正熵系统的稳定集

献给张芷芬教授 90 华诞

冯世林¹, 高睿^{1*}, 黄文^{1,2}

1. 四川大学数学学院, 成都 610065;

2. 中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026

E-mail: fengshilinscu@163.com, gaoruimath@scu.edu.cn, wenh@mail.ustc.edu.cn

收稿日期: 2016-05-20; 接受日期: 2016-09-13; 网络出版日期: 2016-11-14; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11225105, 11371339 和 11431012) 资助项目

摘要 本综述将讨论正熵系统的稳定集研究的一些新的进展, 主要侧重于稳定集与混沌的关联、稳定集的熵和维数等相关的一些主题. 特别地, 本文对符号系统的稳定集给出了其 Hausdorff 维数的下界估计. 本文的目的是简介相关的一些进展, 给出相应的参考文献, 并提出几个未解决的问题.

关键词 熵 稳定集 混沌 Hausdorff 维数

MSC (2010) 主题分类 37A35, 37B40, 37D25

1 引言

本综述主要讨论正熵离散动力系统若干与稳定集相关的问题. 一个离散动力系统是指二元组 (X, T) , 其中 (X, d) 是一个紧致度量空间, T 为其上的一个同胚, 这里 d 为 X 上的度量.

给定一个离散动力系统 (X, T) , 对其上的一个 T -不变的 Borel 概率测度 μ , 我们用 $h_\mu(T)$ 表示测度熵. 测度熵是由 Kolmogorov^[1] 在 1958 年首先引入的 (也可参见文献 [2]). 1965 年, Adler 等^[3] 对一个离散动力系统 (X, T) 引入了拓扑熵 $h_{\text{top}}(T)$ 的概念. 随后, Dinaburg^[4] 和 Bowen^[5] 使用分离集和张成集给出拓扑熵的等价定义. 更多关于动力系统的概念和背景知识, 读者可参见文献 [6–11].

当 X 为一个紧 Riemann 流形 M 且 T 是 M 上一个光滑的微分同胚 f 时, Pesin 等^[12–16] 发展了稳定流形理论. 确切地讲, 当 f 为紧 Riemann 流形 M 上的 $C^{1+\alpha}$ ($\alpha > 0$) 微分同胚且 μ 为 M 上的 f -不变的双曲测度时, 稳定流形理论指出, 对 μ -几乎处处的 $x \in M$, x 的稳定集和不稳定集都是 M 的浸入子流形, 且两者维数互补. 探究在 Pesin 的稳定流形理论中的 $C^{1+\alpha}$ 正则假设是否有必要是相当重要的课题. 在这方面的早期研究中, Pugh^[17] 构造了一个 4 维流形上的 C^1 微分同胚, 证明了该系统中存在一点, 使得该点不具有零的 Lyapunov 指数, 但在该点处不存在稳定子流形.

最近, Bonatti 等^[18] 揭示出 C^1 -Pesin 稳定流形理论有一定局限性. 设 f 为光滑的 Riemann 流形 M 上的微分同胚, ρ 为由 M 上 Riemann 结构诱导的度量. $x \in M$ 的稳定集定义为在 f 迭代作用下与 x

英文引用格式: Feng S L, Gao R, Huang W. Stable sets for systems with positive entropy (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 21–36, doi: 10.1360/N012016-00100

轨道渐近的 M 中点的全体, 即

$$W^s(x, f) := \{y \in M : \rho(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty\}.$$

相应地, x 的不稳定集 $W^u(x, f)$ 定义为 $W^s(x, f^{-1})$. Bonatti 等^[18] 证明了下面的结论:

定理 1.1 设 M 为 n 维的光滑紧 Riemann 流形, 其中 $n \geq 3$, $\text{Diff}^1(M)$ 为 M 上的 C^1 微分同胚全体, 并赋予其 C^1 -拓扑, 则 $\text{Diff}^1(M)$ 中存在非空开集 U 以及 U 的稠密 G_δ 集 R , 使得对任意 $f \in R$, 我们都能找到一个双曲的 f -不变的遍历 Borel 概率测度 μ 满足对 μ 的支撑集中的任意一点 x 均有

$$W^s(x, f) = W^u(x, f) = \{x\}.$$

定理 1.1 中 μ 的支撑集上的动力系统是一个广义的加法机器 (也被称为计程器映射 (odometer) 或螺线管 (solenoid), 可以参见文献 [19] 或 [20] 中的定义), 因此是唯一遍历的, 且测度熵 $h_\mu(f) = 0$. 这里有个自然的问题, 如果 C^1 -微分同胚 f 具有正测度熵, 对 $W^s(x, f)$ 和 $W^u(x, f)$, 我们能得到什么?

本综述的目的是讨论正熵 C^1 -微分同胚以及更一般的正熵离散动力系统其稳定集研究的一些新进展 (参见文献 [21–26]), 主要侧重于与稳定集相关的混沌现象、稳定集的沿负方向熵的估计, 以及稳定集的维数等相关主题. 特别地, 我们得到了符号系统稳定集 Hausdorff 维数的下界估计.

2 熵

本节简要回顾一下拓扑熵和测度熵的定义, 并且对它们的一些基本性质进行相应的讨论. 详细内容可参见文献 [6, 7, 9, 10].

给定一个离散动力系统 (X, T) , 记 $\mathcal{B}_X$ 为 X 中 Borel 集全体构成的 Borel σ -代数. 若 X 中一族 Borel 集的并集为 X , 则称它们构成 X 的一个覆盖. 若 X 的一个覆盖全部由开集组成, 则称它为 X 的一个开覆盖. 若 X 的一个覆盖由互不相交的集合组成, 则称它为 X 的一个剖分. 给定一个 X 的剖分 α 以及 $x \in X$, 我们记 $\alpha(x)$ 为 α 中包含 x 的原子. 另外, 我们分别将 X 的有限剖分、有限覆盖和有限开覆盖全体记为 $\mathcal{P}_X$ 、 $\mathcal{C}_X$ 和 $\mathcal{C}_X^\circ$. 给定 X 的两个覆盖 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$, 称 $\mathcal{U}$ 比 $\mathcal{V}$ 细 (记为 $\mathcal{U} \succ \mathcal{V}$), 若 $\mathcal{U}$ 中的任意元素都包含在 $\mathcal{V}$ 的某个元素内. 记

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}.$$

显然, $\mathcal{U} \vee \mathcal{V} \succ \mathcal{U}$ 且 $\mathcal{U} \vee \mathcal{V} \succ \mathcal{V}$. 给定整数 m 和 n , 若 $m \leq n$ 且 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X$, 则我们记

$$\mathcal{U}_m^n = \bigvee_{i=m}^n T^{-i}\mathcal{U}.$$

对 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X$, 定义 $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ 为 $\mathcal{U}$ 的所有子覆盖中的元素个数的最小值, 则 $\mathcal{U}$ 相对于 T 的拓扑熵定义为

$$h_{\text{top}}(T, \mathcal{U}) := \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log \mathcal{N}(\mathcal{U}_0^{N-1}) = \inf_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{N} \log \mathcal{N}(\mathcal{U}_0^{N-1}),$$

(X, T) 的拓扑熵定义为

$$h_{\text{top}}(T) := \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^\circ} h_{\text{top}}(T, \mathcal{U}).$$

我们有时候为了强调拓扑熵对于空间 X 的依赖性也写成 $h_{\text{top}}(T, X)$. 拓扑熵还可通过下述方式刻画. 设 K 为 X 的一个非空闭子集, 对任意的 $\epsilon > 0$, X 的一个子集 F 称为 K 的 (n, ϵ) - 张成集, 若对任意 $x \in K$, 都存在一个 $y \in F$ 使得 $d_n(x, y) \leq \epsilon$, 其中

