非对称 Markov 过程的 Girsanov 变换

陈传钟¹, 马丽^{1*}, 杨赛赛²

1. 海南师范大学数学与统计学院, 海口 571158;

2. 中国科技大学数学科学学院, 合肥 230026

E-mail: czchen@hainnu.edu.cn, malihnsd@163.com, yangsaisai1989@hotmail.com

收稿日期: 2015-11-06; 接受日期: 2017-02-08; 网络出版日期: 2017-03-21; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11201102 和 10961012) 资助项目

摘要 本文研究非对称 Markov 过程 X 由可乘泛函诱导的变换, 该可乘泛函是过程 X 的二次变差为零的连续可加泛函的指数形式. 本文通过变换后过程联系的二次型刻画了变换后过程的半群. 设 $(X, \hat{X})$ 为非对称 Dirichlet 型联系的一对对偶 Markov 过程, 本文给出 X 和 $\hat{X}$ 经 Girsanov 变换后的过程关于另外一个参考测度对偶的充分必要条件.

关键词 Markov 过程 非对称 Dirichlet 型 Girsanov 变换

MSC (2010) 主题分类 60J25

1 引言

设 E 为一个可度量的 Lusin 空间, $X = (\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathcal{F}_t, X_t, P_x, x \in E)$ 为 E 上的一个右 (连续强 Markov) 过程 (参见文献 [1, 第 IV 章定义 1.8]). 设 X 联系着 $L^2(E; m)$ 上一个非对称 Dirichlet 型 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$, 其中 m 为 E 的 Borel σ 代数 $\mathcal{B}(E)$ 上的一个 σ 有限测度, 则由文献 [1, 第 IV 章定理 6.7] 知, $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 是拟正则的; 由文献 [2] 知, $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 拟同胚于一个正则 Dirichlet 型. 因此, 不失一般性, 设 E 为局部紧可分度量空间, m 为一个 Radon 测度且支撑为 E , X 为 E 上一个右过程, $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 为 $L^2(E; m)$ 上一个正则非对称 Dirichlet 型. 设 $L^2(E; m)$ 上 f 与 g 的内积为 (f, g) . Dirichlet 型理论可参见文献 [1, 3, 4]. 本文的记号和术语来自于文献 [1, 4].

设 $u \in D(\mathcal{E})_b := D(\mathcal{E}) \cap L^\infty(E; m)$, 则由文献 [1, 第 VI 章定理 2.5] 可得如下的 Fukushima 分解: 对拟几乎处处的 $x \in E$, 有

$$\tilde{u}(X_t) - \tilde{u}(X_0) = M_t^u + N_t^u, \quad t \in [0, \infty[, \quad P_x\text{-a.s.},$$

其中 $\tilde{u}$ 为 u 的一个拟连续 m -版本, M_t^u 为有限能量的平方可积鞅可加泛函 (简记为 MAF), N_t^u 为零能量的连续可加泛函 (简记为 CAF). 对 $x \in E$, 设 E_x 为关于 P_x 的期望.

设 (N, H) 为 X 的一个 Lévy 系, ν 为 H 的 Revuz 测度. 定义

$$B_t = \sum_{s \leq t} [e^{(u(X_s) - u(X_{s-}))} - 1 - (u(X_s) - u(X_{s-}))].$$

英文引用格式: Chen C Z, Ma L, Yang S S. Girsanov transformation for non-symmetric Markov processes (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 611–624, doi: 10.1360/SCM-2015-0735

注意对任意 $M > 0$, 存在 $C_M > 0$ 使得对所有的满足 $|x| \leq M$ 的 x 有 $e^x - 1 - x \leq C_M x^2$. 因为 $u(X_t) - u(X_{t-})$ 有界, 对拟几乎处处的 $x \in E$, M^u 为一个 P_x -平方可积鞅, 所以对拟几乎处处的 $x \in E$, $(B_t)_{t \geq 0}$ 局部 P_x -可积. 由文献 [4, (A.3.23)] 可得, $(B_t)_{t \geq 0}$ 的可料对偶投影为

$$B_t^p = \int_0^t \int_{E_\Delta} [e^{(u(y)-u(X_s))} - 1 - (u(y) - u(X_s))] N(X_s, dy) dH_s.$$

设 $M^{u,c}$ 为 M^u 的连续部分, $\langle M^{u,c} \rangle$ 为 $M^{u,c}$ 的尖括号过程, $A_t^u = B_t^p + \frac{1}{2} \langle M^{u,c} \rangle_t$, 则 A_t^u 为一个正的连续可加泛函 (简记为 PCAF). 设 $\langle M^{u,c} \rangle_t$ 的 Revuz 测度为 $\mu_{\langle M^{u,c} \rangle}$, $(A_t^u)_{t \geq 0}$ 的 Revuz 测度为 μ_u , 则

$$\mu_u(dx) = \int_{E_\Delta} [e^{u(y)-u(x)} - 1 - (u(y) - u(x))] N(x, dy) \nu(dx) + \frac{1}{2} \mu_{\langle M^{u,c} \rangle}(dx). \quad (1.1)$$

定义

$$Z_t^u := e^{M_t^u - A_t^u}. \quad (1.2)$$

如果 X 是一个扩散过程, 即 X 有连续的样本轨道且没有杀死, 则

$$Z_t^u = e^{M_t^u - \frac{1}{2} \langle M^u \rangle_t} \quad (1.3)$$

为正的局部鞅, 从而为正的上鞅. 对一般的对称 Markov 过程, Chen 等 [5] 给出了 $(Z_t^u, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 为上鞅的三个充要条件. 对一般非对称 Markov 过程, Chen 和 Yang [6] 给出了 $(Z_t^u, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 为正的局部鞅的两个充分必要条件. 如果 $(Z_t^u, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 是正的上鞅, 则它定义了一组概率测度 $(P_x^G)_{x \in E}$: 在 $\mathcal{F}_t$ 上, 有 $dP_x^G = Z_t^u dP_x$. 设 X_t 在 P_x^G 下为 X_t^G , 并称 X_t^G 为 X_t 的 Girsanov 变换过程.

Brown 运动和其他 Markov 过程由上鞅可乘泛函诱导的 Girsanov 变换已经被很多物理学家和数学家研究过. 该变换简要的历史和参考文件参见文献 [7] 的评注. 在文献 [8] 中, 对 $e^u \in D(L)$ ($(L, D(L))$ 为对称 Dirichlet 型 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 的生成元), Fukushima 和 Takeda 考虑了对称 Markov 过程由 (1.2) 诱导的变换. 在文献 [9] 中, 对满足 $e^u \in D(\mathcal{E})_{\text{loc}}$ 的正的函数 u , Fitzsimmons 考虑了没有杀死的对称扩散过程 X 由指数局部鞅 (1.3) 诱导的变换, 并给出了变换后型的表达式. 在文献 [10] 中, 对一个有界函数 $u \in D(\mathcal{E})_e$ (扩展 Dirichlet 型空间), Chen 和 Zhang 考虑了一类更一般的对称 Markov 过程 X 由指数局部鞅 (1.2) 诱导的 Girsanov 变换, 并给出了变换后的过程在 $L^2(E; e^{2u}m)$ 上连续的 Dirichlet 型. 时间逆转和前向后向鞅的 Lyons-Zheng 分解在文献 [10] 中被充分应用.

本文的目的是研究近对称 Markov 过程由上鞅 (1.2) 诱导的 Girsanov 变换. 注意对称 Dirichlet 型的很多有用工具, 如时间逆转和 Lyons-Zheng 分解, 不能很好地用于非对称 Dirichlet 型框架, 这使问题变得很困难. 对 $u \in D(\mathcal{E})_e$, Chen 和 Sun [11] 考虑了非对称扩散过程由 (1.3) 诱导的 Girsanov 变换, 指出 X 由 (1.3) 诱导的 Girsanov 变换所得的过程 X^G 与对偶过程 $\hat{X}$ 由 $e^{\hat{M}_t^u - \frac{1}{2} \langle \hat{M}^u \rangle_t}$ 诱导的 Girsanov 变换所得的过程 $\hat{X}^G$ 关于测度 $e^{2u}m$ 不是对偶的, 其中 $\hat{M}_t^u$ 为 $\tilde{u}(\hat{X}_t) - \tilde{u}(\hat{X}_0)$ 的 Fukushima 分解中的鞅部分. 此外, 本文还给出了 X^G 和 $L^2(E; e^{2u}m)$ 上的一个半 Dirichlet 型联系的充分条件, 并给出了半 Dirichlet 型的一个简洁表达式.

