广义 Stirling 数的单峰型性质

献给徐利治教授 95 华诞

刘丽^①, 祝宝宣^②, 王毅^{③*}

① 曲阜师范大学数学科学学院, 曲阜 273165;

② 江苏师范大学数学科学学院, 徐州 221116;

③ 大连理工大学数学科学学院, 大连 116024

E-mail: liulily@mail.qfnu.edu.cn, bxzhu@jsnu.edu.cn, wangyi@dlut.edu.cn

收稿日期: 2015-01-31; 接受日期: 2015-04-01; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11201191, 11201260 和 11371078) 资助项目

摘要 本文研究由徐利治和薛昭雄引进的广义 Stirling 数相关的一些单峰型问题, 主要结果包括某些广义 Bell 数的对数凸性、广义 Bell 多项式的实零点性、广义 Bell 多项式序列的 q -对数凸性和广义 Stirling 数相应的线性变换的保对数凸性.

关键词 广义 Stirling 数 对数凸性 q -对数凸性

MSC (2010) 主题分类 11B73, 05A20, 05A15

1 引言

对复数 z 和 α , 定义增量是 α 的 z 的下阶乘

$$(z | \alpha)_0 = 1, \quad (z | \alpha)_n = z(z - \alpha)(z - 2\alpha) \cdots (z - n\alpha + \alpha), \quad n = 1, 2, \dots$$

借助反演关系

$$(t | \alpha)_n = \sum_{k=0}^n S^1(n, k)(t - r | \beta)_k, \quad (t | \beta)_n = \sum_{k=0}^n S^2(n, k)(t + r | \alpha)_k,$$

Hsu 和 Shiue^[1] 引进了广义 Stirling 数对

$$\{S^1(n, k), S^2(n, k)\} \equiv \{S(n, k; \alpha, \beta, r), S(n, k; \beta, \alpha, -r)\},$$

称它为一个 $\langle \alpha, \beta, r \rangle$ -对. 例如, 经典的 Stirling 数对 $\{s(n, k), S(n, k)\}$ 是 $\langle 1, 0, 0 \rangle$ -对:

$$s(n, k) = S(n, k; 1, 0, 0), \quad S(n, k) = S(n, k; 0, 1, 0).$$

不带符号的 Stirling 数 $c(n, k) = |s(n, k)| = (-1)^{n+k}s(n, k)$ 和 $(-1)^{n+k}S(n, k)$ 构成 $\langle -1, 0, 0 \rangle$ -对. 二项式系数 $\binom{n}{k}$ 和 $(-1)^{n+k}\binom{n}{k}$ 构成 $\langle 0, 0, 1 \rangle$ -对. Lah 数 $L(n, k) = \frac{n!}{k!}\binom{n}{k}$ 和 $(-1)^{n+k}L(n, k)$ 构成 $\langle -1, 1, 0 \rangle$ -

对. 事实上, 广义 Stirling 数是已有的许多种 Stirling 数的共同推广. Hsu 和 Shiue^[1] 研究了广义 Stirling 数的正交关系、发生函数、同余性质、Dobinski 型公式和渐近公式. 本文研究与广义 Stirling 数相关的单峰型性质.

设 $(a_i)_{i \geq 0}$ 为非负数的一个序列. 如果存在 $m \geq 0$, 使得 $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m \geq a_{m+1} \geq \cdots$, 则称该序列是单峰的. 若恒有 $a_i^2 \geq a_{i+1}a_{i-1}$, 则称该序列是对数凹的. 若恒有 $a_i^2 \leq a_{i+1}a_{i-1}$, 则称该序列是对数凸的. 容易看到正数序列的对数凹性蕴涵单峰性.

设 q 是一个未定元. 对于两个实多项式 $f(q)$ 和 $g(q)$, 如果其差 $f(q) - g(q)$ 作为 q 的多项式系数全是非负的, 则记为 $f(q) \geq_q g(q)$. 当 $n \geq 1$ 时, 如果实系数多项式序列 $(f_n(q))_{n \geq 0}$ 满足

$$f_{n-1}(q)f_{n+1}(q) \geq_q f_n^2(q),$$

则称多项式序列 $(f_n(q))_{n \geq 0}$ 是 q -对数凸的.

Hsu 和 Shiue^[1] 定义了广义 Bell 数 $W_n = W_n(\alpha, \beta, r) = \sum_{k=0}^n S(n, k; \alpha, \beta, r)$ 和广义 Bell 多项式 $S_n(q) = \sum_{k=0}^n S(n, k; \alpha, \beta, r)q^k$. 熟知经典 Bell 数 $W_n(0, 1, 0)$ 构成对数凸的序列, 经典 Bell 多项式的零点全是实数, 且构成 q -对数凸的多项式序列 (参见文献 [2, 3]). 本文考虑广义 Bell 数和广义 Bell 多项式的相关结果.