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(T^i x, T^i y);$$

K 的子集 E 称为 K 的 (n, ϵ) - 分离集, 若 $x, y \in E$, $x \neq y$ 蕴含着 $d_n(x, y) > \epsilon$. 记 $r_n(d, T, \epsilon, K)$ 为 K 的所有 (n, ϵ) - 张成集中元素个数的最小值; 相应地, 记 $s_n(d, T, \epsilon, K)$ 为 K 的所有 (n, ϵ) - 分离集中元素个数最大值. 进一步, 定义

$$r(d, T, \epsilon, K) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log r_n(d, T, \epsilon, K),$$

$$s(d, T, \epsilon, K) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log s_n(d, T, \epsilon, K).$$

显然, $r(d, T, \epsilon, K)$ 和 $s(d, T, \epsilon, K)$ 均为 ϵ 的减函数, 从而下列极限存在:

$$h_*(d, T, K) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} r(d, T, \epsilon, K),$$

$$h^*(d, T, K) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} s(d, T, \epsilon, K).$$

众所周知, $h_*(d, T, K) = h^*(d, T, K)$, 且它和 X 上与 X 拓扑相容的度量 d 的选取无关, 所以可以将其简记为 $h(T, K)$. 特别地, 当 $K = X$ 时, $h(T, X) = h_{\text{top}}(T)$.

我们用 $\mathcal{M}(X)$ 、 $\mathcal{M}(X, T)$ 和 $\mathcal{M}^e(X, T)$ 分别表示 X 上的所有的 Borel 概率测度、 T - 不变 Borel 概率测度和遍历的 T - 不变 Borel 概率测度全体构成的集合, 则 $\mathcal{M}(X)$ 和 $\mathcal{M}(X, T)$ 在弱 * 拓扑意义下都是凸的紧可度量化空间.

设 $\mu \in \mathcal{M}(X)$, $\mathcal{B}_\mu$ 为 $\mathcal{B}_X$ 关于 μ 的完备化, 则 $(X, \mathcal{B}_\mu, \mu)$ 为 Lebesgue 空间. 若 $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ 是 X 的可数个有限剖分, 则剖分 $\alpha = \bigvee_{i \in I} \alpha_i$ 称为可测剖分. $\mathcal{B}_\mu$ 中那些由 α 中原子的并集组成的 Borel 集合全体构成 $\mathcal{B}_\mu$ 的一个子 σ - 代数, 记为 $\hat{\alpha}$, 或者在不会混淆的情形下简记为 α . 易知 $\mathcal{B}_\mu$ 的每个子 σ - 代数都刚好能在 $\text{mod } \mu$ 意义下以上述方式构造出来. 对一个给定的可测剖分 α , 我们定义

$$\alpha^- = \bigvee_{n=1}^{\infty} T^{-n} \alpha, \quad \alpha^T = \bigvee_{n=-\infty}^{+\infty} T^{-n} \alpha.$$

以同样的方式, 我们可以定义 $\mathcal{F}^-$ 和 $\mathcal{F}^T$, 其中 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{B}_\mu$ 的一个子 σ - 代数. 显然, 对 X 的任何可测剖分 α , $\widehat{\alpha^-} = (\widehat{\alpha})^- \text{ mod } \mu$ 且 $\widehat{\alpha^T} = (\widehat{\alpha})^T \text{ mod } \mu$.

设 γ 为 X 的可测剖分, 则 μ 可以被可测剖分 γ 测度分解为 $\mu = \int_X \mu_x d\mu(x)$, 其中 $\mu_x \in \mathcal{M}(X)$, $\forall x \in X$ 且 $\mu_x(\gamma(x)) = 1$ 对 μ - 几乎处处的 $x \in X$ 成立. 这样的分解可以用下列等价的性质 (2.1) 和 (2.2) 刻画:

$$\forall f \in L^1(X, \mathcal{B}_X, \mu), \quad f \in L^1(X, \mathcal{B}_X, \mu_x) \text{ 对 } \mu\text{- 几乎处处的 } x \in X \text{ 成立,}$$

$$\text{且 } x \mapsto \int_X f d\mu_x \in L^1(X, \gamma, \mu), \quad (2.1)$$

$$\forall f \in L^1(X, \mathcal{B}_X, \mu), \quad E_\mu(f | \gamma)(x) = \int_X f d\mu_x \text{ 对 } \mu\text{- 几乎处处的 } x \in X \text{ 成立,} \quad (2.2)$$

其中 $E_\mu(f | \gamma)$ 表示 f 关于 $\hat{\gamma}$ 的条件期望. 由上述性质可知, 对任意 $f \in L^1(X, \mathcal{B}_X, \mu)$, 有

$$\int_X \left(\int_X f d\mu_x \right) d\mu(x) = \int_X f d\mu.$$

此外, 若令 $\Gamma_x = \{y \in X : \mu_x = \mu_y\}$, 则 $\mu_x(\Gamma_x) = 1$ 对 μ - 几乎处处的 $x \in X$ 成立.

接下来引入条件信息函数和测度熵的概念. 给定 $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_X$, $\mu \in \mathcal{M}(X)$ 以及 $\mathcal{B}_\mu$ 的子 σ - 代数 $\mathcal{C}$, α 关于 $\mathcal{C}$ 的条件信息函数定义为

$$I_\mu(\alpha | \mathcal{C}) := \sum_{A \in \alpha} -1_A \cdot \log E_\mu(1_A | \mathcal{C}),$$

其中 $E_\mu(1_A | \mathcal{C})$ 为 A 的示性函数 1_A 关于 $\mathcal{C}$ 的条件期望. 条件信息函数满足以下等式:

$$I_\mu(\alpha \vee \beta | \mathcal{C}) = I_\mu(\alpha | \mathcal{C}) + I_\mu(\beta | \alpha \vee \mathcal{C}). \quad (2.3)$$

进一步定义

$$H_\mu(\alpha | \mathcal{C}) := \int_X I_\mu(\alpha | \mathcal{C}) d\mu = \sum_{A \in \alpha} \int_X -E(1_A | \mathcal{C}) \log E(1_A | \mathcal{C}) d\mu,$$

则 $H_\mu(\alpha | \mathcal{C})$ 关于 α 递增, 且关于 $\mathcal{C}$ 递减. 若 $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ 且 $\mathcal{C}$ 是 T - 不变的 (即 $T^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{C}$), 不难证明对任意 $\alpha \in \mathcal{P}_X$, $H_\mu(\alpha_0^{n-1} | \mathcal{C})$ 是一个非负的次可加序列. 因此,

$$h_\mu(T, \alpha | \mathcal{C}) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1} | \mathcal{C}) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1} | \mathcal{C})$$

是良定义的. 此外, 我们还知道 $h_\mu(T, \alpha | \mathcal{C}) = H_\mu(\alpha | \bigvee_{n=1}^{\infty} T^{-n}\alpha \vee \mathcal{C})$. 若 $\mathcal{C} = \{\emptyset, X\} \pmod{\mu}$, 则我们将 $H_\mu(\alpha | \mathcal{C})$ 和 $h_\mu(T, \alpha | \mathcal{C})$ 分别记为 $H_\mu(\alpha)$ 和 $h_\mu(T, \alpha)$. μ 关于系统的测度熵定义为

$$h_\mu(T) := \sup_{\alpha \in \mathcal{P}_X} h_\mu(T, \alpha).$$

注意到 T 为同胚, 我们有

$$\begin{aligned} h_\mu(T, \alpha | \mathcal{C}) &= h_\mu(T^{-1}, \alpha | \mathcal{C}), \quad \forall \alpha \in \mathcal{P}_X, \\ h_\mu(T | \mathcal{C}) &= h_\mu(T^{-1} | \mathcal{C}). \end{aligned}$$

以下结论是熟知的, 可参见 Glasner 的专著 [9, 定理 14.29 和定理 14.33].

