度系数 K_p 完全可理解为线性位移模式下TBT的剪切修正系数 K . 换句话说, 采用高次位移模式, 在剪切本构关系和控制微分方程中会很自然地出现这样一个系数. 于是, 研究不同高次位移模式下的 K_p 值是一个饶有兴趣的问题.

对于三次模式, 式(28)中的纯高次奇函数 $g(z)$ 无疑地取为

$$g^A(z) = z^3. \quad (57)$$

可以验证, 式(57)满足式(29)的逐项性质. 运用式(29)之二式及式(32), 得到三次轴向位移模式的相关系数为

$$\begin{cases} c^A = 3h^2/4, \\ \lambda^A = 3h^2/20. \end{cases} \quad (58)$$

再运用式(38), 可得

$$\tilde{g}^A(z) = \frac{z}{4} - \frac{5z^3}{3h^2}. \quad (59)$$

根据式(51), 最终得到

$$K_p^A = 5/6 \approx 0.8333. \quad (60)$$

显然, 此剪切刚度系数就是TBT中矩形截面梁通常所采用的剪切修正系数^[16-18], 从而解释了修正最初值2/3^[2]的合理性.

对于正弦模式, 式(28)中的纯高次奇函数 $g(z)$ 可取为

$$g^B(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right). \quad (61)$$

可以验证, 式(61)满足式(29)的逐项性质. 运用式(29)之二式及式(32), 得到正弦型轴向位移模式的相关系数为

$$\begin{cases} c^B = 1, \\ \lambda^B = 1 - 24/\pi^3. \end{cases} \quad (62)$$

再运用式(38), 可得

$$\tilde{g}^B(z) = -z + \frac{\pi^2 h}{24} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right). \quad (63)$$

根据式(51), 最终得到

$$K_p^B = \pi^2/12 \approx 0.8225. \quad (64)$$

4) 实际上, 高次位移模式可得到两个方程组成的自洽的高阶平衡方程组, 将导出关于挠度的高阶(6阶)常微分控制方程; 式(11)低阶梁理论的平衡方程组是这种高阶平衡方程组的渐近形式, 将导出关于挠度的低阶(4阶)常微分控制方程. 具体可参考文献[3,6,7,15].

显然, 此剪切刚度系数就是Mindlin板理论通常所采用的剪切修正系数^[19,20].

因此, 从求解挠度角度, TBT实际上与具有高次位移模式的低阶梁理论完全等效, 且剪切修正系数可运用式(51)予以计算, 这就是TBT的物理本质, 也是它之所以比EBT和FSDT具有更高精度和更宽长细比适用范围的原因.

另一方面, 虽然式(55)与式(17)在形式上是相同的, 但正如2.2节已强调的, 由于高次位移模式式(37)中的截面转角是平均转角 ϕ , 而不是中性轴转角 ψ , 因而, TBT中以中性轴转角表示的截面转角式(17)和边界条件式(15)之二式是需要纠正的.

实际上, 根据式(36)、并结合式(29)之一式, 式(9)可给出

$$\psi = \frac{c\phi + \lambda w'}{c - \lambda}. \quad (65)$$

式(65)经整理变成⁵⁾

$$\phi + w' = \alpha_T(\psi + w'), \quad (66)$$

其中,

$$\alpha_T = \frac{c - \lambda}{c}. \quad (67)$$

根据式(58), 对于三次模型, 可计算得到 $\alpha_T=4/5=0.8$; 根据式(62), 对于正弦模型, 可计算得到 $\alpha_T=24/\pi^3=0.7740$.

于是, 若以中性轴转角 ψ 表示, TBT中的式(15)之二式应被更正为

$$\alpha_T(\psi + w') - w' \quad \text{or} \quad M. \quad (68)$$

TBT中的式(17)应被更正为

$$\psi = -w' - \frac{EI}{\alpha_T KGA} \left[w''' + \frac{q'(x)}{KGA} \right]. \quad (69)$$

实际上, 本文对转角概念作用的重视也可用于重新评价其他梁板理论研究的结果, 包括Levinson低阶梁理论^[21~23]、Reddy高阶梁板理论^[7,8,24,25]等.

5 结论

本文从梁问题研究的两个基本假设出发, 总结了TBT的内涵、剖析了TBT中存在的不足; 引入梁问题研究中通常采用的两个基本条件, 提出了高次轴向位移模式的一般形式, 并将其表示成正交展开形式; 从高次位移模式的退化角度, 分析了两种不同线性位移模式分别对应的EBT及FSDT. 最后, 推导了高次位移模式下低阶梁理论的基本方程.

本文工作表明, 在梁问题两个基本假设和两个基本条件下, EBT和FSDT两种低阶梁理论, 数学上虽都具有线性轴向位移模式, 但分属两个不同体系, 致使EBT不涉及剪切、FSDT可考虑剪切, 因而后者不可转化为前者. TBT的物理本质是高次位移模式下的低阶梁理论, 因而比EBT和FSDT具有较高的求解精度和较宽的长细比适用范围. 仅从位移模式和控制微分方程角度, TBT可视为修正的FSDT, 因而, 与FSDT一样, 不能退化为另一体系的EBT.

