基于约束流的 Kaup-Newell 方程的 Darboux 变换的非线性化

献给胡和生教授 90 华诞

周汝光*, 陈洁

江苏师范大学数学与统计学院, 徐州 221116

E-mail: zhouruguang@jsnu.edu.cn, chenjie910315@126.com

收稿日期: 2017-04-12; 接受日期: 2017-06-02; 网络出版日期: 2017-06-19; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671177) 资助项目

摘要 本文研究 Kaup-Newell 方程的 Darboux 变换的非线性化. 基于 Kaup-Newell 方程的 Darboux 变换经过非线性化得到的映射是约束 Kaup-Newell 流的 Bäcklund 变换的假设, 本文获得了 Darboux 矩阵中的位势与特征函数之间的约束, 由此实现了 Kaup-Newell 方程的 Darboux 变换的非线性化, 生成了 4 个具有相同不变量的可积辛映射.

关键词 谱问题非线性化 Darboux 变换 Bäcklund 变换 约束 Kaup-Newell 流 可积辛映射

MSC (2010) 主题分类 37K10

1 引言

(1+1) 维孤立子方程的谱问题非线性化方法最早由 Cao^[1] 在 1988 年提出. 应用该方法, 孤立子方程的一个连续线性谱问题可非线性化生成一个有限维完全可积 Hamilton 系统 (称为约束孤立子流), 一个离散线性谱问题可非线性化生成一个可积辛映射^[2-6]. 所谓可积辛映射是指 $2N$ 维辛流形上存在 N 个独立的两两对合的不变量的映射^[7,8], 它是 Liouville 意义下完全可积系统的离散化版本. 可积辛映射将插值有限维可积 Hamilton 系统的解映到解, 即可积辛映射是插值有限维可积 Hamilton 系统的 Bäcklund 变换. 过去 30 年来, 谱问题非线性化方法已得到深入研究和广泛应用, 例如, 可积辛映射已用于有限维可积 Hamilton 系统及其含离散变量的孤立子方程的精确求解和数值求解^[9-12].

Darboux 变换是研究孤立子方程的重要工具, 它是孤立子方程的谱问题的特征函数之间保持谱矩阵形状不变的规范变换^[13]. 采用文献 [14, 15] 中的方式, 引进一个离散变量, 并通过变量的移位来表示变换后的量 (位势和特征函数), 那么 Darboux 变换就可看作离散线性谱问题. 自然就可以考虑 Darboux 变换的非线性化去生成可积辛映射.

英文引用格式: Zhou R G, Chen J. Nonlinearizations of Darboux transformations of Kaup-Newell equation based on the restricted Kaup-Newell flow (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 859–868, doi: 10.1360/N012017-00068

在谱问题非线性化过程中, 建立位势与特征函数之间的约束是关键. 目前通用的约束是曹策问最早提出的孤立子方程的 Lenard 梯度与谱参数关于位势的变分导数之间的约束^[1,2]. 理论上, Darboux 变换的非线性化也可循此进行, 但是多数情形下, 以 Darboux 变换为离散谱问题的保谱方程族的 Lenard 梯度和谱参数关于位势的变分导数的计算十分困难甚至无法进行. 因此, Darboux 变换的非线性化无论从简捷性还是可行性都需要另辟蹊径.

一个孤立子方程可能存在多个非平凡的基本 Darboux 变换. 例如, Ablowitz-Kaup-Newell-Segur 方程存在两个基本 Darboux 变换; Kaup-Newell 方程已找到 4 个基本 Darboux 变换^[16,17]. Darboux 变换中的 Darboux 矩阵可以含有孤立子方程的位势 (简称为老位势)、变换后得到的位势 (简称为新位势) 以及其他的任意函数. 由于孤立子方程的谱问题非线性化和 Darboux 变换的非线性化涉及的特征函数是相同的, 因此, Darboux 变换中老位势的约束在谱问题非线性化的前后应一致. 所以, 如果 Darboux 矩阵仅涉及老位势 (如本文的 Darboux 变换 T_1), Darboux 变换非线性化需要的约束就是孤立子方程谱问题非线性化的约束, 这种情形的 Darboux 变换非线性化非常简单. 但是, 多数情形下 Darboux 矩阵含有新位势或其他任意函数, 此时的 Darboux 矩阵的非线性化就需要补充新的约束. 为构建约束, 我们假设孤立子方程的 Darboux 变换非线性化得到的映射就是约束孤立子流的 Bäcklund 变换, 换句话说, 约束孤立子流是非线性化导出映射的插值 Hamilton 系统. 这个假设对多个具体实例已证明是正确的^[18-21]. 在此假设下, 约束孤立子流的 Bäcklund 变换的 Lax 表示自然就给出所需要的约束, 由此实现非线性化过程获得可积辛映射. 此外, 这个过程还能同时获得可积辛映射的 Lax 表示和不变量.