定理 2.1 设 (X, T) 是一个离散动力系统, $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$, $\alpha \in \mathcal{P}_X$, 则以下结论成立:

- (1) $h_\mu(T, \alpha) = H_\mu(\alpha | \bigvee_{i=1}^{+\infty} T^{-i}\alpha)$;
- (2) (Kolmogorov-Sinai 定理) 如果 α 是一个生成子, 即 $\bigvee_{i=-\infty}^{\infty} T^{-i}\alpha = \mathcal{B}_X \pmod{\mu}$, 则

$$h_\mu(T) = h_\mu(T, \alpha).$$

3 稳定集与混沌

本节首先引入稳定集和不稳定集的概念, 随后我们回顾正熵系统中与稳定集和不稳定集有关的混沌现象方面的最新进展. 设 (X, T) 是一个离散动力系统. $x \in X$ 关于 T 的稳定集定义如下:

$$W^s(x, T) = \left\{ y \in X : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(T^n x, T^n y) = 0 \right\}.$$

类似地, x 关于 T 的不稳定集定义为

$$W^u(x, T) = \left\{ y \in X : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(T^{-n}x, T^{-n}y) = 0 \right\}.$$

进一步, 我们定义 $x \in X$ 关于 T 的双边稳定集为

$$W(x, T) = \left\{ y \in X : \lim_{|n| \rightarrow \infty} d(T^n x, T^n y) = 0 \right\}.$$

如果 $y \in W^s(x, T)$, 则称 (x, y) 是渐近对; 如果 $y \in W(x, T)$, 则称 (x, y) 是双边渐近对. 对于 $x \neq y$ 的渐近对 (或者双边渐近对) (x, y) , 我们称其为非平凡的渐近对 (或者非平凡的双边渐近对).

在紧流形上的 Anosov 微分同胚 f 作用下, 稳定集中的点在 f 的作用下渐近, 在 f^{-1} 的作用下发散; 而不稳定集中点的行为则恰好相反. 2002 年, Blanchard 等^[21] 证明了在具有正熵的离散动力系统 (X, T) 中, T 的很多稳定集在 T^{-1} 作用下是不稳定的. 确切地讲, 对 $\delta > 0$, 我们称空间 X 的点对 (x, y) 为相对于 T 的 δ -Li-Yorke 对, 如果

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} d(T^n x, T^n y) \geq \delta \quad \text{且} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} d(T^n x, T^n y) = 0.$$

X 的子集 S 称为相对于 T 的 δ -Li-Yorke 混沌集, 如果对任意 $x \neq y \in S$, (x, y) 均为相对于 T 的 δ -Li-Yorke 对. 如果 (X, T) 包含有一个不可数 Li-Yorke 混沌集 E , 即对于任意 E 中两个不同点 x 和 y , 均有

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} d(T^n x, T^n y) > 0 \quad \text{且} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} d(T^n x, T^n y) = 0,$$

则称系统 (X, T) 为 Li-Yorke 混沌的. Li-Yorke 混沌是非常经典的混沌概念, 它是 Li 和 Yorke^[27] 最早引入的.

定理 3.1^[21] 设 (X, T) 为离散动力系统, μ 是 X 上一个具有正熵的 T -不变遍历 Borel 概率测度, 则存在 $\delta > 0$ 使得对 μ -几乎处处的 $x \in X$, 我们都能找到一个不可数集 $F_x \subseteq W^s(x, T)$ 满足如下性质: 对每个 $y \in F_x$, (x, y) 是相对于 T^{-1} 的 δ -Li-Yorke 对, 即

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} d(T^{-n}x, T^{-n}y) \geq \delta \quad \text{且} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} d(T^{-n}x, T^{-n}y) = 0.$$

对具有正熵的紧 Riemann 流形 M 上的 C^2 微分同胚 f , Sumi^[22] 得到了进一步的结果:

定理 3.2^[22] 设 f 为紧 Riemann 流形 M 上的 C^2 微分同胚. 如果 μ 为 M 上具有正熵的 f -不变的遍历 Borel 概率测度, 则对 μ -几乎处处的 $x \in M$, $\overline{W^s(x, f)}$ 和 $\overline{W^u(x, f)}$ 中都包含了一个不可数相对于 f 的 Li-Yorke 混沌集.

对于一般情形, 文献 [28] 中的结果表明, 任何一个具有正熵的离散动力系统 (X, T) 均为 Li-Yorke 混沌的. 与正熵蕴含混沌相关的更多结果可参见文献 [29–34].

2008 年, Huang^[23] 证明了, 正熵系统稳定集闭包中发生 Li-Yorke 混沌现象, 且稳定集沿着负方向具有正熵. 更确切的陈述如下:

定理 3.3^[23] 设 (X, T) 为离散动力系统, μ 是 X 上一个具有正熵的 T -不变遍历 Borel 概率测度, 则存在 $\delta > 0$, 使得对 μ -几乎处处的 $x \in X$, 我们有以下结论:

- (1) $\overline{W^s(x, T)}$ 和 $\overline{W^u(x, T)}$ 中都包含了一个相对于 f 的 δ -Li-Yorke 混沌的 Cantor 集;
- (2) 存在一个闭集 $F_x \subseteq W^s(x, T)$ 和一个闭集 $E_x \subseteq W^u(x, T)$ 满足

$$h(T^{-1}, F_x) \geq h_\mu(T), \quad h(T, E_x) \geq h_\mu(T).$$

2014 年, Huang 等^[25] 证明了, 正熵系统中稳定集和不稳定集闭包上可以出现更为复杂的混沌现象 (也可参见文献 [35, 36]). 设 (X, T) 为离散动力系统, $\delta > 0$. 我们称空间 X 中的点对 (x, y) 为相对于 T 的 δ -平均 Li-Yorke 对, 如果以下式子成立:

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d(T^n x, T^n y) \geq \delta \quad \text{且} \quad \liminf_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d(T^n x, T^n y) = 0.$$

X 的子集 S 称为相对于 T 的 δ -平均 Li-Yorke 混沌集, 如果对任意的 $x \neq y \in S$, (x, y) 均为相对于 T 的 δ -平均 Li-Yorke 对.

定理 3.4 (参见文献 [25, 定理 1.1]) 设 (X, T) 为离散动力系统, μ 是 X 上一个具有正熵的 T -不变遍历 Borel 概率测度, 则存在 $\delta > 0$, 使得对 μ -几乎处处的 $x \in X$, 我们都能找到一个不可数集 $F_x \subseteq \overline{W^s(x, T)} \cap \overline{W^u(x, T)}$, 满足 F_x 是相对于 T 和 T^{-1} 的 δ -平均 Li-Yorke 混沌集.

2015 年, Huang 等^[26] 证明了正熵系统稳定集沿着负方向会发生 Li-Yorke 混沌.

定理 3.5 (参见文献 [26, 定理 1.3]) 设 (X, T) 为离散动力系统, μ 是 X 上一个具有正熵的 T -不变遍历 Borel 概率测度, 则存在 $\delta > 0$, 使得对 μ -几乎处处的 $x \in X$, 我们都能找到一个不可数集 $F_x \subseteq W^s(x, T)$, 满足 F_x 是相对于 T^{-1} 的 δ -Li-Yorke 混沌集.

4 稳定集与 Bowen 熵

本节首先对一个子集引入 Bowen 熵, 然后对正熵系统估计其稳定集和不稳定集闭包的 Bowen 熵. 一个离散动力系统中非紧集的 Bowen 熵的概念是 Bowen^[37] 在 1973 年引入的 (也可参见文献 [38]). 设 (X, T) 是一个在 X 上赋予了度量 d 的离散动力系统. 给定 $k \in \mathbb{N}$, $x \in X$, $r > 0$, 定义以 x 为中心、以 r 为半径、步长为 k 的 Bowen 球为

$$B_k(x, r, T) = \left\{ x' \in X : \max_{0 \leq i \leq k-1} d(T^i x, T^i x') < r \right\}.$$

对 $k = \infty$, 我们定义 $B_\infty(x, r, T) = \{x\}$.