本文的方法来自于文献 [12]. 对 $u \in D(\mathcal{E})_b$, 由文献 [6] 知, $(Z_t^u, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 是一个上鞅. 第 2 节在某些条件下得到 $L^2(E; m)$ 上 X^G 的 β -子过程与一个半 Dirichlet 型 $(\mathcal{E}^G, D(\mathcal{E}))$ 相联系, 并给出 $(\mathcal{E}^G, D(\mathcal{E}))$ 的表达式. 第 3 节定义 $L^2(E; m)$ 上 X^G 的 β -子过程联系的一个二次型 $(Q, D(Q))$, 并给出 $(Q, D(Q))$ 的表达式. 第 4 节给出 X^G 和 $\hat{X}^G$ 关于测度 $e^{2u}m$ 对偶的充分必要条件. 这些结果推广了文献 [11] 的结果.

2 $L^2(E; m)$ 上与 $(X_t^G)_{t \geq 0}$ 联系的二次型

设 Δ 为 X 的坟墓点, ζ 为 X 的生命时. 设 $u \in D(\mathcal{E})_b$, X^G 为 X 由 (1.2) 诱导的 Girsanov 变换过程. 设 $(P_t^G)_{t \geq 0}$ 为 X^G 的转移半群, 则对任意的 $f \geq 0$, $f \in L^2(E; m)$,

$$P_t^G f(x) = E_x[Z_t^u f(X_t)] = E_x[e^{M_t^u - A_t^u} f(X_t)]. \quad (2.1)$$

设

$$M_t^d = B_t - B_t^p, \quad M_t = M_t^u + M_t^d.$$

注意对任意的 $M > 0$, 存在 $D_M > 0$ 使得对满足 $|x| \leq M$ 的所有的 x 有 $(e^x - 1 - x)^2 \leq D_M x^2$. 因为 $u(X_t) - u(X_{t-})$ 有界, 由文献 [13, 定理 7.40] 知, 对拟几乎处处的 $x \in E$, M^u 为一个 P_x -平方可积鞅可加泛函. 因此, $(M_t)_{t \geq 0}$ 为一个平方可积鞅可加泛函. 定义二次型

$$\mathcal{E}^G(f, g) = \mathcal{E}(f, g) - \int g d\mu_{\langle M^f, M \rangle}, \quad \forall f, g \in D(\mathcal{E}). \quad (2.2)$$

我们称一个光滑测度 μ 是 Hardy 类光滑测度 (简记为 $\mu \in S_H$), 如果 μ 是一个光滑测度, 且存在常数 $\delta > 0$ 和 $\gamma \geq 0$ 使得

$$\int_E f(x) \mu(dx) \leq \delta \mathcal{E}(f, f) + \gamma \int_E f(x)^2 dm, \quad \forall f \in D(\mathcal{E}).$$

称 δ 为 Hardy 类系数.

定理 2.1 设 $u \in D(\mathcal{E})_b$, $\mu_{\langle M \rangle} \in S_H$ 且 $\delta < \frac{1}{2}$, 则存在一个常数 $\beta > 0$ 使得 $(\mathcal{E}_\beta^G, D(\mathcal{E}))$ 为 $L^2(E; m)$ 上的半 Dirichlet 型, 其中 $\mathcal{E}_\beta^G(f, g) := \mathcal{E}^G(f, g) + \beta(f, g)$, $f, g \in D(\mathcal{E})$. $(P_t^G)_{t \geq 0}$ 为 $L^2(E; m)$ 上一族强连续有界算子, 存在常数 $\beta > 0$ 使得对任意的 $t > 0$, 有 $\|P_t^G\|_{L^2(E; m)} \leq e^{\beta t}$. 此外, 与 $(e^{-\beta t} P_t^G)_{t \geq 0}$ 联系的强制闭型为 $(\mathcal{E}_\beta^G, D(\mathcal{E}))$. 因此, X_t^G 的 β -子过程与 $L^2(E; m)$ 上的半 Dirichlet 型 $(\mathcal{E}_\beta^G, D(\mathcal{E}))$ 相联系.

证明 首先, 我们证明存在一个常数 $\beta > 0$ 使得 $(\mathcal{E}_\beta^G, D(\mathcal{E}))$ 是 $L^2(E; m)$ 上的强制闭型.

设对所有的 $f, g \in D(\mathcal{E})$, 有 $|\mathcal{E}(f, g)| \leq K_1 \mathcal{E}_1(f, f)^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_1(g, g)^{\frac{1}{2}}$, 其中 $K_1 > 0$ 为某些常数, 则

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}^G(f, g)| &= \left| \mathcal{E}(f, g) - \int g d\mu_{\langle M^f, M \rangle} \right| \\ &\leq K_1 \mathcal{E}_1(f, f)^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_1(g, g)^{\frac{1}{2}} + \left(\int d\mu_{\langle M^f \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E g^2 d\mu_{\langle M \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_1 \mathcal{E}_1(f, f)^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_1(g, g)^{\frac{1}{2}} + [2 \max(\delta, \gamma)]^{\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{E}_1(f, f)^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_1(g, g)^{\frac{1}{2}} \\ &= \theta \mathcal{E}_1(f, f)^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_1(g, g)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $\theta := K_1 + \sqrt{2 \max(\delta, \gamma)}$.

设 $\beta = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{\theta}}$, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\beta^G(f, f) &:= \mathcal{E}^G(f, f) + \beta(f, f) \\ &\geq \mathcal{E}(f, f) - \left(\int d\mu_{\langle M^f \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E f^2 d\mu_{\langle M \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} + \beta(f, f) \\ &\geq \mathcal{E}(f, f) - [2 \mathcal{E}(f, f)]^{\frac{1}{2}} (\delta \mathcal{E}(f, f) + \gamma \|f\|_2^2)^{\frac{1}{2}} + \beta(f, f) \\ &\geq \mathcal{E}(f, f) - \sqrt{2\delta} \left[\mathcal{E}^2(f, f) + \frac{\gamma}{\delta} \|f\|_2^2 \mathcal{E}(f, f) \right]^{\frac{1}{2}} + \beta(f, f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{E}(f, f) - \sqrt{2\delta} \left[\left(\mathcal{E}(f, f) + \frac{\gamma}{2\delta} \|f\|_2^2 \right)^2 - \left(\frac{\gamma}{2\delta} \right)^2 \|f\|_2^4 \right]^{\frac{1}{2}} + \beta(f, f) \\
 &\geq \mathcal{E}(f, f) - \sqrt{2\delta} \left[\mathcal{E}(f, f) + \frac{\gamma}{2\delta} \|f\|_2^2 \right] + \beta(f, f) \\
 &= (1 - \sqrt{2\delta}) \mathcal{E}(f, f) + \left(\beta - \frac{\gamma}{\sqrt{2\delta}} \right) \|f\|_2^2 \\
 &= (1 - \sqrt{2\delta}) \mathcal{E}(f, f) + \frac{\gamma}{\sqrt{2\delta}} \|f\|_2^2.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

注意到 $\delta < \frac{1}{2}$, 由 (2.3)、(2.4) 和文献 [1, 第 I 章命题 3.5] 可知, $(\mathcal{E}_\beta^G, D(\mathcal{E}))$ 为 $L^2(E; m)$ 上的一个强制闭型.

下一步, 我们仅需证明:

(A) $(\mathcal{E}_\beta^G, D(\mathcal{E}))$ 的半群为 $(e^{-\beta t} P_t^G)_{t \geq 0}$.

