Schwarzschild 时空中带非线性记忆项的波动方程解的破裂

赖宁安*, 陈立, 马正义

丽水学院数学系, 丽水 323000

E-mail: hyayue@gmail.com, zjuchenli007@gmail.com, ma-zhengyi@163.com

收稿日期: 2014-06-19; 接受日期: 2014-11-14; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11326141 和 11301489) 和浙江省自然科学基金 (批准号: LQ13A010013, LY14A010005 和 LY14A010010) 资助项目

摘要 本文研究 Schwarzschild 时空中带非线性记忆项的波动方程径向解的破裂. 首先在 Regge-Wheeler 坐标下得到与原问题等价的方程. 然后引入两个试探函数, 并结合方程的解构造泛函. 最后通过一个迭代过程证明: 当非线性记忆项中的指标满足一定条件时, 不管初值多么小, 解在有限时间内破裂.

关键词 Schwarzschild 时空 非线性记忆 波动方程 破裂

MSC (2010) 主题分类 35L15, 35L70

1 引言

本文研究 Schwarzschild 时空中带非线性记忆项的波动方程

$$\begin{cases} \square_g u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |u(\tau)|^p d\tau, & \text{在 } \mathbb{R} \times \Sigma \text{ 中,} \\ u(0) = \varepsilon u_0, \quad u_t(0) = \varepsilon u_1, & \text{在 } \Sigma \text{ 中,} \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 g 为 Schwarzschild 度量, 表达式为

$$g = F(r)dt^2 - F(r)^{-1}dr^2 - r^2d\omega^2, \quad (1.2)$$

这里 $F(r) = 1 - \frac{2M}{r}$, 其中 $M > 0$ 表示黑洞的质量, $d\omega^2$ 为单位球面上的标准度量. $\square_g$ 为 Schwarzschild 度量下的波算子, 其具体表达式为

$$\square_g = \frac{1}{F(r)} \left(\partial_t^2 - \frac{F}{r^2} \partial_r (r^2 F) \partial_r - \frac{F}{r^2} \Delta_{S^2} \right), \quad (1.3)$$

其中 Δ_{S^2} 为单位球上的 Laplace-Beltrami 算子. 问题 (1.1) 中的 $\mathbb{R} \times \Sigma$ 表示 Schwarzschild 黑洞时空视界外部:

$$\mathbb{R} \times \Sigma = \mathbb{R} \times (2M, \infty) \times \mathbb{S}^2.$$

英文引用格式: Lai N A, Chen L, Ma Z Y. Finite time blow up for a wave equation with nonlinear memory in Schwarzschild spacetime (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 117–128, doi: 10.1360/N012014-00104

问题 (1.1) 中的参数 α 满足 $\alpha \in (0, 1)$, Γ 为 Euler 函数. 由于在分布意义下成立

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} s_+^{\alpha-1} = \delta(s), \quad (1.4)$$

所以问题 (1.1) 可以看作是 Schwarzschild 时空中半线性波动方程

$$\square_g u = |u(t)|^p \quad (1.5)$$

的近似.

Minkowski 时空中小初值半线性波动方程

$$\square u = |u(t)|^p \quad (1.6)$$

始于 John 的研究. 在三维情形他证明了: (I) 如果 $p > 1 + \sqrt{2}$ 且初值充分小, 则问题 (1.6) 存在整体解; (II) 如果 $1 < p < 1 + \sqrt{2}$, 则对任何具紧支集的非平凡初值, 无论其多么小, 问题 (1.6) 的解总是在有限时间内破裂, 见文献 [1] 和 [2]. 不久, Strauss [3] 指出问题 (1.6) 存在一个临界指数 $p_c(n)$ ($n \geq 2$), 它是二次方程 $(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0$ 的正根. 并猜测当 $p \in (1, p_c(n)]$ (次临界与临界情形) 时, 具非负紧支初值的解必将在有限时间内破裂; 当 $p > p_c(n)$ (超临界情形) 时, 小初值 (具紧支集及足够的正则性) Cauchy 问题 (1.6) 的解必将整体存在, 见文献 [4]. 自此, 国内外一系列数学家致力于解决该猜想, 经过三十几年的努力于最近最终解决. 1981 年, Glassey [5] 证明了 2 维空间中次临界与超临界情形. 1984 年, 当空间维数 $n \geq 4$ 时, Sideris [6] 得到了问题 (1.6) 在 $1 < p < p_c(n)$ 情形的破裂结果. 1995 年 Zhou [7] 证明了当维数 $n = 4$ 时解的整体存在性. 1996 年 Lindblad 和 Sogge [8] 得到了 $n \leq 8$ 且 $p > p_c(n)$ 时解的整体存在性. 当加上径向初值假设时, 他们的结论对任意空间维数均成立. 1997 年 Georgiev 等人 [9] 证明了当空间维数 $n \geq 4$ 并且 $p_c(n) < p \leq \frac{n+3}{n-1}$ 时, 小初值 Cauchy 问题 (1.6) 存在整体解. 当 $p = p_c(n)$ 时, 在低维 ($n = 2, 3$) 情形由 Schaeffer [10] 证明了解在有限时间内破裂. Yordanov 和 Zhang [11]、Zhou [12] 分别利用不同的方法独立地把 Sideris [6] 的破裂结果推广到 $n \geq 4$ 且 $p = p_c(n)$ 的情形, 从而最终解决了 Strauss 猜想. 另外, Fino 等人 [13] 研究了如下带非线性记忆项的波动方程 Cauchy 问题:

$$\square u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |u(\tau)|^p d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1.7)$$

他们引入了两个指标: $p_1(n, \alpha) = 1 + \frac{2+\alpha}{n-1-\alpha}$ 和二次方程 $(n-2)p^2 - (n-1+\alpha)p - 1 = 0, n \geq 3$ 的正根 $p_2(n, \alpha)$, 并得到了当 $n = 2m, m \in \mathbb{N}^*, 1 < p \leq p_1(n, \alpha)$ 或者 $n = 2m+1, m \in \mathbb{N}^*, 1 < p < p_2(n, \alpha)$ 时解在有限时间内破裂的结论.

一个自然且有意义的想法是: Minkowski 时空中 Strauss 猜想的结果是否可以推广到 Schwarzschild 时空. 即: 是否存在一个临界指标 $\bar{p} \in (1, \infty)$, 使得当 $p \in (1, \bar{p}]$ 、初值充分小且满足适当条件时问题 (1.5) 的解在有限时间内破裂, 而当 $p \in (\bar{p}, \infty)$ 时解整体存在? 如果存在, $\bar{p}$ 是否等于 $p_c(3) = 1 + \sqrt{2}$? Dafermos 和 Rodnianski [14] 证明了当 $p > 4$ 时球对称解的整体存在性. Catania 和 Georgiev [15] 研究了破裂情形并得到了如下结论: (a) 若 $1 < p < 1 + \sqrt{2}$, 初值任意小且远离视界, 则问题 (1.5) 不存在整体解; (b) 若 $2 < p < 1 + \sqrt{2}$, 初值充分大且靠近视界, 则问题 (1.5) 不存在整体解. 当 $p > 3$, 初值充分小且具有紧支集时 Blue 和 Sterbenz [16] 通过建立局部能量的一致衰减估计得到了问题 (1.5) 的整体解. Marzuola 等人 [17] 证明了 Schwarzschild 时空中非齐次波动方程的整体 Strichartz 估计, 并证明了当 $p = 5$ 时小初值 Cauchy 问题 (1.5) 解的整体存在性. 最近, Lindblad 等人 [18] 证明了当 $p > 1 + \sqrt{2}$

时问题 (1.5) 存在整体解, 并且证明了当小初值具有紧支集时, 该结果在角速度充分小的 Kerr 时空中也成立.

本文我们将研究 Schwarzschild 时空中带非线性记忆项的波动方程 Cauchy 问题. 设 $p_c(\alpha)$ 为二次方程 $p^2 - (\alpha + 2)p - 1 = 0$ 的正根, 则我们将证明当 $2 \leq p < p_c(\alpha)$ 时问题 (1.1) 的解在有限时间内破裂, 无论紧支初值多么小. 为了证明该结论, 首先在 Regge-Wheeler 坐标下重写方程, 并考虑径向解. 然后参照文献 [15] 中的思想, 引入两个试探函数并构造目标泛函. 最后, 通过一个迭代过程, 证明目标泛函满足 Kato 型引理的条件, 从而得到有限时间破裂的结论.

Regge-Wheeler 坐标表达式为

$$s(r) = r + 2M \log(r - 2M), \quad (1.8)$$

在此坐标下, 问题 (1.1) 中的方程可写成

$$\partial_t^2 u - \partial_s^2 u - \frac{2F(s)}{r(s)} \partial_s u - \frac{F(s)}{r^2} \Delta_{S^2} u = \frac{F(s)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |u(\tau)|^p d\tau, \quad (1.9)$$

其中

$$F(s) = 1 - \frac{2M}{r(s)},$$

而 $r(s)$ 为 (1.8) 的反函数.