对 $Z \subseteq X$, $s \geq 0$, $N \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$, 定义

$$\mathcal{M}_{N, \epsilon}^s(Z) = \inf \sum_i \exp(-s n_i),$$

其中下确界取遍所有使得 $x_i \in X$, $n_i \geq N$ 以及 $\bigcup_i B_{n_i}(x_i, \epsilon, T) \supseteq Z$ 成立的有限或者可数个 Bowen 球族 $\{B_{n_i}(x_i, \epsilon, T)\}$. $\mathcal{M}_{N, \epsilon}^s(Z)$ 在 N 增加或 ϵ 减小时是非减的, 因此下列极限存在:

$$\mathcal{M}_\epsilon^s(Z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{N, \epsilon}^s(Z), \quad \mathcal{M}^s(Z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}_\epsilon^s(Z).$$

T 限制在 Z 上的 Bowen 熵 $h_{\text{top}}^B(T|Z)$, 或简称为 Z 的 Bowen 熵, 定义为参数 s 在 $\mathcal{M}^s(Z)$ 从 ∞ 跳跃到 0 时的临界值, 即

$$\mathcal{M}^s(Z) = \begin{cases} 0, & s > h_{\text{top}}^B(T|Z), \\ \infty, & s < h_{\text{top}}^B(T|Z). \end{cases}$$

易知 $h_{\text{top}}^B(T|Z) \leq h(T, Z)$ 对任意 $Z \subseteq X$ 成立, 且 $h_{\text{top}}^B(T|X) = h_{\text{top}}(T)$ (参见文献 [37, 38]).

设 (X, T) 和 (Y, S) 为两个离散动力系统. 一个连续映射 $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ 称为从 (X, T) 到 (Y, S) 的同态或因子的映射, 若它是满射, 而且 $\pi \circ T = S \circ \pi$. 这种情形下, 我们称 (X, T) 是 (Y, S) 的扩充或者称 (Y, S) 是 (X, T) 的一个因子. 下面结果的证明类似于文献 [5, 定理 17] 的证明.

命题 4.1 (参见文献 [24, 定理 3.3]) 设 $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ 是两个离散动力系统间的因子映射, 则对任意的 $E \subseteq X$, 有

$$h_{\text{top}}^B(T | E) \leq h_{\text{top}}^B(S | \pi(E)) + \sup_{y \in Y} h(T, \pi^{-1}(y)). \quad (4.1)$$

命题 4.2 (参见文献 [24, 命题 4.5]) 设 (X, T) 为零维的离散动力系统. 如果 μ 为 X 上具有正熵的 T -不变的遍历的 Borel 概率测度, 则对 μ -几乎处处的 $x \in X$, 有

$$h_{\text{top}}^B(T | \overline{W^s(x, T)} \cap \overline{W^u(x, T)}) \geq h_\mu(T) \quad \text{且} \quad h_{\text{top}}^B(T^{-1} | \overline{W^s(x, T)} \cap \overline{W^u(x, T)}) \geq h_\mu(T).$$

定义 4.3 [39] 我们称两个离散动力系统间的扩充 $\pi : (Z, R) \rightarrow (X, T)$ 为本征扩充, 如果对每个 $\nu \in \mathcal{M}(Z, R)$ 均有 $h_\nu(R | \pi^{-1}\mathcal{B}_X) = 0$.

引理 4.4 [40] 每个离散动力系统 (X, T) 都有一个零维本征扩充 (Z, R) , 即存在一个本征扩充 $\pi : (Z, R) \rightarrow (X, T)$ 满足 Z 为零维空间.

定理 4.5 设 (X, T) 为离散动力系统. 如果 μ 为 X 上具有正熵的 T -不变的遍历的 Borel 概率测度, 则对 μ -几乎处处的 $x \in X$, 有

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}^B(T | \overline{W^s(x, T)} \cap \overline{W^u(x, T)}) &\geq h_\mu(T), \\ h_{\text{top}}^B(T^{-1} | \overline{W^s(x, T)} \cap \overline{W^u(x, T)}) &\geq h_\mu(T). \end{aligned}$$

证明 由引理 4.4 知, 存在一个本征扩充 $\pi : (Z, R) \rightarrow (X, T)$ 满足 Z 为零维空间. 利用条件熵的变分原理 (参见文献 [41–43]), 我们有

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} h(R, \pi^{-1}(x)) &= \sup_{\theta \in \mathcal{M}(Z, R)} h_\theta(R | \pi^{-1}\mathcal{B}_X) = 0, \\ \sup_{x \in X} h(R^{-1}, \pi^{-1}(x)) &= \sup_{\theta \in \mathcal{M}(Z, R^{-1})} h_\theta(R^{-1} | \pi^{-1}\mathcal{B}_X) = 0. \end{aligned}$$

取 $\nu \in \mathcal{M}^e(Z, R)$ 使得 $\pi\nu = \mu$. 由命题 4.2 知, 存在 Borel 集 $Z_0 \subseteq Z$ 使得 $\nu(Z_0) = 1$, 且对每个 $z \in Z_0$, 有

$$h_{\text{top}}^B(R | \overline{W^s(z, R)} \cap \overline{W^u(z, R)}) \geq h_\nu(R) \quad \text{且} \quad h_{\text{top}}^B(R^{-1} | \overline{W^s(z, R)} \cap \overline{W^u(z, R)}) \geq h_\nu(R).$$

设 $X_0 = \pi(Z_0)$. 由 Lusin 的一个定理: 解析集为万有可测集 (如文献 [44, 定理 21.10]), 可知 X_0 为 μ -可测集且 $\mu(X_0) = 1$. 对 $x \in X_0$, 取 $z \in Z_0$ 满足 $\pi(z) = x$. 显然,

$$\pi(\overline{W^s(z, R)} \cap \overline{W^u(z, R)}) \subseteq \overline{W^s(x, T)} \cap \overline{W^u(x, T)}.$$

现在由命题 4.1, 有

$$h_{\text{top}}^B(T | \overline{W^s(x, T)} \cap \overline{W^u(x, T)}) \geq h_{\text{top}}^B(R | \overline{W^s(z, R)} \cap \overline{W^u(z, R)}) \geq h_\nu(R) = h_\mu(T).$$

类似地,

$$h_{\text{top}}^B(T^{-1} | \overline{W^s(x, T)} \cap \overline{W^u(x, T)}) \geq h_\mu(T).$$

这就完成了定理的证明. $\square$

注 4.6 Fang 等在文献 [24, 定理 1.2] 中利用文献 [45, 命题 7.8] 在附加了 $h_{\text{top}}(T) < \infty$ 的条件下得到了定理 4.5.

利用熵的变分原理, 可得定理 4.5 的一个直接的推论:

推论 4.7 设 (X, T) 为离散系统, 则

$$(1) \sup_{x \in X} h_{\text{top}}^B(T \mid \overline{W^s(x, T)} \cap \overline{W^u(x, T)}) = h_{\text{top}}(T), \sup_{x \in X} h_{\text{top}}^B(T^{-1} \mid \overline{W^s(x, T)} \cap \overline{W^u(x, T)}) = h_{\text{top}}(T).$$

(2) 如果熵映射 $\mu : \mathcal{M}(X, T) \mapsto h_\mu(T)$ 是上半连续的, 则存在 $x \in X$ 使得

$$h_{\text{top}}^B(T \mid \overline{W^s(x, T)} \cap \overline{W^u(x, T)}) = h_{\text{top}}(T), \quad h_{\text{top}}^B(T^{-1} \mid \overline{W^s(x, T)} \cap \overline{W^u(x, T)}) = h_{\text{top}}(T).$$

5 稳定集与维数

本节的目的是研究正熵符号系统以及正熵 C^1 -微分同胚系统中稳定集和不稳定集的 Hausdorff 维数. 首先, 我们介绍 Hausdorff 维数的定义以及用于估计 Hausdorff 维数下界的质量分布原理.