本文的第 2 节回顾 Kaup-Newell 方程的 Darboux 变换和 Bäcklund 变换, 以及约束 Kaup-Newell 流的一些可积性质. 第 3 节首先提出基于约束 Kaup-Newell 流进行 Kaup-Newell 方程的 Darboux 变换的非线性化的一般方法, 然后具体研究 Kaup-Newell 方程的 4 个基本 Darboux 变换的非线性化, 获得 4 个具有相同不变量的可积辛映射. 第 4 节是一个简要的小结.

2 预备知识

本节简要回顾 Kaup-Newell 方程的 Darboux 变换和 Bäcklund 变换, 给出约束 Kaup-Newell 约束流的一些基本性质. 详细内容可参见文献 [17,21].

2.1 Kaup-Newell 方程的 Darboux 变换和 Bäcklund 变换

Kaup-Newell 方程

$$\begin{cases} p_t = -\frac{1}{2}p_{xx} - 2(qp^2)_x, \\ q_t = \frac{1}{2}q_{xx} - 2(pq^2)_x \end{cases} \quad (2.1)$$

是著名的孤立子方程^[22], 它等价于 Kaup-Newell 谱问题

$$\phi_x = U\phi, \quad U \equiv U(\lambda, p, q) = \begin{pmatrix} -\lambda^2 & -2\lambda p \\ -2\lambda q & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

和辅助谱问题

$$\phi_t = V\phi, \quad V \equiv V(\lambda, p, q) = \begin{pmatrix} -\lambda^4 + 2pq\lambda^2 & -2p\lambda^3 + (p_x + 4qp^2)\lambda \\ -2q\lambda^3 + (-q_x + 4pq^2)\lambda & \lambda^4 - 2pq\lambda^2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

的相容条件

$$U_t - V_x + [U, V] = 0,$$

其中 $p = p(x, t)$, $q = q(x, t)$ 是位势, λ 是谱参数, $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ 称为特征函数.

线性变换

$$\tilde{\phi} = T\phi \quad (2.4)$$

称为 Kaup-Newell 方程 (2.1) 的 Darboux 变换, 如果它分别变换谱问题 (2.2) 和 (2.3) 成谱问题

$$\tilde{\phi}_x = \tilde{U}\tilde{\phi}, \quad \tilde{\phi}_t = \tilde{V}\tilde{\phi}, \quad (2.5)$$

且 $\tilde{U}$ 和 $\tilde{V}$ 分别与 U 和 V 有相同的形状, 即 $\tilde{U} = U(\lambda, \tilde{q}, \tilde{p})$, $\tilde{V} = V(\lambda, \tilde{q}, \tilde{p})$, 这里 $\tilde{\phi}$ 、 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 分别表示 ϕ 、 p 和 q 变换后对应的量; Darboux 矩阵 T 称为 Darboux 矩阵, 它可以依赖于 p 、 q 、 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 以及任意函数. 例如, Kaup-Newell 方程已找到如下 4 个基本 Darboux 变换.

命题 1 ^[17] Kaup-Newell 方程存在如下 4 个 Darboux 矩阵行列式为 1 的基本 Darboux 变换:

(1) Darboux 变换 T_1 :

$$\tilde{\phi} = T_1\phi, \quad T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{p}\lambda & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{q} = -p; \quad (2.6)$$

(2) Darboux 变换 T_2 :

$$\tilde{\phi} = T_2\phi, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 ab + 1 & \lambda b \\ \lambda a & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{1}{p}, \quad b = \frac{1}{q}; \quad (2.7)$$

(3) Darboux 变换 T_3 :

$$\tilde{\phi} = T_3\phi, \quad T_3 = \sqrt{-1} \begin{pmatrix} \lambda \frac{1}{a} + \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{b} \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \sqrt{p\tilde{q}}, \quad b = \sqrt{\frac{\tilde{q}}{p}}; \quad (2.8)$$

(4) Darboux 变换 T_4 :

$$\tilde{\phi} = T_4\phi, \quad T_4 = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \beta^2}} \begin{pmatrix} \lambda f & \beta \\ \beta & \frac{\lambda}{f} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

其中 $f = f(x, t)$ 是任意函数, β 是任意常数.