不失一般性, 我们考虑径向解: $u = u(t, s)$, 则方程 (1.9) 可以简化为

$$\partial_t^2 u - \partial_s^2 u - \frac{2F(s)}{r(s)} \partial_s u = \frac{F(s)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |u(\tau)|^p d\tau. \quad (1.10)$$

令 $v(t, s) = r(s)u(t, s)$, 则方程 (1.10) 变为

$$\partial_t^2 v - \partial_s^2 v + \frac{2MF(s)}{r^3(s)} v = \frac{F(s)r^{1-p}(s)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |v(\tau)|^p d\tau. \quad (1.11)$$

于是我们研究问题 (1.1) 的等价问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_s^2 v + \frac{2MF(s)}{r^3(s)} v = \frac{F(s)r^{1-p}(s)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |v(\tau)|^p d\tau, & (t, s) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ v(0) = \varepsilon v_0, \quad v_t(0) = \varepsilon v_1, \quad s \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.12)$$

选用 Regge-Wheeler 坐标的好处是可以把黑洞视界外部区域 $r \in (2M, \infty)$ 映射为 $s \in (-\infty, \infty)$. 假定初值满足

$$\begin{aligned} (v_0, v_1) &\in H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}), \\ \text{supp } v_j(s) &\subset [a, b], \quad j = 1, 2, \quad v_j(s) \geq 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

其中 $b > a \gg 0$ 为常数, 表明初值的支集远离视界.

本文的主要结果如下:

定理 1 设 $2 \leq p < p_c(\alpha)$, 初值 (v_0, v_1) 满足 (1.13) 式且不恒为 0, 则问题 (1.12) 不存在整体解, 从而问题 (1.1) 的解将在有限时间内破裂.

本文组织如下: 第 2 节给出 Schwarzschild 时空简要介绍并给出试探函数的相关估计; 第 3 节给出定理 1 的证明; 第 4 节总结本文内容并提出一些相关的、待解决的问题.

2 Schwarzschild 时空及试探函数

Schwarzschild 度量是 Einstein 场方程的静态、球对称的真空 (无物质场) 解, 其表达式为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.1)$$

关于 Einstein 场方程及其精确解的研究, 可参见文献 [19]. 表达式 (2.1) 中 $r = 2M$ 称为黑洞表面或者视界, 视界的“奇性”只是因为选取坐标轴不当而引起的, 时空曲率本身在 $r = 2M$ 处并不发散. Schwarzschild 时空是一个最简单的黑洞模型, 它描述了一个不带电、不自转的静态黑洞. Schwarzschild 时空的重要性在于当引力变得很强时它清晰地显示了非欧时空几何的特征, 而更为重要的是它又可以描述星体塌缩所成的黑洞时空.

引理 1 (参考文献 [20]) 令 $W(s) = \frac{2MF(s)}{r(s)^3}$, 则方程

$$\partial_s^2 \varphi_0(s) - W(s)\varphi_0(s) = 0 \quad (2.2)$$

存在一个正解 $\varphi_0(s) \in C^2(\mathbb{R})$, 并且有如下渐近估计

$$\varphi_0(s) \sim \begin{cases} s, & s \rightarrow \infty, \\ e^{\frac{s}{2M}} + D, & s \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (2.3)$$

这里 D 为一正常数, 记号

$$f(s) \sim g(s), \quad s \rightarrow \pm\infty$$

表示存在两个正常数 $C > 1$ 和 $N > 0$ 使得对于 $\pm s \geq N$ 成立

$$C^{-1}g(s) \leq f(s) \leq Cg(s),$$

此处及下文, C 表示取值可能不同的正常数.

引理 2 (参考文献 [20]) 对给定的正数 A , 方程

$$-\partial_s^2 \psi(s) + W(s)\psi(s) + A^2\psi(s) = 0, \quad s \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

存在一个正解 $\psi(s) \in C^2(\mathbb{R})$ 满足如下渐近估计

$$\psi(s) \sim e^{As}, \quad |s| \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

若令引理 2 中的 $A = \frac{1}{2M}$, 则易知方程

$$-\partial_s^2 \psi(s) + W(s)\psi(s) + \frac{1}{4M^2}\psi(s) = 0, \quad s \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

存在一个正解 $\psi_0(s)$ 满足

$$\psi_0(s) \sim e^{\frac{s}{2M}}, \quad |s| \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

引理 3 令 $p \geq 2$, $f(s) = F(s)r(s)^{1-p}$, $\varphi_0(s)$ 为引理 1 中方程 (2.2) 的正解, 则有

$$f(s)^{-\frac{1}{p-1}}\varphi_0(s) \leq C(1 + |s|)^2, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