如果 (A) 成立, 则 $(e^{-\beta t} P_t^G)_{t \geq 0}$ 为 $L^2(E; m)$ 上一个强连续解析压缩半群, 因此, $\|e^{-\beta t} P_t^G\|_{L^2(E; m)} \leq 1$, 即 $\|P_t^G\|_{L^2(E; m)} \leq e^{\beta t}$. 注意到, X 的半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 有次 Markov 性, Z_t^u 为正的上鞅, 因此对所有的 $f \in L^2(E; m)$, $0 \leq f \leq 1$, a.e., 有 $0 \leq P_t^G f(x) = E_x[Z_t^u f(X_t)] \leq E_x[Z_t^u] \leq E_x[Z_0^u] = 1$. 从而, $(e^{-\beta t} P_t^G)_{t \geq 0}$ 也有次 Markov 性. 由 Dirichlet 型理论知, $(\mathcal{E}_\beta^G, D(\mathcal{E}))$ 为 $L^2(E; m)$ 上的半 Dirichlet 型.

(A) 的证明与文献 [14, 定理 1.1] 非常类似, 依赖于一个关键引理 (参见文献 [14, 引理 3.2]) 和著名的局部化方法. 事实上, (A) 的证明更简单, 因为半群 $(P_t^G)_{t \geq 0}$ 不含时间逆转部分. 我们不给出详细的证明, 仅给出下面与文献 [14, 引理 3.2] 对应的关键性引理.

引理 2.2 设 $(L^{\mathcal{E}^G}, D(L^{\mathcal{E}^G}))$ 为 $L^2(E; m)$ 上的 $(\mathcal{E}^G, D(\mathcal{E}))$ 的生成元. 如果 $u \in D(\mathcal{E})_b$, $\mu_{\langle M \rangle} \in S_H$ 且 $\delta < \frac{1}{2}$, 则对任意的 $f \in D(L^{\mathcal{E}^G})$, 有

$$Z_t^u f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t Z_{s-}^u dM_s^f + \int_0^t Z_{s-}^u L^{\mathcal{E}^G} f(X_s) ds + \int_0^t f(X_{s-}) Z_{s-}^u dM_s.$$

证明 对任意的 $f \in D(L^{\mathcal{E}^G})$, $g \in D(\mathcal{E})$, 由 (2.2) 知,

$$\mathcal{E}(f, g) = \mathcal{E}^G(f, g) + \int_E g d\mu_{\langle M^f, M \rangle} = -(L^{\mathcal{E}^G} f, g) + \int_E g d\mu_{\langle M^f, M \rangle}.$$

由文献 [3, 引理 5.3.2] 得

$$N_t^f = \int_0^t L^{\mathcal{E}^G} f(X_s) ds - \langle M^f, M \rangle_t.$$

由 Fukushima 分解得

$$f(X_t) - f(X_0) = M_t^f + N_t^f = M_t^f + \int_0^t L^{\mathcal{E}^G} f(X_s) ds - \langle M^f, M \rangle_t. \tag{2.5}$$

注意到 $dZ_t^u = Z_{t-}^u dM_t$ 和 $M_t = M_t^u + B_t - B_t^p$, 由 Itô 公式知,

$$\begin{aligned}
 Z_t^u f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t Z_{s-}^u df(X_s) + \int_0^t f(X_{s-}) dZ_s^u + \langle M^{f,c}, Z^{u,c} \rangle_t + \sum_{s \leq t} (f(X_s) - f(X_{s-}))(Z_s^u - Z_{s-}^u) \\
 &= f(X_0) + \int_0^t Z_{s-}^u dM_s^f + \int_0^t Z_{s-}^u L^{\mathcal{E}^G} f(X_s) ds + \int_0^t f(X_{s-}) Z_{s-}^u dM_s \\
 &\quad - \int_0^t Z_{s-}^u d\langle M^f, M \rangle_s + \int_0^t Z_{s-}^u d\langle M^{f,c}, M^c \rangle_s + \sum_{s \leq t} (f(X_s) - f(X_{s-})) Z_{s-}^u (M_s - M_{s-})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(X_0) + \int_0^t Z_{s-}^u dM_s^f + \int_0^t Z_{s-}^u L^{\mathcal{E}^G} f(X_s) ds - \int_0^t Z_{s-}^u d\langle M^{f,d}, M^d \rangle_s \\
&\quad + \int_0^t f(X_{s-}) Z_{s-}^u dM_s + \sum_{s \leq t} (f(X_s) - f(X_{s-})) Z_{s-}^u (M_s - M_{s-}) \\
&= f(X_0) + \int_0^t Z_{s-}^u dM_s^f + \int_0^t Z_{s-}^u L^{\mathcal{E}^G} f(X_s) ds + \int_0^t f(X_{s-}) Z_{s-}^u dM_s.
\end{aligned}$$

证明完成. $\square$

注 2.3 设 J 为 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 的跳测度. 若 $u \in D(E)_{\text{loc}}$ 且 $\int_E [(u(x) - u(y))^2 J(dy, dx)]$ 为一个光滑测度, 则由文献 [15, 定理 1.4] 知, $\tilde{u}(X_t) - \tilde{u}(X_0)$ 的 Fukushima 分解存在. 因此, Z_t^u 是良定义的. 此外, 易知 B_t 是局部 P_x -可积的. 由文献 [6, 定理 1.1] 知, Z_t^u 是一个上鞅. 因此, 我们把定理 2.1 中的 $u \in D(\mathcal{E})_b$ 推广到满足 $\int_E [(u(x) - u(y))^2 J(dy, dx)]$ 为一个光滑测度的 $u \in D(\mathcal{E})_{\text{loc}}$.

注 2.4 注意一个光滑测度 μ 称为 Kato 类光滑测度, 如果

$$\lim_{t \rightarrow 0} \inf_{\text{Cap}(N)=0} \sup_{x \in E \setminus N} \mathbb{E}_x[A_t^\mu] = 0,$$

其中 $(A_t^\mu)_{t \geq 0}$ 为与 μ 联系的正的连续可加泛函. 设 S_K 为 Kato 类光滑测度. 由文献 [16, 附录] 知, S_K 是 S_H 的一个子类, 因为 S_K 类中 δ 的可以取比 1 小的数. 因此, 定理 2.1 对 $u \in D(\mathcal{E})_b$ 且 $\mu_{\langle M \rangle} \in S_K$ 仍成立.

3 $(X_t^G)_{t \geq 0}$ 联系的 $L^2(E; e^{2u}m)$ 上的二次型

设 $u \in D(\mathcal{E})_b$, $\mu_{\langle M \rangle} \in S_H$ 且 $\delta < \frac{1}{2}$. 设 $(G_\alpha^G)_{\alpha > 0}$ 为 X^G 的预解算子, 即

$$G_\alpha^G f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \mathbb{E}_x[Z_t^u f(X_t)] dt,$$

则由定理 2.1 和 Dirichlet 型理论知, 存在常数 $\beta > 0$ 使得 $(G_{\alpha+\beta}^G)_{\alpha > 0}$ 是 $L^2(E; m)$ 上的强连续压缩次 Markov 预解算子, 存在常数 K_2 使得

$$|(G_{1+\beta}^G f, g)| \leq K_2 (G_{1+\beta}^G f, f)^{\frac{1}{2}} (G_{1+\beta}^G g, g)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

性质 3.1 $(G_{\alpha+\beta}^G)_{\alpha > 0}$ 为 $L^2(E; e^{2u}m)$ 上的一个强连续次 Markov 预解算子,

$$|(G_{1+\beta}^G f, g)_{e^{2u}m}| \leq K_3 (G_{1+\beta}^G f, f)_{e^{2u}m}^{\frac{1}{2}} (G_{1+\beta}^G g, g)_{e^{2u}m}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2)$$

其中 K_3 为某些常数.

证明 (1) 对任意的 $f \in L^2(E; e^{2u}m)$, 由 $(G_{\alpha+\beta}^G)_{\alpha > 0}$ 在 $L^2(E; m)$ 上强连续得

$$0 \leq \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int (\alpha G_{\alpha+\beta}^G f - f)^2 e^{2u} dm \leq e^{2C} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int (\alpha G_{\alpha+\beta}^G f - f)^2 dm = 0,$$

其中 C 为 u 的上确界. 因此, $(G_{\alpha+\beta}^G)_{\alpha > 0}$ 在 $L^2(E; m)$ 上为强连续的.