5.1 Hausdorff 维数

设 (X, d) 为度量空间. 对 X 的子集 E , E 的直径记为

$$\text{diam}(E) := \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}.$$

给定 $s \geq 0$, $\delta > 0$, X 的子集 E , 记

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam}(A_n))^s : A_n \subset X, \text{diam}(A_n) \leq \delta, \forall n \geq 1, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

由定义知 $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ 关于 δ 单调递减, 从而可定义

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

对任意的 $s \geq 0$ 和 $\delta > 0$, 易知 $\mathcal{H}_\delta^s$ 为 X 上的外测度. 从而 $\mathcal{H}^s$ 也为 X 上的外测度, 称为 s -维 Hausdorff 外测度.

给定 $E \subset X$, 当 $\delta \leq 1$ 时, $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ 关于 s 单调递减, 从而 $\mathcal{H}^s(E)$ 关于 s 单调递减. 此外, 对任意的 $s \geq 0$, $\delta > 0$, $\epsilon > 0$, 有

$$\mathcal{H}_\delta^{s+\epsilon}(E) \leq \delta^\epsilon \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

由此可知, 存在唯一的 $s \in [0, +\infty]$ 使得当 $s' > s$ 时, $\mathcal{H}^{s'}(E) = 0$; 当 $s' < s$ 时, $\mathcal{H}^{s'}(E) = \infty$. 称该 s 为 E 的 Hausdorff 维数, 记作 $\dim_H(E)$.

下面给出在紧度量空间中估计 Hausdorff 外测度和 Hausdorff 维数上下界的常用的引理. 这些都是熟知的结果, 但通常文献中都是在 Euclid 空间中陈述的, 如文献 [46, 47]. 为方便读者, 这里在紧度量空间的情形下给出它们的证明.

引理 5.1 设 μ 为紧度量空间 (X, d) 上的有限 Borel 测度, E 为 X 的 Borel 子集, $s > 0$, $C > 0$, 以下结论成立 (其中出现的 $B(x, r)$ 表示 X 中以 x 为中心、以 r 为半径的开球):

(1) 若对 $\forall x \in E$,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^s} \geq C,$$

则有 $\mu(E) \geq 10^{-s} C \mathcal{H}^s(E)$.

(2) 若对 $\forall x \in E$,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^s} \leq C,$$

则有 $\mu(E) \leq C\mathcal{H}^s(E)$.

证明 (1) 我们只需证明对任意 $\epsilon > 0$, $\mu(E) + \epsilon \geq 10^{-s}C\mathcal{H}^s(E)$. 给定 $\epsilon > 0$. 由 (X, d) 的紧性和 $\mu(X)$ 的有限性可知 μ 具有正则性 (可参见文献 [7, 定理 6.1]), 因此存在 X 中的开集 $G \supset E$, 使得 $\mu(G) < \mu(E) + \epsilon$. 任取 $C' \in (0, C)$, $\delta > 0$, 由条件知, 对任意 $x \in E$, 存在 $r_x \in (0, \frac{\delta}{10})$ 使得

$$B(x, r_x) \subset G, \quad \mu(B(x, r_x)) \geq C' r_x^s.$$

由 $5r$ -覆盖定理 (参见文献 [48, 定理 2.1]) 知, 存在 E 的有限或可数子集 $\{x_i\}_{i \in I}$ 使得 $\{B(x_i, r_{x_i})\}_{i \in I}$ 是两两互不相交, 且 $E \subset \bigcup_{i \in I} B(x_i, 5r_{x_i})$. 注意到对 $i \in I$, $\text{diam}(B(x_i, 5r_{x_i})) \leq 10r_{x_i} < \delta$, 从而可得

$$10^{-s}C'\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq C' \sum_{i \in I} r_{x_i}^s \leq \sum_{i \in I} \mu(B(x_i, r_{x_i})) = \mu\left(\bigcup_{i \in I} B(x_i, r_{x_i})\right) \leq \mu(G) < \mu(E) + \epsilon.$$

先令 $\delta \rightarrow 0$, 再令 $C' \rightarrow C$, 我们得到 $\mu(E) + \epsilon \geq 10^{-s}C\mathcal{H}^s(E)$.

(2) 首先给定 $r > 0$, 注意对 $\forall r' \in (0, r)$, 当 $d(x, y) \leq r - r'$ 时, $\mu(B(y, r)) \geq \mu(B(x, r'))$ 成立, 从而,

$$\liminf_{y \rightarrow x} \mu(B(y, r)) \geq \lim_{r' \rightarrow r^-} \mu(B(x, r')) = \mu(B(x, r)),$$

即映射 $x \in X \mapsto \mu(B(x, r)) \in [0, \mu(X)]$ 是下半连续的.

由此可知,

$$f_n(x) = \sup_{0 < r \leq \frac{1}{n}} \frac{\mu(B(x, r))}{r^s}$$

为下半连续函数. 特别地, f_n 为 Borel 可测函数, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^s} \leq C, \quad \forall x \in E.$$

取 $\epsilon > 0$, 由 Egoroff 定理知, 存在 E 的 Borel 子集 F , 满足 $\mu(E \setminus F) < \epsilon$ 且 f_n 在 F 上一致收敛. 任取 $C' > C$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $f_N(x) \leq C'$ 对 $\forall x \in F$ 成立. 任取 $0 < \delta \leq \frac{1}{N}$, 任取一系列 $A_n \subset X$ 满足 $\text{diam}(A_n) \leq \delta$ 且 $\bigcup_n A_n \supset F$. 若 $A_n \cap F \neq \emptyset$, 任取 $x \in A_n \cap F$, 由 $f_N(x) \leq C'$ 知,

$$\mu(A_n) \leq \mu(B(x, \text{diam}(A_n))) \leq C'(\text{diam}(A_n))^s.$$

对 n 求和可得

$$\mu(F) \leq \sum_{A_n \cap F \neq \emptyset} \mu(A_n) \leq C' \sum_{A_n \cap F \neq \emptyset} (\text{diam}(A_n))^s.$$

由 $\{A_n\}$ 的任意性可知, $\mu(F) \leq C'\mathcal{H}_\delta^s(F)$. 先令 $\delta \rightarrow 0$, 再令 $C' \rightarrow C$, 最后令 $\epsilon \rightarrow 0$, 结论 (2) 得证. $\square$

引理 5.2 设 μ 为紧度量空间 (X, d) 上的有限 Borel 测度, 令

$$\underline{\dim}(\mu, x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}, \quad \forall x \in X.$$

设 E 为 X 的 Borel 子集, $s > 0$, $C > 0$, 以下结论成立:

(1) 若对 $\forall x \in E$, $\underline{\dim}(\mu, x) \leq s$, 则有 $\dim_H(E) \leq s$.

(2) (质量分布原理) 若 $\mu(E) > 0$, 且对 $\forall x \in E$, $\underline{\dim}(\mu, x) \geq s$, 则有 $\dim_H(E) \geq s$.

证明 若对 $\forall x \in E$, $\underline{\dim}(\mu, x) \leq s$, 则对任意的 $s' > s$, 有

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^{s'}} = +\infty.$$

从而由引理 5.1(1) 知, $\mathcal{H}^{s'}(E) = 0$. 由此可知 $\dim_H(E) \leq s$.