证明 文献 [15] 中证明了存在两个正常数 C_1, C_2 使得

$$\begin{cases} C_1 s \leq r(s) \leq C_2 s, & s \geq 2, \\ C_1 \leq r(s) \leq C_2, & -2 \leq s \leq 2, \\ C_1 e^{\frac{s}{2M}} + 2M \leq r(s) \leq C_2 e^{\frac{s}{2M}} + 2M, & s \leq -2, \end{cases} \quad (2.9)$$

及

$$\begin{cases} 1 - \frac{C}{s} \leq F(s) \leq 1 + \frac{C}{s}, & s \geq 2, \\ C_1 \leq F(s) \leq C_2, & -2 \leq s \leq 2, \\ C_1 e^{\frac{s}{2M}} \leq F(s) \leq C_2 e^{\frac{s}{2M}}, & s \leq -2. \end{cases} \quad (2.10)$$

结合 (2.9) 和 (2.10) 我们可得到 $f(s)$ 的估计

$$f(s) \sim \begin{cases} (1+s)^{1-p}, & s \geq 2, \\ C, & -2 \leq s \leq 2, \\ e^{\frac{(2-p)s}{2M}}, & s \leq -2. \end{cases} \quad (2.11)$$

再结合 $\varphi_0(s)$ 的渐近估计 (2.3) 并注意到 $p \geq 2$ 可得

$$f(s)^{-\frac{1}{p-1}} \varphi_0(s) \leq \begin{cases} (1+s)^2, & s \geq 2 \\ C, & -2 \leq s \leq 2 \\ e^{\frac{(p-2)s}{2M(p-1)}}, & s \leq -2 \end{cases} \leq C(1+|s|)^2, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

引理 3 得证. □

引理 4 令 $f(s), \varphi_0(s), \psi_0(s)$ 如上所述, 则我们有如下估计,

$$(f(s)\varphi_0(s))^{-\frac{1}{p-1}} \psi_0^{\frac{p}{p-1}}(s) \leq C(1+|s|)^{\frac{p-2}{p-1}} e^{\frac{ps}{2M(p-1)}}. \quad (2.13)$$

证明 结合 $\varphi_0(s)$ 的估计 (2.3), $\psi_0(s)$ 的估计 (2.7) 以及 $f(s)$ 的估计 (2.12) 得到

$$(f(s)\varphi_0(s))^{-\frac{1}{p-1}} \psi_0^{\frac{p}{p-1}}(s) \leq \begin{cases} C(1+s)^{\frac{p-2}{p-1}} e^{\frac{ps}{2M(p-1)}}, & s \geq 2, \\ C, & -2 \leq s \leq 2, \\ C e^{\frac{(p-2)s}{2M(p-1)}} e^{\frac{ps}{2M(p-1)}} = C e^{\frac{ps}{2M}}, & s \leq -2. \end{cases} \quad (2.14)$$

由 $p \geq 2$, 可得

$$\frac{p}{2(p-1)} - 1 = \frac{2-p}{2(p-1)} \leq 0,$$

结合 (2.14) 式得

$$(f(s)\varphi_0(s))^{-\frac{1}{p-1}} \psi_0^{\frac{p}{p-1}}(s) \leq C(1+|s|)^{\frac{p-2}{p-1}} e^{\frac{ps}{2M(p-1)}}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

引理 4 得证. □

3 定理 1 的证明

本节将给出定理 1 的证明. 考虑平均泛函

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(s) v(t, s) ds.$$

对 $G(t)$ 关于时间求两阶导数并通过分部积分, 得

$$\begin{aligned} G''(t) &= \int_{\mathbb{R}} v_{tt} \varphi_0(s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} v_{ss} \varphi_0(s) ds - \int_{\mathbb{R}} W(s) v \varphi_0(s) ds + \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |v(\tau)|^p d\tau \varphi_0(s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} v(\partial_s^2 \varphi_0 - W(s) \varphi_0) ds + \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |v(\tau)|^p d\tau \varphi_0(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (t-\tau)^{\alpha-1} f(s) |v(\tau, s)|^p \varphi_0(s) ds d\tau. \end{aligned} \quad (3.1)$$

由 Hölder 不等式及 Huygens 原理并结合引理 3 中的 (2.8) 可得

$$\begin{aligned} |G(t)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |v(t, s)| \varphi_0(s) ds \\ &= \int_{|s| \leq t+R} (f^{\frac{1}{p}} |v| \varphi_0^{\frac{1}{p}}) (f^{-\frac{1}{p}} \varphi_0^{\frac{p-1}{p}}) ds \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} f |v|^p \varphi_0 ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{|s| \leq t+R} f^{-\frac{1}{p-1}} \varphi_0 ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}} f |v|^p \varphi_0 ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{|s| \leq t+R} (1+|s|)^2 ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq C(t+R)^{\frac{3(p-1)}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} f |v|^p \varphi_0 ds \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