(2) 对任意的 $f \in L^2(E; e^{2u}m)$, $0 \leq f \leq 1$, 有

$$|\alpha G_{\alpha+\beta}^G f(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \alpha e^{-(\alpha+\beta)t} \mathbb{E}_x[Z_t^u f(X_t)] dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} \mathbb{E}_x[Z_t^u] dt$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} \mathbb{E}_x[Z_0^u] dt = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} = 1.$$

因此, $(G_{\alpha+\beta}^G)_{\alpha>0}$ 在 $L^2(E; e^{2u}m)$ 上为次 Markov 的.

(3) 由于 u 有界, 不失一般性, 设 $|u| < C$, 则由 (3.1)、 $g^+ := g \vee 0$ 与 $g^- := (-g) \vee 0$ 不会同时非零及 $G_{1+\beta}^G$ 的保正性知,

$$\begin{aligned} |(G_{1+\beta}^G f, g)_{e^{2u}m}| &= |(G_{1+\beta}^G f, e^{2u}g)_m| \\ &\leq K_2 (G_{1+\beta}^G f, f)_m^{\frac{1}{2}} (G_{1+\beta}^G e^{2u}g, e^{2u}g)_m^{\frac{1}{2}} \\ &= K_2 (G_{1+\beta}^G f, f)_m^{\frac{1}{2}} (G_{1+\beta}^G e^{2u}g, g)_{e^{2u}m}^{\frac{1}{2}} \\ &= K_2 (G_{1+\beta}^G f, f)_m^{\frac{1}{2}} (G_{1+\beta}^G e^{2u}(g^+ - g^-), g^+ - g^-)_{e^{2u}m}^{\frac{1}{2}} \\ &= K_2 (G_{1+\beta}^G f, e^{-2u}f)_{e^{2u}m}^{\frac{1}{2}} [(G_{1+\beta}^G(e^{2u}g^+), g^+)_{e^{2u}m} + (G_{1+\beta}^G(e^{2u}g^-), g^-)_{e^{2u}m}]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_2 e^C (G_{1+\beta}^G f, e^{-2u}f)_{e^{2u}m}^{\frac{1}{2}} [(G_{1+\beta}^G g^+, g^+)_{e^{2u}m} + (G_{1+\beta}^G g^-, g^-)_{e^{2u}m}]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_2 e^C (G_{1+\beta}^G f, e^{-2u}f)_{e^{2u}m}^{\frac{1}{2}} (G_{1+\beta}^G g, g)_{e^{2u}m}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_2 e^{2C} (G_{1+\beta}^G f, f)_{e^{2u}m}^{\frac{1}{2}} (G_{1+\beta}^G g, g)_{e^{2u}m}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

设 $K_3 = K_2 e^{2C}$, 从而可得 (3.2).

定义 $L^2(E; e^{2u}m)$ 上的二次型 $(Q_\beta, D(Q))$:

$$\begin{aligned} Q_\beta(f, g) &:= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha(f - \alpha G_{\alpha+\beta}^G f, g)_{e^{2u}m}, \\ D(Q) &:= D(\mathcal{E})_b. \end{aligned} \tag{3.3}$$

事实上, 因为 $|e^{2u(x)} - 1| \leq e^{2\|u\|_\infty} |u(x)|$, $|e^{2u(x)} - 1 - (e^{2u(y)} - 1)| \leq e^{3\|u\|_\infty} |u(x) - u(y)|$, 由文献 [1, 第 I 章命题 4.11] 知, $e^{2u} - 1 \in D(\mathcal{E})_b$. 因此, 当 $g \in D(\mathcal{E})_b$ 时, $e^{2u}g \in D(\mathcal{E})_b$. 因此, 由定理 2.1 和 Dirichlet 型理论知,

$$\begin{aligned} Q_\beta(f, g) &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha(f - \alpha G_{\alpha+\beta}^G f, g e^{2u}) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha(f - \alpha(G_\alpha^G f - \beta G_\alpha^G G_{\alpha+\beta}^G f), g e^{2u}) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha(f - \alpha G_\alpha^G f, g e^{2u}) + \beta \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta + \alpha} (\alpha G_\alpha^G (\alpha + \beta) G_{\alpha+\beta}^G f, g e^{2u}) \\ &= \mathcal{E}^G(f, e^{2u}g) + \beta(f, e^{2u}g) \\ &= \mathcal{E}_\beta^G(f, e^{2u}g). \end{aligned}$$

设

$$Q(f, g) := Q_\beta(f, g) - \beta(f, g)_{e^{2u}m} = \mathcal{E}^G(f, e^{2u}g) = \mathcal{E}(f, e^{2u}g) - \int g e^{2u} d\mu_{\langle M^f, M \rangle}. \tag{3.4}$$

因此, 对 $f, g \in D(Q)$, 有

$$Q(f, g) = \mathcal{E}(f, e^{2u}g) - \int e^{2u}g d\mu_{\langle M^f, M^u \rangle} - \int e^{2u}g d\mu_{\langle M^f, M^d \rangle}, \tag{3.5}$$

我们称之为 $(X_t^G)_{t \geq 0}$ 联系的 $L^2(E; e^{2u}m)$ 上的二次型. 下面给出 $(Q, D(Q))$ 的表达式, 并与对偶 Markov 过程 Girsanov 变换后的型作比较.

首先, 我们引入一些记号. 设 $\hat{\mathcal{E}}^c$ 为对偶 Dirichlet 型 $(\hat{\mathcal{E}}, D(\mathcal{E}))$ 的如下意义上的左强局部部分: 如果 f 在包含 g 的拟支撑的一个拟开集上拟几乎处处为常数, 则 $\hat{\mathcal{E}}^c(f, g) = 0$ (参见文献 [17, 定理 4.1]). 定义

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}^c(w, v) &:= \frac{1}{2}(\mathcal{E}^c(w, v) - \hat{\mathcal{E}}^c(w, v)), \quad w, v \in D(\mathcal{E}), \\ \tilde{\mathcal{E}}(w, v) &:= \frac{1}{2}(\mathcal{E}(w, v) + \hat{\mathcal{E}}(w, v)), \quad w, v \in D(\mathcal{E}).\end{aligned}$$

设 $\tilde{\mathcal{E}}^c$ 为 $(\tilde{\mathcal{E}}, D(\mathcal{E}))$ 的强局部部分, $\tilde{\mu}^c$ 为能量测度关于 $(\tilde{\mathcal{E}}, D(\mathcal{E}))$ 的局部部分. 注意 J 为 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 的跳测度. 记 $\hat{J}(dx, dy) = J(dy, dx)$, 设 $J_1 := (J - \hat{J})^+$ 为 $J - \hat{J}$ 的 Jordan 分解的正部. 称 J_1 为 J 的非对称部分. 注意, $J_0 := J - J_1$ 为由 J 控制的最大的 σ -有限的正的对称测度. 设 $K(dx)$ 为 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 的杀死测度. 现在可以陈述本节的主要结果.

定理 3.2 设 X 是与 $L^2(E; m)$ 上非对称 Dirichlet 型 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 联系的右过程, J 为 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 的跳测度且满足 $J_1(E \times E \setminus d) < \infty$. 设 $u \in D(\mathcal{E})_b$, $\mu_{\langle M \rangle} \in S_H$ 且 $\delta < \frac{1}{2}$, 则对 $f, g \in D(\mathcal{E})_b$, 有

$$\begin{aligned}Q(f, g) &= \tilde{\mathcal{E}}^c(f, ge^{2u}) + \frac{1}{2} \int e^{2u} d\tilde{\mu}_{\langle f, g \rangle}^c + 2 \int_{E \times E \setminus d} e^{u(y)+u(x)} [f(y) - f(x)] g(y) J(dx, dy) \\ &\quad + \int e^{u(x)} f(x) g(x) K(dx) \\ &= \mathcal{E}(fe^u, ge^u) - \mathcal{E}(u, fge^{2u}) + \int fge^{2u} d\mu_u.\end{aligned}\quad (3.6)$$

证明 类似于文献 [12, (1.1)、(2.21) 和 (2.22)] 可得

$$\mathcal{E}(f, e^{2u}g) - \int_E e^{2u} g d\mu_{\langle M^f, M \rangle} - \int_E fge^{2u} g d\mu_u = \mathcal{E}(fe^u, e^u g) - \mathcal{E}(u, fge^{2u}).$$

因此, 由 (3.4) 可得 (3.6) 的第二个等号成立.