2.2 约束 Kaup-Newell 流

取 N 个互不相同的参数 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, 考虑相应的 N 重 Kaup-Newell 谱问题

$$\begin{pmatrix} \phi_{1j} \\ \phi_{2j} \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} -\lambda_j^2 & -2\lambda_j p \\ -2\lambda_j q & \lambda_j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1j} \\ \phi_{2j} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (2.10)$$

在特征函数与位势之间的约束

$$p = -\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle, \quad q = \langle \Lambda \Phi_2, \Phi_2 \rangle \quad (2.11)$$

下, 就得到约束 Kaup-Newell 流 [2]

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} -\Lambda^2 & 2\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle \Lambda \\ -2\langle \Lambda \Phi_2, \Phi_2 \rangle \Lambda & \Lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

其中 $\Phi_1 = (\phi_{11}, \dots, \phi_{1N})^T$, $\Phi_2 = (\phi_{21}, \dots, \phi_{2N})^T$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 Euclid 空间 $\mathbb{R}^N$ 的标准内积.

约束 Kaup-Newell 流 (2.12) 是一个完全可积 Hamilton 系统. 首先, 它能写成如下 Hamilton 形式:

$$\Phi_{1,x} = \frac{\partial H}{\partial \Phi_2}, \quad \Phi_{2,x} = -\frac{\partial H}{\partial \Phi_1},$$

其中 Hamilton 函数为 $H = -\langle \Lambda^2 \Phi_1, \Phi_2 \rangle + \langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle \langle \Lambda \Phi_2, \Phi_2 \rangle$.

其次, 直接计算可得如下两个命题.

命题 2 (2.12) 允许 Lax 表示

$$\frac{d}{dx} L(\lambda) = [A(\lambda), L(\lambda)] \triangleq A(\lambda)L(\lambda) - L(\lambda)A(\lambda), \quad (2.13)$$

其中

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^N \frac{2}{\lambda^2 - \lambda_j^2} \begin{pmatrix} -\lambda_j^2 \phi_{1j} \phi_{2j} & \lambda \lambda_j \phi_{1j}^2 \\ -\lambda \lambda_j \phi_{2j}^2 & \lambda_j^2 \phi_{1j} \phi_{2j} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} L_{11}(\lambda) & L_{12}(\lambda) \\ L_{21}(\lambda) & -L_{11}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda^2 & 2\lambda \langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle \\ -2\lambda \langle \Lambda \Phi_2, \Phi_2 \rangle & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

命题 3 关于正则 Poisson 括号

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial \phi_{1j}} \frac{\partial G}{\partial \phi_{2j}} - \frac{\partial F}{\partial \phi_{2j}} \frac{\partial G}{\partial \phi_{1j}} \right), \quad (2.15)$$

Lax 矩阵 $L(\lambda)$ 满足 r - 矩阵关系 [23]:

$$\{L_1(\lambda), L_2(\mu)\} = [r_{12}(\lambda, \mu), L_1(\lambda)] - [r_{21}(\lambda, \mu), L_2(\mu)], \quad (2.16)$$

其中 $L_1(\lambda) = L(\lambda) \otimes I$, $L_2(\mu) = I \otimes L(\mu)$, I 是 2 阶单位矩阵, λ 和 μ 为两个任意参数,

$$\{L_1(\lambda), L_2(\mu)\}_{jm, kn} = \{(L_1(\lambda))_{jm}, (L_2(\mu))_{kn}\}, \quad jk, mn = 11, 12, 21, 22,$$

$$r_{12}(\lambda, \mu) = \frac{4\lambda}{\mu^2 - \lambda^2} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad r_{21}(\lambda, \mu) = r_{12}(\mu, \lambda). \quad (2.17)$$

从而就有 (参见文献 [24])

$$\{\text{Tr} L^2(\lambda), \text{Tr} L^2(\mu)\} = 0, \quad (2.18)$$

其中 Tr 表示矩阵的迹, 因此, $\text{Tr} L^2(\lambda)$ 是对合守恒积分的生成函数.