由此可知

$$\int_{\mathbb{R}} f |v|^p \varphi_0 ds \geq C(t+R)^{-3(p-1)} |G(t)|^p. \quad (3.3)$$

把 (3.3) 代入 (3.1) 中得

$$\begin{aligned} G''(t) &\geq \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}} f(s) |v(\tau, s)|^p \varphi_0(s) ds d\tau \\ &\geq C \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau+R)^{-3(p-1)} |G(\tau)|^p d\tau. \end{aligned} \quad (3.4)$$

令

$$\varphi_1(t, s) = e^{-\frac{t}{2M}} \psi_0(s),$$

其中 $\psi_0(s)$ 为方程 (2.6) 的正解. 则易知

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi_1(t, s) &= -\frac{1}{2M} \varphi_1, \\ \partial_t^2 \varphi_1(t, s) &= \frac{1}{4M^2} \varphi_1, \\ \partial_s^2 \varphi_1(t, s) - W(s) \varphi_1(t, s) - \frac{1}{4M^2} \varphi_1(t, s) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

令

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}} v(t, s) \varphi_1(t, s) ds,$$

则由 (3.5) 可得

$$\begin{aligned} H'(t) &= \int_{\mathbb{R}} v_t \varphi_1 ds + \int_{\mathbb{R}} v \partial_t \varphi_1 ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} v_t \varphi_1 ds - \frac{1}{2M} \int_{\mathbb{R}} v \varphi_1 ds, \end{aligned} \quad (3.6)$$

及

$$\begin{aligned} H''(t) &= \int_{\mathbb{R}} v_{tt} \varphi_1 ds + 2 \int_{\mathbb{R}} v_t \partial_t \varphi_1 ds + \int_{\mathbb{R}} v \partial_{tt} \varphi_1 ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} v_{tt} \varphi_1 ds - \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} v_t \varphi_1 ds + \frac{1}{4M^2} \int_{\mathbb{R}} v \varphi_1 ds. \end{aligned} \quad (3.7)$$

(3.6) 式两端乘以 $\frac{1}{M}$ 加上 (3.7) 式, 并结合分部积分及问题 (1.12) 中的方程得

$$\begin{aligned} &H''(t) + \frac{1}{M} H'(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} v_{tt} \varphi_1 ds - \frac{1}{4M^2} \int_{\mathbb{R}} v \varphi_1 ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} v_{tt} \varphi_1 ds - \int_{\mathbb{R}} v (\partial_s^2 \varphi_1 - W(s) \varphi_1) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\partial_t^2 v - \partial_s^2 v + W(s) v) \varphi_1 ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |v(\tau)|^p d\tau \varphi_1 ds \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

对上式在 $[0, t]$ 上积分得

$$H'(t) + \frac{1}{M} H(t) \geq H'(0) + \frac{1}{M} H(0). \quad (3.9)$$

两边乘以 $e^{\frac{t}{M}}$ 并在 $[0, t]$ 上积分得

$$e^{\frac{t}{M}} H(t) \geq H(0) + M \left(H'(0) + \frac{1}{M} H(0) \right) (e^{\frac{t}{M}} - 1), \quad (3.10)$$

亦即

$$H(t) \geq e^{-\frac{t}{M}} H(0) + M \left(H'(0) + \frac{1}{M} H(0) \right) (1 - e^{-\frac{t}{M}}). \quad (3.11)$$

由非平凡初值及 $\psi_0(s)$ 的正性可知存在一正常数 C 使得

$$H(t) \geq C. \quad (3.12)$$

类似地, 由 Hölder 不等式及引理 4 中的不等式 (2.13) 可得

$$|H(t)|^p = \left| e^{-\frac{t}{2M}} \int_{\mathbb{R}} v \psi_0 ds \right|^p$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \left| e^{-\frac{t}{2M}} \int_{\mathbb{R}} f^{\frac{1}{p}} |v| \varphi_0^{\frac{1}{p}} f^{-\frac{1}{p}} \varphi_0^{-\frac{1}{p}} \psi_0 ds \right|^p \\
 & \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f |v|^p \varphi_0 ds \right) \left(e^{-\frac{pt}{2M(p-1)}} \int_{|s| \leq t+R} (f \varphi_0)^{-\frac{1}{p-1}} \psi_0^{\frac{p}{p-1}} ds \right)^{p-1} \\
 & \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} f |v|^p \varphi_0 ds \right) \left(e^{-\frac{pt}{2M(p-1)}} \int_{|s| \leq t+R} (1+|s|)^{\frac{p-2}{p-1}} e^{\frac{ps}{2M(p-1)}} ds \right)^{p-1} \\
 & \leq C(t+R)^{p-2} \int_{\mathbb{R}} f |v|^p \varphi_0 ds,
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