由文献 [17, 定理 4.8 和命题 5.1] 可得, 对 $f, g \in D(\mathcal{E})_b$, 有如下的 Beurling-Deny 分解:

$$\mathcal{E}(f, g) = \mathcal{E}^c(f, g) + \text{S.P.V.} \int_{E \times E \setminus d} 2(f(y) - f(x))g(y)J(dx, dy) + \int_E fgdK. \quad (3.7)$$

其中 S.P.V. 表示对称原理值积分 (参见文献 [17, 定义 2.5]), $\mathcal{E}^c$ 满足左强局部性.

设 $\phi \in D(\mathcal{E})_b$. 由文献 [3, (5.3.2)] 知,

$$\int g d\mu_{\langle M^f, M^\phi \rangle} = \mathcal{E}(f, g\phi) + \mathcal{E}(\phi, gf) - \mathcal{E}(f\phi, g). \quad (3.8)$$

类似于文献 [4, 定理 5.3.1] (也可参见文献 [3, 第 5 章]), 我们可得 $J(dx, dy) = \frac{1}{2}N(y, dx)\nu(dy)$ 和 $K(dx) = N(x, \Delta)\nu(dx)$. 因此, 类似于文献 [12, (2.19)] 可得

$$\begin{aligned}\int_E e^{2u} g d\mu_{\langle M^f, M^d \rangle} &= \int_E \int_{E_\Delta} e^{2u(x)} g(x) [f(y) - f(x)] [e^{(u(y)-u(x))} - 1 - (u(y) - u(x))] N(x, dy) \nu(dx) \\ &= 2 \int \int_{E \times E \setminus d} e^{2u(y)} g(y) [f(x) - f(y)] [e^{(u(x)-u(y))} - 1 - (u(x) - u(y))] J(dx, dy) \\ &\quad - \int_E e^{2u(x)} g(x) f(x) [e^{-u(x)} - 1 + u(x)] K(dx).\end{aligned}\quad (3.9)$$

由 (3.5)、(3.8) 和 (3.9) 可得, 对 $f, g \in D(\mathcal{E})_b$, 有

$$\begin{aligned} Q(f, g) &= \{\mathcal{E}^c(f, e^{2u}g) - \mathcal{E}^c(f, e^{2u}gu) - \mathcal{E}^c(u, e^{2u}gf) + \mathcal{E}^c(fu, e^{2u}g)\} \\ &\quad + \text{S.P.V.} \int_{E \times E \setminus d} 2e^{u(y)+u(x)}[f(y) - f(x)]g(y)J(dx, dy) + \int_E e^{u(x)}f(x)g(x)K(dx). \end{aligned}$$

因此要证明定理 3, 我们只需证明

$$\mathcal{E}^c(f, e^{2u}g) - \mathcal{E}^c(f, e^{2u}gu) - \mathcal{E}^c(u, e^{2u}gf) + \mathcal{E}^c(fu, e^{2u}g) = \check{\mathcal{E}}^c(f, e^{2u}g) + \frac{1}{2} \int_E e^{2u} d\tilde{\mu}_{\langle f, g \rangle}^c. \quad (3.10)$$

与文献 [18, (3.4)] 类似, 对 $w, v \in D := C_0(E) \cap D(\mathcal{E})$, 我们引入一个线性泛函 $\langle L(w, v), \cdot \rangle$:

$$\langle L(w, v), f \rangle := \check{\mathcal{E}}^c(w, vf), \quad (3.11)$$

则线性泛函 $\langle L(w, v), \cdot \rangle$ 可以被拓展到任意的 $w, v \in D_{\text{loc}}$ (参见文献 [18, 定义 3.6]).

由 (3.11) 和文献 [12, 引理 2.3] 可得

$$\check{\mathcal{E}}^c(f, e^{2u}g) - \check{\mathcal{E}}^c(f, e^{2u}gu) - \check{\mathcal{E}}^c(u, e^{2u}gf) + \check{\mathcal{E}}^c(fu, e^{2u}g) = \check{\mathcal{E}}^c(f, e^{2u}g). \quad (3.12)$$

由 LeJan 公式 (参见文献 [4, 定理 3.2.2 和第 117 页]) 可得

$$\begin{aligned} &\check{\mathcal{E}}^c(f, e^{2u}g) - \check{\mathcal{E}}^c(f, e^{2u}gu) - \check{\mathcal{E}}^c(u, e^{2u}gf) + \check{\mathcal{E}}^c(fu, e^{2u}g) \\ &= \frac{1}{2} \int_E d\tilde{\mu}_{\langle f, e^{2u}g \rangle}^c - \frac{1}{2} \int_E d\tilde{\mu}_{\langle f, e^{2u}gu \rangle}^c - \frac{1}{2} \int_E d\tilde{\mu}_{\langle u, e^{2u}gf \rangle}^c + \frac{1}{2} \int_E d\tilde{\mu}_{\langle fu, e^{2u}g \rangle}^c \\ &= \frac{1}{2} \int_E e^{2u} d\tilde{\mu}_{\langle f, g \rangle}^c. \end{aligned} \quad (3.13)$$

由 (3.12) 和 (3.13) 可得 (3.6) 的第一个等号成立. 从而定理得证. $\square$

注 3.3 对对称 Dirichlet 型, $\check{\mathcal{E}}^c(f, g) = 0$ 且 $J(dx, dy) = J(dy, dx)$, 因此,

$$\begin{aligned} &2 \int_{E \times E \setminus d} e^{u(y)+u(x)}[f(y) - f(x)]g(y)J(dx, dy) \\ &= \int_{E \times E \setminus d} e^{u(y)+u(x)}[f(y) - f(x)]g(y)J(dx, dy) + \int_{E \times E \setminus d} e^{u(y)+u(x)}[f(x) - f(y)]g(x)J(dy, dx) \\ &= \int_{E \times E \setminus d} e^{u(y)+u(x)}[f(y) - f(x)]g(y)J(dx, dy) - \int_{E \times E \setminus d} e^{u(y)+u(x)}[f(y) - f(x)]g(x)J(dx, dy) \\ &= \int_{E \times E \setminus d} e^{u(y)+u(x)}[f(y) - f(x)][g(y) - g(x)]J(dx, dy). \end{aligned}$$

从而,

$$Q(f, g) = \frac{1}{2} \int_E e^{2u} d\tilde{\mu}_{\langle f, g \rangle}^c + \int_{E \times E \setminus d} e^{u(y)+u(x)}[f(y) - f(x)][g(y) - g(x)]J(dx, dy) + \int_E e^u fgK(dx).$$

注意到 $u \in D(\mathcal{E})_b$, 因此, 对 $f \in D(\mathcal{E})$, 有

$$e^{-2C} \mathcal{E}_1(f, f) \leq Q(f, f) \leq e^{2C} \mathcal{E}_1(f, f).$$

注意到 $(Q, D(\mathcal{E}))$ 在 $L^2(E; e^{2u}m)$ 上对称. 因此, 由文献 [1, 第 I 章命题 3.5] 知, $(Q, D(\mathcal{E}))$ 是 $L^2(E; e^{2u}m)$ 上的强制闭型. 由 $\alpha G_{\beta+\alpha}^G$ 在 $L^2(E; e^{2u}m)$ 上的次 Markov 性和 Dirichlet 型理论可知, $(Q, D(\mathcal{E}))$ 是

$L^2(E; e^{2u}m)$ 上的一个 Dirichlet 型. 因此, 我们的结果与文献 [5, 定理 3.2] 在对称 Dirichlet 型情形下是一致的.

但是对非对称 Dirichlet 型来说, $\check{\mathcal{E}}^c(f, g) = 0$ 对所有的 $f, g \in D(\mathcal{E})$ 可能不成立. 下面给出一个例子 (参见文献 [11, 例 2.4]).