具体地, 我们有

$$\mathrm{Tr} L^2(\lambda) = 2 + 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k}{\lambda^{2k}}, \quad (2.19)$$

其中

$$F_1 = \langle \Lambda^2 \Phi_1, \Phi_2 \rangle - \langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle \langle \Lambda \Phi_2, \Phi_2 \rangle, \quad (2.20)$$

$$F_k = \langle \Lambda^{2k} \Phi_1, \Phi_2 \rangle + \sum_{i+j=1; i, j \geq 1} (\langle \Lambda^{2i-1} \Phi_1, \Phi_2 \rangle \langle \Lambda^{2j-1} \Phi_1, \Phi_2 \rangle - \langle \Lambda^{2i-1} \Phi_1, \Phi_1 \rangle \langle \Lambda^{2j-1} \Phi_2, \Phi_2 \rangle), \quad k \geq 2. \quad (2.21)$$

(2.18) 意味着 $\{F_i, F_j\} = 0, i, j \geq 1$. 此外, 直接验证表明 $F_1, \dots, F_N$ 函数独立. 这样, 约束 Kaup-Newell 流 (2.12) 就存在 N 个独立的两两对合的守恒积分 $F_1, F_2, \dots, F_N$ 是一个 Liouville 意义下的完全可积 Hamilton 系统.

3 Kaup-Newell 方程的 Darboux 变换的非线性化

3.1 基于约束流的 Darboux 变换的非线性化的一般方法

设

$$\tilde{\phi} = T(\lambda, u)\phi, \quad \det T = 1, \quad u = (f, p, q, \tilde{p}, \tilde{q}) \quad (3.1)$$

是 Kaup-Newell 方程的一个 Darboux 变换, 这是关于 ϕ 的线性变换. 它的非线性化就是要寻找约束

$$u = F(\Phi_1, \Phi_2), \quad \Phi_j = (\phi_{j1}, \dots, \phi_{jN})^T, \quad j = 1, 2, \quad (3.2)$$

使得 N 个互不相同的参数 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ 对应的 N 重 Darboux 变换

$$(\tilde{\phi}_{1j}, \tilde{\phi}_{2j})^T = T(\lambda_j, u)(\phi_{1j}, \phi_{2j})^T, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.3)$$

约束后变成可积辛映射

$$(\tilde{\phi}_{1j}, \tilde{\phi}_{2j})^T = D(\lambda_j, \Phi_1, \Phi_2)(\phi_{1j}, \phi_{2j})^T, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.4)$$

其中

$$D(\lambda_j, \Phi_1, \Phi_2) = T(\lambda_j, u)|_{u=F(\Phi_1, \Phi_2)}. \quad (3.5)$$

我们做一个基本假设: (3.4) 是约束 Kaup-Newell 流 (2.12) 的 Darboux 变换

$$\tilde{y} = D(\lambda, \Phi_1, \Phi_2)y \quad (3.6)$$

导出的 Bäcklund 变换.

注意到约束 Kaup-Newell 流的 Lax 表示 (2.13) 是谱问题

$$L(\lambda)y = \mu y, \quad y_x = Ay \quad (3.7)$$

的相容条件. (3.7) 和 Darboux 变换 (3.6) 的相容条件给出

$$\tilde{L}(\lambda)D(\lambda, \Phi_1, \Phi_2) = D(\lambda, \Phi_1, \Phi_2)L(\lambda) \quad (3.8)$$

和

$$D_x = \tilde{A}D - DA. \quad (3.9)$$

观察 T 与 D 之间的对应关系 (3.5), 不难发现, 如果能从

$$\tilde{L}(\lambda)T(\lambda, u) = T(\lambda, u)L(\lambda) \quad (3.10)$$

获得 u 与 Φ_1 和 Φ_2 之间的关系, 那就获得了非线性化所需的约束, 且在这个约束下 (3.8) 成立.

基于上述分析, 我们提出 Darboux 变换 (3.1) 的非线性化的一般步骤: 首先, 取 N 个互不相同的参数 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, 考虑 N 重 Kaup-Newell 方程的 Darboux 变换 (3.3); 其次, 比较等式 (3.10) 两边 λ 的同次幂系数, 得到 u 与 Φ_1 和 Φ_2 间的约束 (3.2); 最后, 将约束 (3.2) 代入 (3.3) 得到映射 (3.4).

命题 4 如上得到的映射 (3.4) 有 Lax 表示 (3.8), 因此有 N 个两两对合的不变量 $F_1, F_2, \dots, F_N$.