由此及 (3.12) 式可得

$$\int_{\mathbb{R}} f |v|^p \varphi_0 ds \geq C |H(t)|^p (t+R)^{2-p} \geq C(t+R)^{2-p}. \tag{3.14}$$

把 (3.14) 代入 (3.1) 式可得当 $t > 1$ 时有

$$\begin{aligned}
 G''(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}} f |v|^p \varphi_0 ds d\tau \\
 &\geq C \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau+R)^{2-p} d\tau \\
 &\geq C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau+R)^{2-p} d\tau \\
 &\geq C(t+R)^{2-p} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
 &\geq C(t+R)^{\alpha+2-p}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

由 (3.1) 式可知 $G''(t) \geq 0$, 由此进一步可得

$$\begin{aligned}
 G'(t) &\geq G'(0) = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} v_1(s) \varphi_1(s) ds > 0, \quad t > 0, \\
 G(t) &\geq G(0) = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} v_0(s) \varphi_1(s) ds > 0, \quad t > 0.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

在 $[1, t]$ 上积分 (3.15) 式两次得到

$$\begin{aligned}
 G(t) &\geq \frac{C}{(\alpha+3-p)(\alpha+4-p)} [(t+R)^{\alpha+4-p} - (1+R)^{\alpha+4-p}] \\
 &\quad + G'(1)(t-1) - \frac{C(1+R)^{\alpha+3-p}}{\alpha+3-p} (t-1) + G(1).
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

因为 $p \geq 2$ 且 $p^2 - (\alpha+2)p - 1 < 0$, 则我们有

$$\begin{aligned}
 \alpha+3-p &> 1 - \frac{1}{p} \geq \frac{1}{2}, \\
 \alpha+4-p &> \frac{3}{2},
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

于是由 (3.17) 式可知存在一正数 a 使得当 $t > a$ 时有

$$G(t) \geq C(t+R)^{\alpha+4-p}. \tag{3.19}$$

令 $p_1 = \alpha + 4 - p$. 当 t 充分大使得 $a \leq \frac{t}{2}$ 时, (3.19) 式代入 (3.4) 式得

$$\begin{aligned} G''(t) &\geq C \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau+R)^{-3(p-1)} |G(\tau)|^p d\tau \\ &\geq C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau+R)^{pp_1-3(p-1)} d\tau \\ &\geq C(t+R)^{pp_1-3(p-1)+\alpha} \\ &\triangleq C(t+R)^{p^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

重复上述迭代过程 k 次可知当 t 充分大时有

$$G(t) \geq C(t+R)^{p_{k+1}}, \quad (3.21)$$

其中

$$p_{k+1} = pp_k - 3(p-1) + \alpha + 2. \quad (3.22)$$

由等比数列知识知

$$p_{k+1} = \left(p_1 + \frac{\alpha + 2 - 3(p-1)}{p-1} \right) p^k - \frac{\alpha + 2 - 3(p-1)}{p-1}. \quad (3.23)$$

易知若

$$p_1 + \frac{\alpha + 2 - 3(p-1)}{p-1} > 0, \quad (3.24)$$

亦即

$$p^2 - (\alpha + 2)p - 1 < 0, \quad (3.25)$$

则有

$$p_{k+1} \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.26)$$

综上, 对任意 $N > 0$, 当 t 充分大 (假定 $t > b > 0$) 时有

$$G(t) \geq C_N(t+R)^N, \quad (3.27)$$

这里 C_N 表示与 N 有关的正常数. 则结合 (3.4) 式进一步可得

$$\begin{aligned} G''(t) &\geq C \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau+R)^{-3(p-1)} |G(\tau)|^p d\tau \\ &\geq C \int_b^t (t-\tau)^{\alpha-1} |G(\tau)|^{\tilde{p}} d\tau, \end{aligned} \quad (3.28)$$

其中 $1 < \tilde{p} < p$.