若 $\mu(E) > 0$, 且对 $\forall x \in E$, $\underline{\dim}(\mu, x) \geq s$, 则对任意的 $s' \in (0, s)$, 有

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^{s'}} = 0.$$

从而由引理 5.1(2) 知 $\mathcal{H}^{s'}(E) = +\infty$. 由此可知 $\dim_H(E) \geq s$. □

5.2 符号系统

给定正整数 $N \geq 2$, 令 Σ_N 为由 N 个符号 $1, \dots, N$ 的双边无穷序列全体构成的集合, 即

$$\Sigma_N = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_i \in \{1, \dots, N\}, i \in \mathbb{Z}\}.$$

令 σ 为 Σ_N 上的左移位映射, 即

$$\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N, \quad (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \text{其中 } y_i = x_{i+1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

我们赋予 $\{1, \dots, N\}$ 离散拓扑, 并相应地赋予 Σ_N 乘积拓扑, 则 (Σ_N, σ) 为可逆的离散动力系统. 在 Σ_N 上引入与其拓扑相容的度量 ρ 如下: 对 $x \neq y \in \Sigma_N$, $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$,

$$\rho(x, y) = N^{-k}, \quad \text{其中 } k = \min\{|i| : x_i \neq y_i\}.$$

若 X 为 Σ_N 的非空闭子集, 且满足 $\sigma(X) = X$, 则称动力系统 (X, σ) 为 (Σ_N, σ) 的子移位或符号系统. 给定 $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in X$, 记

$$W_0^s(x, \sigma) = \{(y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in X : y_i = x_i, i \geq 1\}.$$

注意对 x 的稳定集 $W^s(x, \sigma)$, 总有下列式成立:

$$W^s(x, \sigma) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \sigma^{-n}(W_0^s(\sigma^n x, \sigma)).$$

定理 5.3 设 (X, σ) 为 (Σ_N, σ) 的子移位, 则对任意的 $\mu \in \mathcal{M}^e(X, \sigma)$, 有

$$\dim_H(W_0^s(x, \sigma)) \geq \frac{h_\mu(\sigma)}{\log N}$$

对 μ -几乎处处的 $x \in X$ 成立.

证明 令 $\alpha = \{A_k : 1 \leq k \leq N\}$, 其中 $A_k = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in X : x_0 = k\}$, $k = 1, \dots, N$, 则 $\alpha \in \mathcal{P}_X$, 并且具有以下性质:

(1) α 为 $(X, \mathcal{B}_X, \sigma)$ 的生成子, 即

$$\bigvee_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma^i \alpha = \mathcal{B}_X;$$

(2) 可测剖分 $\alpha^- = \bigvee_{i=1}^{+\infty} \sigma^{-i} \alpha$ 满足 $\forall x \in X, \alpha^-(x) = W_0^s(x, \sigma)$.

令

$$g(x) = I_\mu(\alpha | \alpha^-)(x), \quad \beta_n = \bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^i \alpha, \quad G_n(x) = I_\mu(\beta_n | \alpha^-)(x), \quad \forall n \geq 1.$$

由定理 2.1 知,

$$h_\mu(\sigma) = h_\mu(\sigma, \alpha) = H_\mu(\alpha | \alpha^-) = \int_X g d\mu.$$

由 G_n 的定义知, 对 $\forall n \geq 1$,

$$G_{n+1} - g = I_\mu\left(\bigvee_{i=1}^n \sigma^i \alpha | \alpha \vee \alpha^-\right) = I_\mu(\sigma \beta_n | \sigma \alpha^-) = G_n \circ \sigma^{-1}.$$

上式中第一个等号由 (2.3) 可得, 最后一个等号成立是因为对 $\forall \beta \in \mathcal{P}_X$ 以及 $\mathcal{B}_X$ 的任意子 σ -代数 $\mathcal{C}$, 由 σ 可逆和 μ 为 σ -不变测度易知, $I_\mu(\sigma \beta | \sigma \mathcal{C}) = I_\mu(\beta | \mathcal{C}) \circ \sigma^{-1}$. 从上式立即得到

$$G_{n+1} = g + G_n \circ \sigma^{-1} = \cdots = \sum_{k=0}^n g \circ \sigma^{-k},$$

注意到 $\mu \in \mathcal{M}^e(X, \sigma^{-1})$, 从而, 由 Birkhoff 遍历定理可知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} G_n(x) = \int_X g d\mu = h_\mu(\sigma)$$

对 μ -几乎处处的 $x \in X$ 成立.

从现在起, 我们取定一个 μ 关于可测剖分 α^- 的测度分解, 记为 $\{\mu_x\}_{x \in X}$. 首先, 由上述讨论及测度分解的性质可知, 存在 $X_1 \in \mathcal{B}_X$ 使得 $\mu(X_1) = 1$, 并且下式成立:

$$\mu_x(\alpha^-(x)) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} G_n(x) = h_\mu(\sigma), \quad \forall x \in X_1.$$

其次, 令 $\mathcal{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \beta_n$. 由测度分解的性质 (2.1) 和 (2.2) 可知, 对 $\forall A \in \mathcal{A}$, 存在 $X_A \in \mathcal{B}_X$ 使得 $\mu(X_A) = 1$, 并且

$$E_\mu(1_A | \alpha^-)(x) = \mu_x(A), \quad \forall x \in X_A.$$

由于 $\mathcal{A}$ 为可数集, $X_2 = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} X_A \in \mathcal{B}_X$ 且 $\mu(X_2) = 1$. 进一步, 由 X_2 的定义知,

$$G_n(x) = - \sum_{A \in \beta_n} 1_A(x) \cdot \log \mu_x(A) = - \log \mu_x(\beta_n(x)), \quad \forall x \in X_2, \quad \forall n \geq 1.$$

此外, 由测度分解的性质知, 存在 $X_3 \in \mathcal{B}_X$, 使得 $\mu(X_3) = 1$ 并且

$$\Gamma_x := \{y \in X_2 : \mu_y = \mu_x\} \in \mathcal{B}_X, \quad \mu_x(\Gamma_x) = 1, \quad \forall x \in X_3.$$

综合以上几点可得, $X_0 = X_1 \cap X_2 \cap X_3 \in \mathcal{B}_X$, $\mu(X_0) = 1$, 并且

$$\mu_x(\alpha^-(x) \cap \Gamma_x) = 1, \quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_x(\beta_n(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} G_n(y) = h_\mu(\sigma), \quad \forall x \in X_0, \quad \forall y \in \Gamma_x.$$

由 Σ_N 上度量 ρ 的定义知, 对 $B(y, r) = \{z \in X : \rho(y, z) < r\}$, 有

$$\alpha^-(x) \cap \beta_{n+1}(y) \subset B(y, N^{-n}) \subset \beta_n(y), \quad \forall x, y \in X, \quad n \geq 0.$$

从而易知,

$$\underline{\dim}(\mu_x, y) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu_x(B(y, N^{-n}))}{n \log N} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu_x(\beta_n(y))}{n \log N} = \frac{h_\mu(\sigma)}{\log N}, \quad \forall x \in X_0, \quad \forall y \in \Gamma_x.$$

对 $\forall x \in X_0$, 根据质量分布原理, 由上式和 $\mu_x(\alpha^-(x) \cap \Gamma_x) = 1$ 可得

$$\dim_H(\alpha^-(x)) \geq \frac{h_\mu(\sigma)}{\log N}.$$

又因为 $\mu(X_0) = 1$ 和 $\alpha^-(x) = W_0^s(x, \sigma)$ 对 $\forall x \in X$ 成立, 定理得证. $\square$

5.3 C^1 - 微分同胚

设 f 为光滑 Riemann 流形 M 上的 C^1 - 微分同胚, 记 TM 为 M 的切丛, $Df : TM \rightarrow TM$ 为 f 的切映射. 任给 $x \in M$, 记 $T_x M \subset TM$ 为 M 在 x 处的切空间, Df_x 为 Df 在 $T_x M$ 上的限制, 即 $Df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$ 为 x 处的切映射. 任取 $v \in T_x M \setminus \{0\}$, 若极限

$$\chi(x, v) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n(v)\|$$

存在, 则称 $\chi(x, v)$ 为 f 在 x 处沿 v 方向的 Lyapunov 指数, 其中 $\|\cdot\|$ 为 M 上的 Riemann 结构在各点切空间诱导的范数. 若 μ 为 M 上具有紧支集的 f - 不变 Borel 概率测度, 则由乘法遍历定理可知, 以下性质对 μ - 几乎处处的 $x \in M$ 成立:

(1) 存在正整数 $1 \leq r(x) \leq \dim M$ 和 $m_1(x), \dots, m_{r(x)}(x)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{r(x)} m_i = \dim M;$$

(2) 存在 $T_x M$ 的直和分解 $T_x M = \bigoplus_{i=1}^{r(x)} E_x^i$, 使得 $\dim E_x^i = m_i$, $1 \leq i \leq r(x)$;

(3) 存在 $\lambda_1(x) > \dots > \lambda_{r(x)}(x)$, 使得对 $\forall v \in E_x^i \setminus \{0\}$, 有 $\chi(x, v) = \lambda_i(x)$, $1 \leq i \leq r(x)$;

(4) 以上与 x 有关的量均为可测的和 f - 不变的.