设 $E = U$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的一个有界开子集, 设 m_x 为 2 维的 Lebesgue 测度. 定义 $a_{11} = 2 + x_1^2$, $a_{12}(x) = x_1$, $a_{21}(x) = 0$, $a_{22}(x) = 2 + x_2^2$,

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_U a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx, \quad \forall f, g \in H^{1,2}(U),$$

$$D(\mathcal{E}) = H^{1,2}(U) = \left\{ f \in L^2(U; dx) \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(U; dx), 1 \leq i \leq 2 \right\},$$

则由文献 [11, 例 2.4] 知, $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 是 $L^2(U; dx)$ 上一个非对称 Dirichlet 型且 $\mathcal{E}^c(f, g) = \mathcal{E}(f, g)$. 设 $\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, $\check{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$, $1 \leq i, j \leq 2$, 则

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{E}}^c(f, g) &:= \frac{1}{2}[\mathcal{E}^c(f, g) - \hat{\mathcal{E}}^c(f, g)] = \frac{1}{2}[\mathcal{E}^c(f, g) - \mathcal{E}^c(g, f)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_U a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_U a_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_U \check{a}_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx = \frac{1}{2} \left[\int_U \check{a}_{12} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} dx + \int_U \check{a}_{21} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} dx \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_U x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_1 dx_2 - \int_U x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \right]. \end{aligned}$$

设

$$U := \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}, \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2, \quad g(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2,$$

则 $f, g \in D(\mathcal{E})$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 1$, $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial g}{\partial x_2} = 2$, 因此,

$$\check{\mathcal{E}}^c(f, g) = \frac{1}{4} \int_U 3x_1 dx_1 dx_2 = \frac{3}{8} \neq 0.$$

注 3.4 如果 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 是一个强局部非对称 Dirichlet 型, 则 $\mu_u = \frac{1}{2}\mu_{\langle M^u \rangle}$. 此外, 如果 N_t^u 为有界变差且

$$N_t^u = N_t^{(1)} - N_t^{(2)}, \quad t < \zeta,$$

其中 $N_t^{(1)}$ 和 $N_t^{(2)}$ 为正的连续可加泛函, 其对应的 Revuz 测度分别为 ν_1 和 ν_2 , 则由文献 [3, 定理 5.2.7] 可知,

$$\begin{aligned} Q(f; g) &= \mathcal{E}(fe^u, ge^u) + \mathcal{E}(u, fge^{2u}) + \int fge^{2u} d\mu_u \\ &= \mathcal{E}(fe^u, ge^u) + \int fge^{2u} d(\nu_1 - \nu_2) + \int fge^{2u} d\mu_u \\ &= \mathcal{E}(fe^u, ge^u) + \int fge^{2u} d(\mu_u + \nu_1 - \nu_2). \end{aligned}$$

此结果与文献 [11, 定理 3.4] 一致. 此外, 我们不需要 Girsanov 变换过程 X^G 和 $\hat{X}^G$ 关于 $e^{2u}m$ 对偶. 这里 $\hat{X}^G$ 是对偶过程 $\hat{X}$ 由 $\hat{Z}_t^u := e^{\hat{M}_t^u - \hat{A}_t^u}$ 诱导的 Girsanov 变换过程, 其中 $\hat{A}_t^u = \int_0^t \int_{E_\Delta} [e^{(u(y) - u(\hat{X}_s))}]$

$-1 - (u(y) - u(\hat{X}_s))\hat{N}(\hat{X}_s, dy)d\hat{H}_s$, $\hat{M}_t^u$ 为 $\tilde{u}(\hat{X}_t) - \tilde{u}(\hat{X}_0)$ 的 Fukushima 分解中的鞅可加泛函, $(\hat{N}, \hat{H})$ 为 $\hat{X}$ 的 Lévy 系.

4 X^G 和 $\hat{X}^G$ 关于 $e^{2u}m$ 对偶的充分必要条件

性质 4.1 当 $u \in D(\mathcal{E})_b$ 时, 存在一个由紧集组成的 $\mathcal{E}$ -网 $\{F_n\}_{n \geq 1}$ 使得对任意的 n , X^G 在 E_n 上的部分过程 X_n^G 联系着 $L^2(E_n, m)$ 上的一个半 Dirichlet 型 $(\mathcal{E}^G, D(\mathcal{E})_{E_n})$. 这里 E_n 为 F_n 的精内部. 此外, 当 $J_1(E \times E \setminus d) < \infty$ 时, 对任意的 $f, g \in D(\mathcal{E})_{E_n, b}$, 有

$$\mathcal{E}^G(f, ge^{2u}) = \mathcal{E}(fe^u, ge^u) + \mathcal{E}(1 - e^u, fge^u). \quad (4.1)$$

证明 当 u 有界时, 由第 1 节知 $\mu_{\langle M \rangle} \in S$. 类似于文献 [19, 定理 2.4], 存在一个由紧集组成的 $\mathcal{E}$ -网 $\{F_n\}_{n \geq 1}$ 使得对任意的 n , 有 $I_{F_n}\mu_{\langle M \rangle} \in S_K$. 由注 2.4 知, $(\mathcal{E}^G, D(\mathcal{E})_{E_n})$ 为 $L^2(E_n, m)$ 上的半 Dirichlet 型. 由定理 2.1 知其与 X_n^G 联系. 由 (3.6)、(1.1) 和 $\mathcal{E}^G(f, e^{2u}g) = Q(f, g)$ 知,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^G(f, ge^{2u}) &= \mathcal{E}(fe^u, ge^u) - \mathcal{E}(u, fge^{2u}) + \int fge^{2u}d\mu_u \\ &= \mathcal{E}(fe^u, ge^u) - \mathcal{E}(u, fge^{2u}) + \frac{1}{2} \int_E f(x)g(x)e^{2u(x)}d\mu_{\langle M^u \rangle} \\ &\quad + \int_{E \times E_\Delta} \left[e^{(u(y)-u(x))} - 1 - (u(y)-u(x)) - \frac{1}{2}(u(y)-u(x))^2 \right] f(x)g(x)e^{2u(x)}N(x, dy)\nu(dx) \\ &= \mathcal{E}(fe^u, ge^u) - \mathcal{E}(u, fge^{2u}) + \mathcal{E}(u, fge^{2u}u) - \frac{1}{2}\mathcal{E}(u^2, fge^{2u}) \\ &\quad + 2 \int_{E \times E \setminus d} \left[e^{(u(x)-u(y))} - 1 - (u(x)-u(y)) - \frac{1}{2}(u(x)-u(y))^2 \right] f(y)g(y)e^{2u(y)}J(dx, dy) \\ &\quad + \int_E f(x)g(x)e^{2u(x)} \left(e^{-u(x)} - 1 + u(x) - \frac{1}{2}u^2(x) \right) K(dx). \end{aligned} \quad (4.2)$$

由 (3.11) 和文献 [12, 引理 2.3] 可得 $\mathcal{E}^G(f, ge^{2u}) - \mathcal{E}(fe^u, ge^u)$ 的非对称连续部分为

$$-\check{\mathcal{E}}^c(u, fge^{2u}) + \check{\mathcal{E}}^c(u, fge^{2u}u) - \frac{1}{2}\check{\mathcal{E}}^c(u^2, fge^{2u}) = -\check{\mathcal{E}}^c(u, fge^{2u}) = \check{\mathcal{E}}^c(1 - e^u, fge^u). \quad (4.3)$$

由 LeJan 公式 (参见文献 [4, 定理 3.2.2 和第 117 页]) 可得 $\mathcal{E}^G(f, ge^{2u}) - \mathcal{E}(fe^u, ge^u)$ 的对称连续部分有如下的表达式:

$$\begin{aligned} &-\check{\mathcal{E}}^c(u, fge^{2u}) + \check{\mathcal{E}}^c(u, fge^{2u}u) - \frac{1}{2}\check{\mathcal{E}}^c(u^2, fge^{2u}) \\ &= -\frac{1}{2} \int_E d\tilde{\mu}_{\langle u, fge^{2u} \rangle}^c + \frac{1}{2} \int_E d\tilde{\mu}_{\langle u, fge^{2u}u \rangle}^c - \frac{1}{4} \int_E d\tilde{\mu}_{\langle u^2, fge^{2u} \rangle}^c \\ &= -\frac{1}{2} \int_E f(x)g(x)e^{2u(x)}d\tilde{\mu}_{\langle u, u \rangle}^c - \frac{1}{2} \int_E e^{2u(x)}d\tilde{\mu}_{\langle u, fg \rangle}^c \\ &= \frac{1}{2} \int_E d\tilde{\mu}_{\langle 1-e^u, fge^u \rangle}^c = \check{\mathcal{E}}^c(1 - e^u, fge^u). \end{aligned} \quad (4.4)$$