下面我们将采用文献 [13] 中的方法证明解在有限时间内破裂. 令

$$I(t) = \int_b^t (t-\tau)^\beta G(\tau) d\tau, \quad (3.29)$$

其中 $\beta > \frac{\alpha}{p-1} - 1 > 0$. 对 $I(t)$ 应用 Hölder 不等式, 得

$$I(t) \leq \left(\int_b^t (t-\tau)^{\alpha+\beta} G(\tau)^{\tilde{p}} d\tau \right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \left(\int_b^t (t-\tau)^{\beta-\frac{\alpha}{p-1}} d\tau \right)^{\frac{\tilde{p}-1}{\tilde{p}}}$$

$$\leq C(t+R)^{\frac{(\beta+1)(\tilde{p}-1)}{\tilde{p}}-\frac{\alpha}{\tilde{p}}}\left(\int_b^t(t-\tau)^{\alpha+\beta}G(\tau)^{\tilde{p}}d\tau\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}}, \quad (3.30)$$

由此可得

$$\int_b^t(t-\tau)^{\alpha+\beta}G(\tau)^{\tilde{p}}d\tau \geq C(t+R)^{\alpha-(\beta+1)(\tilde{p}-1)}|I(t)|^{\tilde{p}}. \quad (3.31)$$

通过分部积分计算 $I'(t)$ 得

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_b^t \frac{d}{dt}(t-\tau)^\beta G(\tau) d\tau \\ &= - \int_b^t \frac{d}{d\tau}(t-\tau)^\beta G(\tau) d\tau \\ &= G(b)(t-b)^\beta + \int_b^t (t-\tau)^\beta G'(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.32)$$

同理, 结合 (3.16) 我们有

$$\begin{aligned} I''(t) &= \beta G(b)(t-b)^{\beta-1} + G'(b)(t-b)^\beta + \int_b^t (t-\tau)^\beta G''(\tau) d\tau \\ &\geq \int_b^t (t-\tau)^\beta G''(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.33)$$

结合 (3.28) 式得

$$\begin{aligned} I''(t) &\geq \int_b^t (t-\tau)^\beta G''(\tau) d\tau \\ &\geq \int_b^t \int_b^\tau (t-\tau)^\beta (\tau-\sigma)^{\alpha-1} |G(\sigma)|^{\tilde{p}} d\sigma d\tau \\ &= \int_b^t |G(\sigma)|^{\tilde{p}} \int_\sigma^t (t-\tau)^\beta (\tau-\sigma)^{\alpha-1} d\tau d\sigma. \end{aligned} \quad (3.34)$$

因为 $\tau-\sigma \leq t-\sigma$ 且 $0 < \alpha < 1$, 故有

$$(\tau-\sigma)^{\alpha-1} \geq (t-\sigma)^{\alpha-1},$$

代入 (3.34) 式中并结合 (3.31) 式, 得

$$\begin{aligned} I''(t) &\geq \int_b^t |G(\sigma)|^{\tilde{p}} \int_\sigma^t (t-\tau)^\beta (\tau-\sigma)^{\alpha-1} d\tau d\sigma \\ &\geq \int_b^t |G(\sigma)|^{\tilde{p}} (t-\sigma)^{\alpha-1} \int_\sigma^t (t-\tau)^\beta d\tau d\sigma \\ &= C \int_b^t |G(\sigma)|^{\tilde{p}} (t-\sigma)^{\alpha+\beta} d\sigma \\ &\geq C(t+R)^{\alpha-(\beta+1)(\tilde{p}-1)}|I(t)|^{\tilde{p}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

另一方面, 把 (3.27) 代入 (3.29) 中, 可得当 t 充分大时, 对任意 $N > 0$ 有

$$I(t) = \int_b^t (t-\tau)^\beta G(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
&\geq C \int_b^t (t-\tau)^\beta (\tau+R)^N d\tau \\
&\geq C \int_{\frac{t}{2}}^t (t-\tau)^\beta (\tau+R)^N d\tau \\
&\geq C_N (t+R)^N.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

得到 (3.35) 和 (3.36) 后, 应用下面的引理 5 可知 $I(t)$ 在有限时间内破裂, 从而问题 (1.12) 的解在有限时间内破裂, 定理 1 得证. $\square$

引理 5 (参考文献 [6]) 假定 $M(t) \in C^2[a, b]$, 若对于 $a \leq t < b$ 成立

$$\begin{aligned}
M(t) &\geq C_0(t+R)^i, \\
M''(t) &\geq C_1(t+R)^{-q}M(t)^p,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

其中 C_0, C_1, R 为正常数. 如果 $p > 1, i \geq 1$ 且满足 $(p-1)i > q-2$, 则 $b < \infty$, 即 $M(t)$ 将在有限时间内破裂.