证明 上述过程已确保 Lax 表示 (3.8) 成立. 从而, 根据 (3.8), 有

$$\widetilde{\text{Tr}(L^2)}(\lambda) = \text{Tr}(\tilde{L}^2)(\lambda) = \text{Tr}(TL^2T^{-1}) = \text{Tr}L^2(\lambda),$$

即 $\text{Tr}L^2(\lambda)$ 是映射 (3.4) 的不变量的生成函数, 它正是约束 Kaup-Newell 流的守恒积分的生成函数. 从而, 映射 (3.4) 存在 N 个两两对合的不变量 $F_1, F_2, \dots, F_N$. $\square$

注 1 上述非线性化的过程的关键是能否从 (3.10) 找到约束. 一旦获得约束, 那么 (3.10) 就表明 (3.4) 确实是约束 Kaup-Newell 流的 Bäcklund 变换, 也就是说假设成立.

注 2 如果从 $(\Phi_1, \Phi_2)^T$ 到 $(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2)^T$ 的映射满足

$$\sum_{j=1}^N d\tilde{\phi}_{1j} \wedge d\tilde{\phi}_{2j} = \sum_{j=1}^N d\phi_{1j} \wedge d\phi_{2j}, \quad (3.11)$$

则称它保持辛结构. 保持辛结构的可积的映射称为可积辛映射. 得到的映射 (3.4) 是否是可积辛映射, 需要具体检验.

3.2 Darboux 变换 T_1 、 T_2 、 T_3 和 T_4 的非线性化

上述方法可以应用到 Darboux 变换 T_1 、 T_2 、 T_3 和 T_4 上完成非线性化, 得到可积辛映射. 我们省略过程列出相关结论如下.

3.2.1 Darboux 变换 T_1 的非线性化

对 Darboux 变换 T_1 , 解 $T = T_1$ 时的方程 (3.10) 可得约束 $p = -\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle$. 由此可得非线性化后的映射为

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_{1j} = -\frac{\lambda_j \phi_{1j}}{\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle} + \phi_{2j}, \\ \tilde{\phi}_{2j} = -\phi_{1j}, \end{cases} \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.12)$$

简单计算可以发现

$$\sum_{j=1}^N d\tilde{\phi}_{1j} \wedge d\tilde{\phi}_{2j} = \sum_{j=1}^N d\phi_{1j} \wedge d\phi_{2j}.$$

因此, 如下定理成立.

定理 1 (3.12) 是一个可积辛映射 (也是约束 Kaup-Newell 流的一个 Bäcklund 变换), 它有 Lax 表示

$$\tilde{L}(\lambda)D_1(\lambda) = D_1(\lambda)L(\lambda),$$

其中

$$D_1(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle} \lambda & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

特别地, 当 $N = 1$ 时可以得到如下的可积辛映射:

$$\tilde{\phi}_1 = \phi_2 - \frac{1}{\phi_1}, \quad \tilde{\phi}_2 = -\phi_1, \quad (3.13)$$

它将 $\phi_1\phi_2$ 映射到 $1 - \phi_1\phi_2$, 因此, $\phi_1\phi_2(1 - \phi_1\phi_2)$ 是不变量. 这也许是最简单的非线性可积辛映射.

注 3 注意到 Darboux 矩阵 T_1 仅是老位势 p 和 q 的函数. 由 $\tilde{q} = -p$ 和 $p = -\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle$, 可得 $q = \langle \Lambda \Phi_2, \Phi_2 \rangle$. 这个约束与 (2.11) 完全一致.

3.2.2 Darboux 变换 T_2 的非线性化

对 Darboux 变换 T_2 , 解 $T = T_2$ 时的方程 (3.10) 可得约束

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle}, \\ b = \frac{\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle^2}{\langle \Lambda^3 \Phi_1, \Phi_1 \rangle - 2\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle \langle \Lambda^2 \Phi_1, \Phi_2 \rangle + \langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle^2 \langle \Lambda \Phi_2, \Phi_2 \rangle}. \end{cases} \quad (3.14)$$

由此可得非线性化后的映射为

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_{1j} = \frac{-\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle \lambda_j^2 \phi_{1j} + \langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle^2 \lambda_j \phi_{2j}}{\langle \Lambda^3 \Phi_1, \Phi_1 \rangle - 2\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle \langle \Lambda^2 \Phi_1, \Phi_2 \rangle + \langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle^2 \langle \Lambda \Phi_2, \Phi_2 \rangle} + \phi_{1j}, \\ \tilde{\phi}_{2j} = -\frac{\lambda_j}{\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle} \phi_{1j} + \phi_{2j}, \end{cases} \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.15)$$

通过繁琐的计算表明,

$$\sum_{j=1}^N d\tilde{\phi}_{1j} \wedge d\tilde{\phi}_{2j} = \sum_{j=1}^N d\phi_{1j} \wedge d\phi_{2j}.$$

因此, 下列定理成立.