由 Beurling-Deny 公式 (3.7) 知, $\mathcal{E}^G(f, ge^{2u}) - \mathcal{E}(fe^u, ge^u)$ 的跳部分为

$$-2 \int_{E \times E \setminus d} (u(y) - u(x))f(y)g(y)e^{2u(y)}J(dx, dy) + 2 \int_{E \times E \setminus d} (u(y) - u(x))f(y)g(y)e^{2u(y)}u(y)J(dx, dy)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{E \times E \setminus d} (u^2(y) - u^2(x)) f(y) g(y) e^{2u(y)} J(dx, dy) \\
& + 2 \int_{E \times E \setminus d} \left[e^{(u(x) - u(y))} - 1 - (u(x) - u(y)) - \frac{1}{2} (u(x) - u(y))^2 \right] f(y) g(y) e^{2u(y)} J(dx, dy) \\
& = 2 \int_{E \times E \setminus d} (e^{u(x)} - e^{u(y)}) f(y) g(y) e^{u(y)} J(dx, dy). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

$\mathcal{E}^G(f, ge^{2u}) - \mathcal{E}(fe^u, ge^u)$ 的杀死部分为

$$\begin{aligned}
& - \int_E u(x) f(x) g(x) e^{2u(x)} K(dx) + \int_E f(x) g(x) e^{2u(x)} u^2(x) K(dx) - \frac{1}{2} \int_E u^2(x) f(x) g(x) e^{2u(x)} K(dx) \\
& + \int_E f(x) g(x) e^{2u(x)} \left(e^{-u(x)} - 1 + u(x) - \frac{1}{2} u^2(x) \right) K(dx) \\
& = \int_E f(x) g(x) e^{u(x)} (1 - e^{u(x)}) K(dx). \tag{4.6}
\end{aligned}$$

由 (4.3)–(4.6) 和 Beurling-Deny 公式可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^G(f, ge^{2u}) - \mathcal{E}(fe^u, ge^u) &= \tilde{\mathcal{E}}(1 - e^u, fge^u) + \tilde{\mathcal{E}}^c(1 - e^u, fge^u) + \int_E f(x) g(x) e^{u(x)} (1 - e^{u(x)}) K(dx) \\
&+ 2 \int_{E \times E \setminus d} (e^{u(x)} - e^{u(y)}) f(y) g(y) e^{u(y)} J(dx, dy) \\
&= \mathcal{E}(1 - e^u, fge^u).
\end{aligned}$$

因此, 我们得到等式 (4.1).

定理 4.2 当 $u \in D(\mathcal{E})_b$, $J_1(E \times E - d) < \infty$ 时, 过程 X^G 和 $\hat{X}^G$ 在 $L^2(E, e^{2u}m)$ 上对偶的充要条件是对任意的 $f \in D(\mathcal{E})$, 有

$$\mathcal{E}(e^u - 1, f) = \mathcal{E}(f, e^u - 1). \tag{4.7}$$

证明 注意到 $(X, \hat{X})$ 联系着 Dirichlet 型 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$. 由性质 4.1 知, 存在一列由紧集组成的序列 $\mathcal{E}$ -网 $\{F_n\}_{n \geq 1}$ 使得在 $L^2(E; m)$ 上, 部分过程 X_n^G 联系着半 Dirichlet 型 $(\mathcal{E}^G, D(\mathcal{E})_{E_n})$, 部分过程 $\hat{X}_n^G$ 联系着某个半 Dirichlet 型 $(\hat{\mathcal{E}}^G, D(\mathcal{E})_{E_n})$, 这里 E_n 为 F_n 的精内部. 设 $\tau_n = \inf\{t > 0 : X_t \in E_n^c\}$, $\hat{\tau}_n = \inf\{t > 0 : \hat{X}_t \in E_n^c\}$. 定义 $P_t^{G,n} f(x) = E_x[Z_t^u f(X_t), t < \tau_n]$, $\hat{P}_t^{G,n} f(x) = \hat{E}_x[\hat{Z}_t^u f(\hat{X}_t), t < \hat{\tau}_n]$. 由文献 [4, 定理 A.2.10]、 X_t^G 和 $\hat{X}_t^G$ 的定义可知, $P_t^{G,n}$ 和 $\hat{P}_t^{G,n}$ 分别是部分过程 X_n^G 和 $\hat{X}_n^G$ 的转移半群. 如果 X^G 和 $\hat{X}^G$ 在 $L^2(E, e^{2u}m)$ 上对偶, 则类似于文献 [4, 引理 4.1.3] 可得, 对任意非负函数 $f, g \in \mathcal{B}(E)$, 有

$$(P_t^{G,n} f, g)_{e^{2u}m} = (f, \hat{P}_t^{G,n} g)_{e^{2u}m}. \tag{4.8}$$

由 (4.8)、型与半群的对应关系可得, 对任意的 $f, g \in D(\mathcal{E})_{E_n, b}$, 有

$$\mathcal{E}^G(f, ge^{2u}) = \hat{\mathcal{E}}^G(g, fe^{2u}). \tag{4.9}$$

设 $\hat{J}(dx, dy)$ 为 $(\hat{\mathcal{E}}, D(\mathcal{E}))$ 的跳测度, $\hat{J}_1$ 为由 $\hat{J}$ 控制的最大对称的 σ -有限正测度. 注意 $J(dx, dy) = J(dy, dx)$, $J_1(E \times E \setminus d) \leq J(E \times E \setminus d) < \infty$, $\hat{J}_1(E \times E \setminus d) \leq \hat{J}(E \times E \setminus d) = J(E \times E \setminus d) < \infty$, 因此, 由性质 4.1 可得, 对任意的 $f, g \in D(\mathcal{E})_{E_n, b}$, $\mathcal{E}(1 - e^u, fg) = \mathcal{E}(fg, 1 - e^u)$. 设 e_{E_n} 为 1 在 E_n 上的扫描函数. 注

意到对非对称 Dirichlet 型, 1 是 1- 过分函数, 因此, 由文献 [1, 第 III 章命题 1.5] 可得, $e_{E_n} \in D(\mathcal{E})$, 在 E_n 上有 $e_{E_n} = 1$. 设 $g = e_{E_n} \wedge 1$, 则 $g \in D(\mathcal{E})_{E_n, b}$, 在 E_n 上有 $g = 1$. 因此, 对任意的 $f \in D(\mathcal{E})_{E_n, b}$, 有

$$\mathcal{E}(1 - e^u, f) = \mathcal{E}(1 - e^u, fg) = \mathcal{E}(fg, 1 - e^u) = \mathcal{E}(f, 1 - e^u).$$

对任意的 $f \in D(\mathcal{E})_{E_n}$, 设 $f_k = (f \wedge k) \vee (-k)$, 则由文献 [1, 第 I 章命题 4.17] 可得, $f_k \in D(\mathcal{E})_{E_n, b}$, 在 $D(\mathcal{E})$ 中, $f_k \rightarrow f$. 因此, 对任意的 $f \in D(\mathcal{E})_{E_n}$, 有

$$\mathcal{E}(1 - e^u, f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}(1 - e^u, f_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}(f_k, 1 - e^u) = \mathcal{E}(f, 1 - e^u).$$

由文献 [20, 引理 3.6 和 3.7] 得 $\bigcup_n D(\mathcal{E})_{E_n}$ 在 $D(\mathcal{E})$ 中稠密. 因此, 对任意的 $f \in D(\mathcal{E})$, 有 $\mathcal{E}(1 - e^u, f) = \mathcal{E}(f, 1 - e^u)$.