在上述设定下, Ruelle^[49] 证明了如下联系测度熵与 Lyapunov 指数的不等式 (称为 Ruelle 不等式):

$$h_\mu(f) \leq \int_M \sum_{i=1}^{r(x)} \max\{\lambda_i(x), 0\} d\mu(x).$$

若进一步假设 f 为 C^2 (或者更一般地, $C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$) 微分同胚, Pesin^[13] 证明了, 若 μ 与 Lebesgue 测度等价, 则 Ruelle 不等式中的等号成立 (此时称为 Pesin 公式). 进一步, Ledrappier 和 Young^[50] 给出了 Pesin 公式成立的一个充要条件是 μ 为 Sinai-Ruelle-Bowen 测度, 或简称 SRB 测度, 即 μ 满足如下条件:

(1) $\lambda_1(x) > 0$ 对 μ - 几乎处处的 $x \in M$ 成立 (从而对 μ - 几乎处处的 $x \in M$, 其不稳定集 $W^u(x)$ 为浸入子流形);

(2) 任给 M 的可测剖分 ξ , 若对 μ - 几乎处处的 $x \in M$, $\xi(x) \subset W^u(x)$ 且 $\xi(x)$ 是 x 在 $W^u(x)$ 中的邻域, 则对 μ - 几乎处处的 $x \in M$, μ_x^ξ 关于 Leb_x^ξ 绝对连续, 其中 $\{\mu_x^\xi\}$ 和 $\{\text{Leb}_x^\xi\}$ 分别为 μ 和 Lebesgue 测度关于 ξ 的测度分解.

回到 f 仅为 C^1 微分同胚的情形, 仍设 μ 为 M 上具有紧支集的 f -不变 Borel 概率测度. 由乘法遍历定理知, 对 μ -几乎处处的 $x \in M$, 如下等式成立:

$$\lambda_1(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_x^n\|.$$

因此, 我们可以定义 f 关于 μ 的最大 Lyapunov 指数为

$$\chi_\mu^1(f) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_M \log \|Df_x^n\| d\mu(x) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_M \log \|Df_x^n\| d\mu(x).$$

特别地, 由 Ruelle 不等式可知,

$$h_\mu(f) \leq \max\{0, \chi_\mu^1(f)\} \cdot \dim(M).$$

因此, 当 $h_\mu(f) > 0$ 时必然有 $\chi_\mu^1(f) > 0$.

以下所涉及的 M 中的 Hausdorff 维数 $\dim_H$ 均指由 M 上 Riemann 结构诱导的度量所定义的 Hausdorff 维数. Fang 等^[24] 使用最大 Lyapunov 指数和测度熵给出了如下稳定集闭包和不稳定集闭包交集的 Hausdorff 维数估计.

定理 5.4 (参见文献 [24, 定理 3]) 设 f 为光滑 Riemann 流形 M 上的 C^1 -微分同胚, μ 为 M 上具有紧支撑 Λ 的遍历的 f -不变 Borel 概率测度, 且具有正熵, 则

$$\dim_H(\overline{W^s(x, f)} \cap \overline{W^u(x, f)}) \geq \frac{h_\mu(f)}{\chi_\mu^1(f)}$$

对 μ -几乎处处的 $x \in \Lambda$ 成立.

6 更多的问题

我们的第一个问题来自于 Fang 等在文献 [24] 中提出的问题 5.10 的第一小问, 它的具体陈述如下:

问题 6.1 设 (X, T) 为离散动力系统. 如果 μ 为 X 上具有正熵的 T -不变的遍历 Borel 概率测度, 是否对 μ -几乎处处的 $x \in X$ 有以下估计:

$$h_{\text{top}}^B(T | W^u(x, T)) \geq h_\mu(T), \quad h_{\text{top}}^B(T^{-1} | W^s(x, T)) \geq h_\mu(T)?$$

进一步, 对光滑 Riemann 流形 M 上的微分同胚 f 和 $\delta > 0$, 定义 $x \in X$ 的 δ -局部稳定集如下:

$$W^s(x, f; \delta) = \left\{ y \in X : \sup_{n \geq 0} \rho(f^n x, f^n y) \leq \delta \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n x, f^n y) = 0 \right\}.$$

类似地, 定义 x 的 δ -局部不稳定集为

$$W^u(x, f; \delta) = \left\{ y \in X : \sup_{n \geq 0} \rho(f^{-n} x, f^{-n} y) \leq \delta \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(f^{-n} x, f^{-n} y) = 0 \right\}.$$

问题 6.2 设 f 为光滑 Riemann 流形 M 上的 C^1 -微分同胚, μ 为 M 上具有紧支撑 Λ 的正熵的 f -不变的遍历 Borel 概率测度, 是否对 μ -几乎处处的 $x \in \Lambda$, 以下估计成立:

$$\dim_H(W^s(x, f; \delta)) \geq \frac{h_\mu(f)}{\chi_\mu^1(f^{-1})} \quad \text{且} \quad \dim_H(W^u(x, f; \delta)) \geq \frac{h_\mu(f)}{\chi_\mu^1(f)}, \quad \forall \delta > 0.$$

我们第三个问题是关于无穷维随机框架下正熵系统的稳定集. 在 2010 年, Lian 和 Lu^[51] 建立了光滑的无穷维随机动力系统的 Lyapunov 指数和不变流形理论. 我们也想知道对于一般随机紧的不变集, 如果它有正熵, 它纤维上的稳定集有何特性. 2015 年, Huang 和 Lu^[52] 证明了对于具有正熵的随机紧的不变集, 它纤维上发生混沌现象.

最后一个问题的第一小问是由 Chung 和 Li^[53] 提出的. 我们称一个离散动力系统 (X, T) 是扩张的, 如果我们能找到 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \neq y \in X$, 存在 $n \in \mathbb{Z}$ 满足 $d(T^n x, T^n y) > \delta$. 对于群 $\mathbb{Z}$ 以自同构作用在紧度量的交换群 X 上的扩张的 $\mathbb{Z}$ 代数系统, Lind 和 Schmidt^[54] 证明了系统有正熵当且仅当系统具有非平凡的双边渐近对. 事实上, Lind 和 Schmidt 是对 $\mathbb{Z}^d$ 的代数作用证明该结果的. 最近, Chung 和 Li^[53] 对一大类可数顺从群 (amenable group) 证明了类似结果. 如果缺失了扩张性, 一个离散动力系统即使有正熵也不一定有非平凡的双边渐近对. 在文献 [54, 例 3.4] 中, Lind 和 Schmidt 通过在环面上构造自同构的例子说明了这一点.

问题 6.3 设 (X, T) 是一个扩张的离散动力系统.

(1) 如果 (X, T) 具有正拓扑熵, 是否一定有非平凡的双边渐近对, 即是否存在点 $x \in X$ 使得

$$W(x, T) \setminus \{x\} \neq \emptyset?$$

(2) 进一步,

$$\sup_{x \in X} h_{\text{top}}^B(T | \overline{W(x, T)}) = h_{\text{top}}(T)$$

是否成立?