定理 2 (3.15) 是一个可积辛映射 (也是约束 Kaup-Newell 流的一个 Bäcklund 变换), 它有 Lax 表示 $\tilde{L}(\lambda)D_2(\lambda) = D_2(\lambda)L(\lambda)$, 其中

$$D_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda ab + 1 & \lambda b \\ \lambda a & 1 \end{pmatrix},$$

这里 a 和 b 定义如 (3.14).

作为特例, 当 $N = 1$ 时得到可积辛映射

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{\phi_1^2 \phi_2}{\phi_1 \phi_2 - 1}, \quad \tilde{\phi}_2 = \frac{\phi_1 \phi_2 - 1}{\phi_1}, \quad (3.16)$$

它有不变量 $\phi_1\phi_2(1 - \phi_1\phi_2)$. 事实上, $\phi_1\phi_2$ 是一个更为简单的不变量.

注 4 从 (2.7) 可见 T_2 本质是 p 和 $\tilde{q}$ 的函数. 从关系式 $p = \frac{1}{a}$ 可得 $p = -\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle$, 这与约束 (2.11) 是一致的.

3.2.3 Darboux 变换 T_3 的非线性化

对 Darboux 变换 T_3 , 解 $T = T_3$ 时的方程 (3.10) 可得约束

$$\begin{cases} a = \frac{\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle (2\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle - 1)}{\langle \Lambda^{-1} \Phi_1, \Phi_1 \rangle}, \\ b = \frac{1 - 2\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle}{\langle \Lambda^{-1} \Phi_1, \Phi_1 \rangle}. \end{cases} \quad (3.17)$$

由此可得非线性化后的映射为

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_{1j} = \sqrt{-1} \left(\frac{\langle \Lambda^{-1} \Phi_1, \Phi_1 \rangle \lambda_j \phi_{1j}}{\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle (2\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle - 1)} + \frac{1}{\lambda_j} \phi_{1j} + \frac{\langle \Lambda^{-1} \Phi_1, \Phi_1 \rangle}{1 - 2\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle} \phi_{2j} \right), \\ \tilde{\phi}_{2j} = \sqrt{-1} \frac{1 - 2\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle}{\langle \Lambda^{-1} \Phi_1, \Phi_1 \rangle} \phi_{1j}, \end{cases} \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.18)$$

直接计算有

$$\sum_{j=1}^N d\tilde{\phi}_{1j} \wedge d\tilde{\phi}_{2j} = \sum_{j=1}^N d\phi_{1j} \wedge d\phi_{2j}.$$

因此, 下列定理成立.

定理 3 (3.18) 是一个可积辛映射 (也是约束 Kaup-Newell 流的一个 Bäcklund 变换), 它有 Lax 表示 $\tilde{L}(\lambda)D_3(\lambda) = D_3(\lambda)L(\lambda)$, 其中

$$D_3(\lambda) = \sqrt{-1} \begin{pmatrix} \frac{\langle \Lambda^{-1} \Phi_1, \Phi_1 \rangle \lambda}{\langle \Lambda \Phi_1, \Phi_1 \rangle (2\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle - 1)} + \frac{1}{\lambda} \frac{\langle \Lambda^{-1} \Phi_1, \Phi_1 \rangle}{1 - 2\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle} & \\ \frac{1 - 2\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle}{\langle \Lambda^{-1} \Phi_1, \Phi_1 \rangle} & 0 \end{pmatrix}.$$

特别地, 当 $N = 1$ 时可得可积辛映射

$$\tilde{\phi}_1 = \sqrt{-1} \frac{\phi_1^2 \phi_2}{k(2\phi_1 \phi_2 - 1)}, \quad \tilde{\phi}_2 = -\sqrt{-1} \frac{k(2\phi_1 \phi_2 - 1)}{\phi_1}, \quad (3.19)$$

其中 k 是任意非零常数, 它有不变量 $\phi_1 \phi_2$.