反之, 若对任意的 $f \in D(\mathcal{E})$, 有 $\mathcal{E}(e^u - 1, f) = \mathcal{E}(f, e^u - 1)$, 则由性质 4.1 可得对任意 $f, g \in D(\mathcal{E})_{E_n, b}$, 有 $\mathcal{E}^G(f, ge^{2u}) = \hat{\mathcal{E}}^G(g, fe^{2u})$. 设 $(L^{G, n}, D(L^{G, n}))$ ($(\hat{L}^{G, n}, D(\hat{L}^{G, n}))$)、 $\{G_\alpha^{G, n}\}_{\alpha > \alpha_0}$ ($\{\hat{G}_\alpha^{G, n}\}_{\alpha > \alpha_0}$) 和 $T_t^{G, n}$ ($\hat{T}_t^{G, n}$) 分别为 $(\mathcal{E}^G, D(\mathcal{E})_{E_n})$ ($(\hat{\mathcal{E}}^G, D(\mathcal{E})_{E_n})$) 的无穷小生成元、预解算子和半群, 则

$$(G_\alpha^{G, n} f, g)_{e^{2u}m} = (f, \hat{G}_\alpha^{G, n} g)_{e^{2u}m}.$$

对任意的 $f \in D(L^{G, n})$, 设

$$T_t^{G, n, \alpha} f = e^{-t\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\alpha)^k}{k!} (\alpha G_\alpha^{G, n})^k f.$$

注意到 $P_t^{G, n} f(x) = T_t^{G, n} f(x)$ q.e. $x \in E_n$, 则由文献 [1, 第 I 章定理 1.12] 的证明过程可得

$$P_t^{G, n} f(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_t^{n, \alpha} f(x) \quad \text{q.e. } x \in E_n. \quad (4.10)$$

因此, 当 $f \in D(L^{G, n})$ 和 $g \in D(\hat{L}^{G, n})$ 为任意非负函数时, 由 (4.10) 知, $(P_t^{G, n} f, g)_{e^{2u}m} = (f, \hat{P}_t^{G, n} g)_{e^{2u}m}$. 由半群 $P_t^{G, n}$ 和 $\hat{P}_t^{G, n}$ 的强连续性, 及 $D(L^{G, n})$ 和 $D(\hat{L}^{G, n})$ 在 $D(\mathcal{E})_{E_n}$ 中稠密, 从而在 $L^2(E_n; e^{2u}m)$ 中稠密, 我们得到对于任意非负函数 $f, g \in L^2(E_n; e^{2u}m)$, (4.8) 成立. 因此, 对任意非负函数 $f, g \in \mathcal{B}(E)$, (4.8) 成立. 令 $n \rightarrow \infty$, 由单调收敛定理得 $(P_t^G f, g)_{e^{2u}m} = (f, \hat{P}_t^G g)_{e^{2u}m}$. 因此, X_t^G 与 $\hat{X}_t^G$ 在 $L^2(E; e^{2u}m)$ 上对偶.

注 4.3 当 $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ 为对称 Dirichlet 型时, (4.7) 自然成立, 从而, X^G 和 $\hat{X}^G$ 关于 $e^{2u}m$ 对偶. 设 $(X, \hat{X})$ 为与 Dirichlet 型

$$\mathcal{E}(f, g) := \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx$$

联系的一对扩散过程. 由定理 4.2, 类似地, 我们得到 X^G 与 $\hat{X}^G$ 对偶等价于对任意的 $f \in D(\mathcal{E})$, 有

$$\sum_{i, j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} a_{ij} \frac{\partial(1 - e^u)}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx = \sum_{i, j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial(1 - e^u)}{\partial x_j} dx. \quad (4.11)$$

设 $\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$, 当 $u \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$, $\frac{\partial^2(1 - e^u)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2(1 - e^u)}{\partial x_j \partial x_i}$ 时, 有

$$\sum_{i, j=1}^d \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2(1 - e^u)}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

因此,

$$\begin{aligned}
 (4.11) &\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^d \int_{R^d} \check{a}_{ij} \frac{\partial(1-e^u)}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^d \int_{R^d} -f(x) \frac{\partial(\check{a}_{ij} \frac{\partial(1-e^u)}{\partial x_i})}{\partial x_j} dx = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^d \int_{R^d} f(x) \frac{\partial \check{a}_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial(1-e^u)}{\partial x_i} dx + \int_{R^d} f(x) \sum_{i,j=1}^d \check{a}_{ij} \frac{\partial^2(1-e^u)}{\partial x_i \partial x_j} dx = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^d \int_{R^d} f(x) e^u \frac{\partial \check{a}_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial \check{a}_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad m\text{-a.e.}
 \end{aligned}$$

由另一种方法, 文献 [11, 例 2.3] 证明了, 如果对任意的 $u \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial \check{a}_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

则 X^G 和 $\hat{X}^G$ 对偶.

致谢 作者非常感谢审稿人的建议.

参考文献

- 1 Ma Z M, Röckner M. Introduction to Theory of (Non-Symmetric) Dirichlet Forms. Berlin: Springer-Verlag, 1992
- 2 Chen Z Q, Ma Z M, Röckner M. Quasi-homeomorphisms of Dirichlet forms. Nagoya Math J, 1994, 136: 1–15
- 3 Oshima Y. Semi-Dirichlet Forms and Markov Processes. Berlin: Walter de Gruyter, 2013
- 4 Fukushima M, Oshima Y, Takeda M. Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes. Berlin: Walter de Gruyter, 1994
- 5 Chen C Z, Ma Z M, Sun W. On Girsanov and generalized Feynman-Kac transformations for symmetric Markov processes. Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top, 2007, 10: 141–163
- 6 Chen C Z, Yang S S. Necessary and sufficient conditions for a class positive local martingale. Adv Pure Math, 2014, 4: 545–549
- 7 Blumenthal R M, Gettoor R K. Markov Processes and Potential Theory. New York: Academic Press, 1968
- 8 Fukushima M, Takeda M. A transformation of symmetric Markov processes and the Donsker-Varadhan theory. Osaka J Math, 1984, 21: 311–326
- 9 Fitzsimmons P J. Absolute continuity of symmetric diffusions. Ann Probab, 1997, 225: 230–258
- 10 Chen Z Q, Zhang T S. Girsanov and Feynman-Kac type transformations for symmetric Markov processes. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 2002, 38: 475–505
- 11 Chen C Z, Sun W. Girsanov transformations for non-symmetric diffusions. Canad J Math, 2009, 61: 534–547
- 12 Ma L, Sun W. On the generalized Feynman-Kac transformation for nearly symmetric Markov processes. J Theoret Probab, 2012, 25: 733–755
- 13 He S W, Wang J G, Yan J A. Semimartingale Theory and Stochastic Calculus. Beijing: Science Press, 1992
- 14 Chen Z Q, Fitzsimmons P J, Kuwae K, et al. On general perturbations of symmetric Markov processes. J Math Pures Appl (9), 2009, 92: 363–374
- 15 Ma Z M, Sun W, Wang L F. Fukushima type decomposition for semi-Dirichlet forms. ArXiv:1402.4341, 2014
- 16 Ma L. Generalized Feynman-Kac transformation and Fukushima's decomposition for nearly symmetric Markov processes. PhD Thesis. Montreal: Concordia University, 2011

- 17 Hu Z C, Ma Z M, Sun W. Extensions of Lévy-Khintchine formula and Beurling-Deny formula in semi-Dirichlet forms setting. *J Funct Anal*, 2006, 239: 179–213
- 18 Hu Z C, Ma Z M, Sun W. On representations of non-symmetric Dirichlet forms. *Potential Anal*, 2010, 32: 101–131
- 19 Albeverio S, Ma Z M. Additive functionals, nowhere Radon and Kato class smooth measures associated with Dirichlet forms. *Osaka J Math*, 1992, 29: 247–265
- 20 Kuwae K. Maximum principles for subharmonic functions via local semi-Dirichlet forms. *Canad J Math*, 2008, 60: 822–874

Girsanov transformation for non-symmetric Markov processes

CHEN ChuanZhong, MA Li & YANG SaiSai

Abstract In this paper, we study the transformation of an arbitrary non-symmetric Markov process X by multiplicative functionals which are the exponential of continuous additive functionals of X with zero quadratic variations. We characterize the transformed semigroups by their associated quadratic forms. For a pair of dual Markov process $(X, \hat{X})$ associated with a non-symmetric Dirichlet form, we give a necessary and sufficient condition for the Girsanov transformed processes of X and $\hat{X}$ to be dual with respect to another reference measure.

Keywords Markov process, non-symmetric Dirichlet form, Girsanov transformation

MSC(2010) 60J25

doi: 10.1360/SCM-2015-0735