参考文献

- 1 黄克智, 夏之熙, 薛明德, 等. 板壳理论. 北京: 清华大学出版社, 1987
- 2 Timoshenko S P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *London Edinburgh Dublin Philos Mag J Sci*, 1921, 41: 744-746
- 3 段铁城, 李录贤. 厚板的高阶剪切变形理论. *力学学报*, 2016, 48: 1096-1113
- 4 Duan T C, Li L X. The unified solution for a beam of rectangular cross-section with different higher-order shear deformation models. *Lat Am J Solids Struct*, 2016, 13: 1716-1737
- 5 Aydogdu M. A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Compos Struct*, 2009, 89: 94-101
- 6 Shi G. A new simple third-order shear deformation theory of plates. *Int J Solids Struct*, 2007, 44: 4399-4417
- 7 Reddy J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech*, 1984, 51: 745-752
- 8 Reddy J N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *Int J Solids Struct*, 1984, 20: 881-896

5) 实际中, 可通过给定常数 α_T 定义任意形式的截面转角概念, 从而根据式(66)建立与平均转角 ϕ 间的关系.

- 9 Bert C W. Simplified analysis of static shear factors for beams of nonhomogeneous cross section. *J Compos Mater*, 1973, 7: 525–529
- 10 Rychter Z. On the shear coefficient in beam bending. *Mech Res Commun*, 1987, 14: 379–385
- 11 Şimşek M, Reddy J N. Bending and vibration of functionally graded microbeams using a new higher order beam theory and the modified couple stress theory. *Int J Eng Sci*, 2013, 64: 37–53
- 12 Şimşek M. Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nucl Eng Des*, 2010, 240: 697–705
- 13 Groh R M J, Weaver P M. Static inconsistencies in certain axiomatic higher-order shear deformation theories for beams, plates and shells. *Compos Struct*, 2015, 120: 231–245
- 14 Lou J, He L, Du J. A unified higher order plate theory for functionally graded microplates based on the modified couple stress theory. *Compos Struct*, 2015, 133: 1036–1047
- 15 Bickford W B. A consistent higher order beam theory. *Devel Theor Appl Mech*, 1982, 11: 137–150
- 16 Kaneko T. On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams. *J Phys D-Appl Phys*, 1975, 8: 1927–1936
- 17 Murthy M V V. An improved transverse shear deformation theory for laminate anisotropic plates. NASA Technical Paper NO1903, L-14533, 1981
- 18 Reissner E. On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. *Int J Solids Struct*, 1975, 11: 569–573
- 19 Mindlin R D. Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates. *J Appl Phys*, 1951, 22: 316–323
- 20 Mindlin R D. Forced thickness-shear and flexural vibrations of piezoelectric crystal plates. *J Appl Phys*, 1952, 23: 83–88
- 21 Levinson M. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mech Res Commun*, 1980, 7: 343–350
- 22 Levinson M. A new rectangular beam theory. *J Sound Vib*, 1981, 74: 81–87
- 23 Levinson M. Further results of a new beam theory. *J Sound Vib*, 1981, 77: 440–444
- 24 Reddy J N, Wang C M. Relationships between classical and shear deformation theories of axisymmetric circular plates. *AIAA J*, 1997, 35: 1862–1868
- 25 Reddy J N, Wang C M, Lim G T, et al. Bending solutions of Levinson beams and plates in terms of the classical theories. *Int J Solids Struct*, 2001, 38: 4701–4720

Study on physical essence of the Timoshenko beam theory and its relation with the Euler beam theory

LI LuXian¹, PEI YongLe¹, DUAN TieCheng² & GENG PeiShuai¹

¹ State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Shaanxi Key Laboratory of Environment and Control for Flight Vehicle, School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

² College of Aviation, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China

Compared with the Euler beam theory, the Timoshenko beam theory has the advantages in solution accuracy and in applicable aspect ratios. However, it received some criticisms in two aspects: firstly, it is energy inconsistent, and secondly, it cannot be reduced to the Euler beam theory in a mechanics way. From the reduced standpoint of the higher-order displacement mode, the two lower-order beam theories endowed with a linear axial displacement are systematically studied. The present work shows that the shear free Euler beam theory is different from the first-order shear deformable beam theory because they are based on different conditions, and hence they cannot be mutually transformed. Thus, it is unnecessary to reduce the Timoshenko beam theory, which poses as an improved first-order shear deformable beam theory, to the Euler beam theory. The lower-order beam theory is derived on the assumption of the higher-order displacement mode, and the physical essence is revealed that, irrespective of the displacement mode, the Timoshenko beam theory is in essence such a lower-order beam theory.

Timoshenko beam theory, Euler beam theory, higher-order displacement mode, linear displacement mode

doi: [10.1360/N092017-00062](https://doi.org/10.1360/N092017-00062)