3.2.4 Darboux 变换 T_4 的非线性化

Darboux 矩阵 T_4 中含有一个“任意”函数 f . 应用前述的方法可得约束

$$f = -\frac{L_{21}(\beta)}{L_{11}(\beta) + \rho(\beta)}, \quad (3.20)$$

其中 $\rho(\beta) = \sqrt{L_{11}^2(\beta) + L_{12}(\beta)L_{21}(\beta)}$, $L_{ij}(\lambda)$ 是 Lax 矩阵 $L(\lambda)$ 的第 i 行第 j 列的元素, 定义如 (2.14).

通过非线性化可得到如下映射:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_{1j} \\ \tilde{\phi}_{2j} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j^2 - \beta^2}} \begin{pmatrix} -\lambda_j \frac{L_{21}(\beta)}{L_{11}(\beta) + \rho(\beta)} & \beta \\ \beta & -\lambda_j \frac{L_{11}(\beta) + \rho(\beta)}{L_{21}(\beta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1j} \\ \phi_{2j} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.21)$$

作为约束 Kaup-Newell 流的 Bäcklund 变换, 文献 [21] 已得到 (3.21) (系数稍有不同).

经过繁琐的计算, 可以发现 $\sum_{j=1}^N d\tilde{\phi}_{1j} \wedge d\tilde{\phi}_{2j} = \sum_{j=1}^N d\phi_{1j} \wedge d\phi_{2j}$. 因此, 下列定理成立.

定理 4 (3.21) 是一个可积辛映射, 它有 Lax 表示 $\tilde{L}(\lambda)D_4(\lambda) = D_4(\lambda)L(\lambda)$, 其中

$$D_4(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \beta^2}} \begin{pmatrix} -\lambda \frac{L_{21}(\beta)}{L_{11}(\beta) + \rho(\beta)} & \beta \\ \beta & -\lambda \frac{L_{11}(\beta) + \rho(\beta)}{L_{21}(\beta)} \end{pmatrix}.$$

4 结论

借助于约束 Kaup-Newell 流, 成功实现 Kaup-Newell 方程的 4 个基本 Darboux 变换的非线性化, 得到 4 个具有相同不变量的可积辛映射, 这 4 个可积辛映射也是约束 Kaup-Newell 流的 Bäcklund 变换. 作为约束 Kaup-Newell 流的 Bäcklund 变换, 文献 [21] 已推导了 (3.21), 这里进一步证明它也是可积辛映射. 此外, 文献 [21] 还证明了 Bäcklund 变换 (3.21) 具有谱性质. 由于 T_1 、 T_2 和 T_3 导出的 Bäcklund 变换 (可积辛映射) 中不含谱参数, 所以, 这些 Bäcklund 变换不具有谱性质.

由于得到的 4 个可积辛映射有公共的 Lax 矩阵 $L(\lambda)$ 和不变量, 因此, 它们有相同的谱曲线. 可以相信它们之间一定存在一些内在联系. 在最简单的 $N = 1$ 情形, 我们可定义如下映射:

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{\phi_1^2 \phi_2}{\alpha \phi_1 \phi_2 - 1}, \quad \tilde{\phi}_2 = \frac{\alpha \phi_1 \phi_2 - 1}{\phi_1}. \quad (4.1)$$

直接验证可以发现 $\phi_1 \phi_2$ 是 (4.1) 的不变量, 且 $d\tilde{\phi}_1 \wedge d\tilde{\phi}_2 = d\phi_1 \wedge d\phi_2$, 因此, 这是一个可积辛映射且包含 (3.16) 和 (3.19) 作为特殊情形. 事实上, $\alpha = 1$ 时 (4.1) 化为 (3.16); $\alpha = 2$ 时 (4.1) 化为 $k = \sqrt{-1}$ 情形的 (3.19). 对一般的 N , 我们还不清楚这些可积映射之间的关系.

最后, 值得指出的是, 作为约束 Kaup-Newell 流的 Bäcklund 变换, 得到的 4 个可积辛映射可用于约束 Kaup-Newell 流的精确求解, 我们将另文研究.