定理 1.1 当 $\alpha \leq 0, \beta, r \geq 0$ 时, 广义 Bell 多项式 $S_n(q)$ 的零点都是实数.

由经典的 Newton 不等式可知, 如果一个正系数多项式的零点都是实数, 那么, 它的系数构成一个对数凹和单峰的序列. 于是, 由定理 1.1 立得如下推论.

推论 1.2 当 $\alpha \leq 0, \beta, r \geq 0$ 时, 广义 Stirling 数

$$S(n, 0; \alpha, \beta, r), S(n, 1; \alpha, \beta, r), \dots, S(n, n; \alpha, \beta, r)$$

是对数凹和单峰的.

定理 1.3 当 $\alpha \leq 0, \beta, r \geq 0$ 时, 广义 Bell 多项式序列 $(S_n(q))_{n \geq 0}$ 是 q -对数凸的.

因为 $W_n = S_n(1)$, 由定理 1.3 立得如下推论.

推论 1.4 当 $\alpha \leq 0, \beta, r \geq 0$ 时, 广义 Bell 数序列 $(W_n)_{n \geq 0}$ 是对数凸的.

文献 [2, 命题 2.4 和 2.7] 证明了线性变换

$$z_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)x_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

$$z_n = \sum_{k=0}^n c(n, k)x_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

均保持对数凸性, 即 $(x_k)_{k \geq 0}$ 的对数凸性蕴涵 $(z_n)_{n \geq 0}$ 的对数凸性. 一个自然的问题是, 考虑与广义 Stirling 三角相应的线性变换的保对数凸性. 为了简明起见, 下面仅考虑 $r = 0$ 的情形, 此类广义 Stirling 特别有趣, 是 Tsylova^[4] 最先考虑的, 此后, Mansour 和 Schork^[5] 也进行了研究.

定理 1.5 当 $\alpha \leq 0, \beta \geq \alpha$ 时, 线性变换

$$z_n = \sum_{k=0}^n S(n, k; \alpha, \beta, 0)x_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

保持对数凸性.

由定理 1.5 可同时知道线性变换 (1.1) 和 (1.2) 是保对数凸性的.

2 定理的证明

为了证明定理, 首先给出一些引理.

引理 2.1 ^[1] 广义 Stirling 数满足递归关系

$$S(n+1, k; \alpha, \beta, r) = S(n, k-1; \alpha, \beta, r) + (k\beta - n\alpha + r)S(n, k; \alpha, \beta, r),$$

其中 $S(n, 0; \alpha, \beta, r) = (r | \alpha)_n$.

设非负无限下三角矩阵 $T = [T(n, k)]_{0 \leq k \leq n}$ 满足递归关系

$$T(n, k) = (a_1 n + a_2 k + a_3)T(n-1, k) + (b_1 n + b_2 k + b_3)T(n-1, k-1).$$

记 $T_n(q) = \sum_{k=0}^n T(n, k)q^k$.

引理 2.2 ^[6] 如果 $a_2 b_1 \geq a_1 b_2$ 且 $(b_1 + b_2 + b_3)a_2 \geq (a_1 + a_3)b_2$, 则多项式 $T_n(q)$ 的零点都是实数.

引理 2.3 ^[2] 如果对 $0 < k \leq n$ 恒有

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2)n + a_2 b_2 k + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \geq 0,$$

则多项式序列 $(T_n(q))_{n \geq 0}$ 是 q -对数凸的.

引理 2.4 ^[1] 当 $\alpha\beta \neq 0$ 时, 广义 Stirling 数的指数发生函数为

$$\sum_{n \geq 0} S(n, k; \alpha, \beta, r) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} (1 + \alpha t)^{r/\alpha} \left(\frac{(1 + \alpha t)^{\beta/\alpha} - 1}{\beta} \right)^k. \quad (2.1)$$

引理 2.5 ^[7] 如果序列 $(x_n)_{n \geq 0}$ 和 $(y_n)_{n \geq 0}$ 都是对数凸的, 那么, 它们的二项式卷积

$$z_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k y_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

也是对数凸的.