参考文献

- 1 Kolmogorov A N. A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces. Dokl Akad Nauk, 1958, 119: 861–864
- 2 Sinai J. On the concept of entropy for a dynamic system. Dokl Akad Nauk, 1959, 124: 768–771
- 3 Adler R L, Konheim A G, McAndrew M H. Topological entropy. Trans Amer Math Soc, 1965, 114: 309–319
- 4 Dinaburg E I. A correlation between topological entropy and metric entropy. Dokl Akad Nauk, 1970, 190: 19–22
- 5 Bowen R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. Trans Amer Math Soc, 1971, 153: 401–414
- 6 Furstenberg H. Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory. Princeton: Princeton University Press, 1981
- 7 Walters P. An Introduction to Ergodic Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol. 79. New York: Springer-Verlag, 1982
- 8 Auslander J. Minimal Flows and Their Extensions. North-Holland Mathematics Studies, vol. 53. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1988
- 9 Glasner E. Ergodic Theory via Joinings. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 101. Providence: Amer Math Soc, 2003
- 10 Ye X, Huang W, Shao S. An Introduction to Topological Dynamical Systems. Beijing: Science Press, 2008
- 11 Einsiedler M, Ward T. Ergodic Theory with a View Towards Number Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol. 259. London: Springer-Verlag, 2011
- 12 Pesin J B. Families of invariant manifolds that correspond to nonzero characteristic exponents. Math USSR-Izv, 1976, 10: 1261–1305
- 13 Pesin Y B. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. Russian Math Surveys, 1977, 32: 55–114
- 14 Ruelle D. Ergodic theory of differentiable dynamical systems. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 1979, 50: 27–58
- 15 Katok A. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 1980, 51: 137–173
- 16 Fathi A, Herman M R, Yoccoz J C. A proof of Pesin's stable manifold theorem. In: Geometric Dynamics. Berlin: Springer, 1983, 177–215

- 17 Pugh C. The $C^{1+\alpha}$ hypothesis in Pesin theory. *Publ Math Inst Hautes Études Sci*, 1984, 59: 143–161
- 18 Bonatti C, Crovisier S, Shinohara K. The $C^{1+\alpha}$ hypothesis in Pesin theory revisited. *J Mod Dyn*, 2013, 7: 605–618
- 19 Buescu J, Stewart I. Liapunov stability and adding machines. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1995, 15: 271–290
- 20 Markus L, Meyer K. Periodic orbits and solenoids in generic Hamiltonian dynamical systems. *Amer J Math*, 1980, 102: 25–92
- 21 Blanchard F, Host B, Ruette S. Asymptotic pairs in positive-entropy systems. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2002, 22: 671–686
- 22 Sumi N. Diffeomorphisms with positive entropy and chaos in the sense of Li-Yorke. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2003, 23: 621–635
- 23 Huang W. Stable sets and ϵ -stable sets in positive-entropy systems. *Comm Math Phys*, 2008, 279: 535–557
- 24 Fang C, Huang W, Yi Y, et al. Dimension of stable sets and scrambled sets in positive finite entropy systems. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2012, 32: 599–628
- 25 Huang W, Li J, Ye X. Stable sets and mean Li-Yorke chaos in positive entropy systems. *J Funct Anal*, 2014, 266: 3377–3394
- 26 Huang W, Xu L, Yi Y. Asymptotic pairs, stable sets and chaos in positive entropy systems. *J Funct Anal*, 2015, 268: 824–846
- 27 Li T, Yorke J. Period 3 implies chaos. *Amer Math Monthly*, 1975, 82: 985–992
- 28 Blanchard F, Glasner E, Kolyada S, et al. On Li-Yorke pairs. *J Reine Angew Math*, 2002, 547: 51–68
- 29 Huang W, Ye X. A local variational relation and applications. *Israel J Math*, 2006, 151: 237–279
- 30 Zhang G H. Relative entropy, asymptotic pairs and chaos. *J Lond Math Soc (2)*, 2006, 73: 157–172
- 31 Kerr D, Li H. Independence in topological and C^* -dynamics. *Math Ann*, 2007, 338: 869–926
- 32 Blanchard F, Huang W. Entropy sets, weakly mixing sets and entropy capacity. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2008, 20: 275–311
- 33 Kerr D, Li H. Combinatorial independence and sofic entropy. *Comm Math Stat*, 2013, 1: 213–257
- 34 Huang W, Li J, Ye X, et al. Positive topological entropy and Δ -weakly mixing sets. *ArXiv:1504.07520*, 2015
- 35 Downarowicz T. Positive topological entropy implies chaos DC2. *Proc Amer Math Soc*, 2014, 142: 137–149
- 36 Huang W, Jin L. Stable sets and mean Li-Yorke chaos in positive entropy actions of bi-orderable amenable groups. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2016, 36: 2482–2497
- 37 Bowen R. Topological entropy for noncompact sets. *Trans Amer Math Soc*, 1973, 184: 125–136
- 38 Pesin Y B, Pitskel B S. Topological pressure and the variational principle for noncompact sets. *Funct Anal Appl*, 1984, 18: 50–63
- 39 Ledrappier F. A variational principle for the topological conditional entropy. In: *Ergodic Theory*. Berlin: Springer, 1979, 78–88
- 40 Downarowicz T, Huczek D. Zero-dimensional principal extensions. *Acta Appl Math*, 2013, 126: 117–129
- 41 Ledrappier F, Walters P. A relativised variational principle for continuous transformations. *J Lond Math Soc (2)*, 1977, 16: 568–576
- 42 Downarowicz T, Serafin J. Fiber entropy and conditional variational principles in compact non-metrizable spaces. *Fund Math*, 2002, 172: 217–247
- 43 Huang W, Ye X, Zhang G. A local variational principle for conditional entropy. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2006, 26: 219–245
- 44 Kechris A S. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 156. New York: Springer-Verlag, 1995
- 45 Boyle M, Downarowicz T. The entropy theory of symbolic extensions. *Invent Math*, 2004, 156: 119–161
- 46 Young L S. Dimension, entropy and Lyapunov exponents. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1982, 2: 109–124
- 47 Pesin Y B. *Dimension Theory in Dynamical Systems: Contemporary Views and Applications*. Chicago: University of Chicago Press, 2008
- 48 Mattila P. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 49 Ruelle D. An inequality of the entropy of differentiable maps. *Bull Braz Math Soc (NS)*, 1978, 9: 83–87
- 50 Ledrappier F, Young L S. The metric entropy of diffeomorphisms, Part I: Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula. *Ann of Math (2)*, 1985, 122: 509–539
- 51 Lian Z, Lu K. *Lyapunov Exponents and Invariant Manifolds for Random Dynamical Systems in a Banach Space*. Providence: Amer Math Soc, 2010
- 52 Huang W, Lu K. Entropy, chaos and weak horseshoe for infinite dimensional random dynamical systems. *ArXiv:1504.05275*, 2015

- 53 Chung N, Li H. Homoclinic group, IE group, and expansive algebraic actions. *Invent Math*, 2015, 199: 805–858
54 Lind D, Schmidt K. Homoclinic points of algebraic $\mathbb{Z}^d$ -actions. *J Amer Math Soc*, 1999, 12: 953–980

Stable sets for systems with positive entropy

FENG ShiLin, GAO Rui & HUANG Wen

Abstract In this survey paper, we report some new progress in the study of stable sets for dynamical systems with positive entropy. The topics on which we mainly focus include the relationships among stable sets and chaos, as well as entropy and dimension of stable sets. In particular, we give some estimate on the lower bound of Hausdorff dimension of stable sets for symbolic systems. We aim at introducing recent developments in this research area, giving a list of related literatures, and proposing some open problems.

Keywords entropy, stable set, chaos, Hausdorff dimension

MSC(2010) 37A35, 37B40, 37D25

doi: 10.1360/N012016-00100