参考文献

- 1 Cao C W. A cubic system which generates Bargmann potential and N -gap potential. *Chinese Quart J Math*, 1988, 3: 90–95
- 2 Cao C W, Geng X G. Classical integrable systems generated through nonlinearization of eigenvalue problems. In: *Nonlinear Physics, Research Reports in Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1990, 66–78
- 3 Cao C W. Nonlinearization of the Lax system for AKNS hierarchy. *Sci China Ser A*, 1990, 33: 528–536
- 4 Ragnisco O, Cao C W, Wu Y T. On the relation of the stationary Toda equation and the symplectic maps. *J Phys A*, 1995, 28: 573–588
- 5 Geng X G. Discrete Bargmann and Neumann systems and finite-dimensional integrable systems. *Phys A*, 1994, 212: 132–142
- 6 Zeng Y B, Rauch-Wojciechowski S. Restricted flows of the Ablowitz-Ladik hierarchy and their continuous limits. *J Phys A*, 1995, 28: 113–134
- 7 Bruschi M, Ragnisco O, Santini P M, et al. Integrable symplectic maps. *Phys D*, 1991, 49: 273–294
- 8 Moser J, Veselov A P. Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials. *Comm Math Phys*, 1991, 139: 217–243
- 9 Cao C W, Xu X X. A finite genus solution of the H1 model. *J Phys A*, 2012, 45: 055213
- 10 Cao C W, Zhang G Y. Integrable symplectic maps associated with the ZS-AKNS spectral problem. *J Phys A*, 2012, 45: 265201
- 11 Cao C W, Zhang G Y. A finite genus solution of the Hirota equation via integrable symplectic maps. *J Phys A*, 2012, 45: 095203
- 12 Cao C W, Yang X. A $(2+1)$ -dimensional derivative Toda equation in the context of the Kaup-Newell spectral problem. *J Phys A*, 2008, 41: 025203
- 13 谷超豪, 胡和生, 周子翔. 孤立子理论的达布变换及其几何应用. 上海: 上海科学技术出版社, 1999
- 14 Levi D, Benguria R. Bäcklund transformations and nonlinear differential difference equations. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1980, 77: 5025–5027
- 15 Levi D. Nonlinear differential difference equations as Backlund transformations. *J Phys A*, 1981, 14: 1083–1098
- 16 Konstantinou-Rizos S, Mikhailov A V. Darboux transformations, finite reduction groups and related Yang-Baxter maps. *J Phys A*, 2013, 46: 425201

- 17 Zhou R G, Chen J. Two hierarchies of new differential-difference equations related to the Darboux transformations of the Kaup-Newell hierarchy. *Commun Theor Phys (Beijing)*, 2015, 63: 1–6
- 18 Zeng Y B, Li Y S. The Lax representation and Darboux transformation for constrained flows of the AKNS hierarchy. *Acta Math Sin Engl Ser*, 1996, 12: 217–224
- 19 Qiao Z J, Zhou R G. Discrete and continuous integrable systems possessing the same non-dynamical r -matrix. *Phys Lett A*, 1997, 235: 35–40
- 20 Zeng Y B, Dai H H, Song J P. Bäcklund transformations for high-order constrained flows of the AKNS hierarchy: Canonicity and spectrality property. *J Phys A*, 2002, 35: 1095–1108
- 21 Zeng Y B, Zhu Y Q, Xiao T, et al. Canonical explicit Bäcklund transformations with spectrality for constrained flows of soliton hierarchies. *Phys A*, 2002, 303: 321–338
- 22 Kaup D J, Newell A C. An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation. *J Math Phys*, 1978, 19: 798–801
- 23 Fedeev L D, Takhtajan L A. *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Berlin: Springer-Verlag, 1978
- 24 Babelon O, Bernard D, Talon M. *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003

Nonlinearizations of Darboux transformations of Kaup-Newell equation based on the restricted Kaup-Newell flow

Ruguang Zhou & Jie Chen

Abstract Nonlinearizations of Darboux transformations of Kaup-Newell equation are investigated. Based on the assumption that the maps obtained by nonlinearizing of Darboux transformations of Kaup-Newell equation are just the Bäcklund transformations of the restricted Kaup-Newell flows, constraints between the potentials in the Darboux matrices and the eigenfunctions can be simply established. Nonlinearizations of four fundamental Darboux transformations are carried out and four integrable symplectic maps which share the same set of invariants are obtained.

Keywords nonlinearization of spectral problems, Darboux transformation, Bäcklund transformation, the restricted Kaup-Newell flow, integrable symplectic map

MSC(2010) 37K10

doi: 10.1360/N012017-00068