4 结论及展望

本文研究了 Schwarzschild 时空中带非线性记忆项波动方程小初值 Cauchy 问题, 当非线性记忆项中的指标 p 满足 $2 \leq p < p_c(\alpha)$ ($p_c(\alpha)$ 为二次方程 $p^2 - (\alpha+2)p - 1 = 0$ 的正根) 时, 我们证明了所研究问题的径向解将在有限时间内破裂, 不论非负的紧支初值多么小. 证明的方法依赖于两个试探函数, 结合试探函数与方程的解构造目标泛函, 并通过一个迭代过程证明目标泛函满足 Kato 型引理的条件, 从而将在有限时间内破裂.

需要指出的是, 本文只研究了 $2 \leq p < p_c(\alpha)$ 的情形. $p \geq 2$ 是引理 3 和 4 中渐近估计成立所必需的, 而 $p < p_c(\alpha)$ 是迭代过程所必需的. 我们猜测 $1 < p < 2$ 及 $p = p_c(\alpha)$ 也属于破裂情形, 而这也是我们接下来的研究方向. 另外, 在解在有限时间破裂的结论下, 解的生命跨度估计也是一个很重要的问题.

致谢 衷心感谢审稿人和编辑提出的修改意见.

参考文献

- 1 John F. Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three-space dimensions. *Manus Math*, 1979, 28: 235–265
- 2 John F. Blow-up for quasi-linear wave equations in three space dimensions. *Comm Pure Appl Math*, 1981, 34: 29–51
- 3 Strauss W A. Nonlinear scattering theory at low energy. *J Funct Anal*, 1981, 41: 110–133
- 4 Strauss W A. Nonlinear wave equations. CBMS Reg Conf Ser Math 73, AMS, providence, RI, 1989
- 5 Glassey R. Existence in the large for $\square u = F(u)$ in two space dimensions. *Math Z*, 1981, 178: 233–261
- 6 Sideris T. Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions. *Comm Part Diff Eq*, 1984, 12: 378–406
- 7 Zhou Y. Cauchy problem for semilinear wave equations in four space dimensions with small initial data. *J Part Diff Equat*, 1995, 8: 135–144
- 8 Lindblad H, Sogge C D. Long-time existence for small amplitude semilinear wave equations. *Amer J Math*, 1996, 118: 1047–1135
- 9 Georgiev V, Lindblad H, Sogge C D. Weighted strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations. *Amer J Math*, 1997, 119: 1291–1319
- 10 Schaeffer J. The equation $\square u = |u|^p$ for the critical value of p . *Proc Royal Soc Edinburgh*, 1985, 101: 31–44

- 11 Yordanov B, Zhang Q S. Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions. *J Funct Anal*, 2006, 231: 361–374
- 12 Zhou Y. Blow up of solutions to semilinear wave equations with critical exponent in high dimensions. *Chin Ann Math*, 2007, 2: 205–212
- 13 Fino A Z, Kirane M, Georgiev V. Finite time blow-up for a wave equation with a nonlocal nonlinearity. *AiXiv*: 1008.4219v1
- 14 Dafermos M, Rodnianski I. Small-amplitude nonlinear waves on a black hole background. *J Math Pures Appl*, 2005, 84: 1147–1172
- 15 Catania D, Georgiev V. Blow-up for the semilinear wave equation in the Schwarzschild metric. *Diff Integr Equat*, 2006, 19: 799–830
- 16 Blue P, Sterbenz J. Uniform decay of local energy and the semi-linear wave equation on Schwarzschild space. *Comm Math Phys*, 2006, 268: 481–504
- 17 Marzuola J, Metcalfe J, Tataru D, et al. Strichartz estimates on Schwarzschild black hole backgrounds. *Comm Math Phys*, 2010, 293: 37–83
- 18 Lindblad H, Metcalfe J, Sogge C D, et al. The Strauss conjecture on Kerr black hole backgrounds. *Math Ann*, 2014, 359: 637–661
- 19 Kong D X, Liu K F. Time-periodic solutions of the Einstein’s field equations, I: General framework. *Sci China Math*, 2010, 53: 1213–1230
- 20 Catania D. Linear and Nonlinear Perturbed Wave Equations. PhD Dissertation. Pisa: Pisa University, Doctorate School Galilei, 2008

Finite time blow up for a wave equation with nonlinear memory in Schwarzschild spacetime

LAI NingAn, CHEN Li & MA ZhengYi

Abstract In this work, we study the Cauchy problem of wave equation with nonlinear memory in Schwarzschild spacetime. Blow up result will be established when the power p of the memory and the data satisfy some conditions. For this purpose, we use two test functions to construct a functional. After that by introducing an iteration argument we conclude that the functional satisfies the conditions of Kato type lemma.

Keywords Schwarzschild spacetime, nonlinear memory, wave equation, blow up

MSC(2010) 35L15, 35L70

doi: 10.1360/N012014-00104