定理 1.1 的证明 结合引理 2.1 和 2.2 得到结论. □

定理 1.3 的证明 结合引理 2.1 和 2.3 得到结论. □

定理 1.5 的证明 当 $r = 0$ 时, 由 (2.1) 可得 $\sum_{n \geq 0} S(n, k; \alpha, \beta, 0) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{(1 + \alpha t)^{\beta/\alpha} - 1}{\beta} \right)^k$. 两边关于 t 求导可得

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} S(n, k; \alpha, \beta, 0) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} &= \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{(1 + \alpha t)^{\beta/\alpha} - 1}{\beta} \right)^{k-1} (1 + \alpha t)^{\beta/\alpha - 1} \\ &= \sum_{n \geq 0} S(n, k-1; \alpha, \beta, 0) \frac{t^n}{n!} \sum_{n \geq 0} (\beta - \alpha | \alpha)_n \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

再比较上式两端 $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ 项的系数可得广义 Stirling 数满足下述递归关系:

$$S(n, k; \alpha, \beta, 0) = \sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{j} S(j, k-1; \alpha, \beta, 0) (\beta - \alpha | \alpha)_{n-1-j}. \quad (2.2)$$

设 $(x_k)_{k \geq 0}$ 为对数凸序列. 下面来证明由 (1.3) 定义的序列 $(z_n)_{n \geq 0}$ 也是对数凸的. 对 n 运用数学归纳法. 注意到 $z_0 = x_0$, $z_1 = x_1$, $z_2 = (\beta - \alpha)x_1 + x_2$. 当 $\beta \geq \alpha$ 时, 显然有

$$z_0 z_2 - z_1^2 = (\beta - \alpha)x_0 x_1 + (x_0 x_2 - x_1^2) \geq 0.$$

假设 $n \geq 3$ 且 $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ 是对数凸的. 由递归关系 (2.2) 可得

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{k=0}^n S(n, k; \alpha, \beta, 0) x_k = \sum_{k=0}^n x_k \sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{j} S(j, k-1; \alpha, \beta, 0) (\beta - \alpha | \alpha)_{n-1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (\beta - \alpha | \alpha)_{n-1-j} \left[\sum_{k=0}^j S(j, k; \alpha, \beta, 0) x_{k+1} \right]. \end{aligned}$$

令 $y_j = (\beta - \alpha | \alpha)_j$ 和 $t_j = \sum_{k=0}^j S(j, k; \alpha, \beta, 0) x_{k+1}$, 则有

$$z_n = \sum_{k=0}^n S(n, k; \alpha, \beta, 0) x_k = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t_j y_{n-j-1}.$$

由归纳假设可知序列 $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ 是对数凸的. 而对于序列 $(y_j)_{j \geq 0}$ 有

$$\begin{aligned} y_{j-1} y_{j+1} - y_j^2 &= (\beta - \alpha | \alpha)_{j-1} (\beta - \alpha | \alpha)_{j+1} - (\beta - \alpha | \alpha)_j^2 \\ &= (\beta - \alpha | \alpha)_{j-1} (\beta - \alpha | \alpha)_j [(\beta - (j+1)\alpha) - (\beta - j\alpha)] \\ &= -\alpha (\beta - \alpha | \alpha)_{j-1}^2 (\beta - j\alpha). \end{aligned}$$

因此, 当 $\alpha \leq 0, \beta \geq \alpha$ 时, 序列 $(y_j)_{j \geq 0}$ 是对数凸的. 故由引理 2.5 可知, $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n$ 也是对数凸的. 这样由归纳法可知整个序列 $(z_n)_{n \geq 0}$ 是对数凸的.

致谢 本文源于 2014 年 8 月徐利治先生建议考虑的问题, 进一步的研究还在进行中. 作者真诚地感谢徐利治先生和审稿人对于这项工作给出的帮助和支持.

参考文献

- 1 Hsu L C, Shiue P J S. A unified approach to generalized Stirling numbers. *Adv Appl Math*, 1998, 20: 366–384
- 2 Liu L L, Wang Y. On the log-convexity of combinatorial sequences. *Adv Appl Math*, 2007, 39: 453–476
- 3 Liu L L, Wang Y. A unified approach to polynomial sequences with only real zeros. *Adv Appl Math*, 2007, 38: 542–560
- 4 Tsylova E G. The asymptotic behavior of generalized Stirling numbers. In: *Combinatorial-Algebraic Methods in Applied Mathematics* (in Russian). Gorky: Gorky University Publishers, 1985, 143–154
- 5 Mansour T, Schork M. The generalized Stirling and Bell numbers revisited. *J Integer Seq*, 2012, 15: #12.8.3
- 6 Wang Y, Yeh Y N. Polynomials with real zeros and Pólya frequency sequences. *J Combin Theory Ser A*, 2005, 109: 63–74
- 7 Davenport H, Pólya G. On the product of two power series. *Canad J Math*, 1949, 1: 1–5

Unimodality properties of generalized Stirling numbers

LIU Lily Li, ZHU BaoXuan & WANG Yi

Abstract In this paper, we study various unimodality properties of generalized Stirling numbers introduced by Hsu and Shiue. We obtain the log-convexity of generalized Bell numbers, the reality of zeros and the q -log-convexity of generalized Bell polynomials. We also show that certain linear transformations associated with generalized Stirling numbers preserve the log-convexity.

Keywords generalized Stirling number, log-convexity, q -log-convexity

MSC(2010) 11B73, 05A20, 05A15

doi: 10.1360/N012015-00071