围长为 g 且有 k 个悬挂点的单圈图的谱半径和 Laplacian 谱半径

刘慧清^{①*}, 陆玫^②, 章舜哲^①

① 湖北大学数学与计算机科学学院, 武汉 430062;

② 清华大学数学科学系, 北京 100084

E-mail: hql_2008@163.com, mlu@math.tsinghua.edu.cn, happy2008zsz@163.com

收稿日期: 2009-11-10; 接受日期: 2010-07-31; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10971114, 10990011)、湖北省教育厅自然科学基金 (批准号: D20081005)、湖北省高等学校优秀中青年科技创新团队计划 (批准号: T200901) 和应用数学湖北省重点实验室开放基金资助项目

摘要 图的谱半径和 Laplacian 谱半径分别是图的邻接矩阵和 Laplacian 矩阵的最大特征值. 本文中, 我们分别刻画了围长为 g 且有 k 个悬挂点的单圈图的谱半径和 Laplacian 谱半径达到最大时的极图.

关键词 谱半径 Laplacian 谱半径 单圈图 围长 悬挂点

MSC (2000) 主题分类 05C35, 05C50

1 引言

本文所考虑的图都是有限、简单图. 没有定义的术语和记号可参见文献 [1]. 设 $G = (V, E)$ 是一个简单的无向图, 顶点集 $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$. 图 G 的顶点 v_i 的邻域记为 $N_G(v_i)$, v_i 的度记为 $d_G(v_i)$ 或 d_i . 图 G 的度为 1 的点称为 G 的悬挂点. 设 $P_s = v_0 v_1 \cdots v_s$ 是 G 中的一条路, $d(v_1) = \cdots = d(v_{s-1}) = 2$ (除非 $s = 1$). 如果 $d(v_0) = 1$ 且 $d(v_s) \geq 3$, 则 P_s 称为 G 的一条长度为 s 的悬挂路, 特别当 $s = 1$ 时, $P_s = v_0 v_1$ 称为 G 的悬挂边; 如果 $d(v_0), d(v_s) \geq 3$, 则 P_s 称为 G 的一条内部路. 图 G 的围长是 G 中最短圈的长 (无圈图的围长定义为无穷大). 我们用 $G - v_i$ 和 $G - v_i v_j$ 分别表示去掉 G 中的点 v_i 后得到的图和去掉 G 中的边 $v_i v_j$ 后得到的图. 类似的, $G + v_i v_j$ 表示 G 中添加新边 $v_i v_j \notin E(G)$ 后得到的图.

设 $A(G)$ 是图 G 的邻接矩阵, $D(G)$ 是图 G 的顶点度对角矩阵. 矩阵 $D(G) - A(G)$ 称为 G 的 Laplacian 矩阵, 记为 $L(G)$. $A(G)$ 和 $L(G)$ 的最大特征值分别记为 $\rho(G)$ 和 $\mu(G)$. 由 Rayleigh-Ritz 定理可知, $\mu(G) = \max_{\|X\|=1} X^t L(G) X = \max_{\|X\|=1} \sum_{v_i v_j \in E(G)} (x_i - x_j)^2$ (见文献 [2]). 一个实的半正定矩阵的最大特征向量是一个对应于谱半径的实单位特征向量, 至少有一个正分量. 当 G 是连通图时, $A(G)$ 是不可约的, 因此由 Perron-Frobenius 定理可知, $\rho(G)$ 是单根且有唯一的正特征向量 (称为 G 的 Perron 向量).

图的邻接谱半径和 Laplacian 谱半径是图谱理论的重要研究课题之一. 在文献 [3] 中, Brualdi 和 Solheid 提出了如下的问题: 在给定的图类中刻画谱半径达到最大时的极图. 这个问题在过去的几十年

引用格式: Liu H Q, Lu M, Zhang S Z. On the (Laplacian) spectral radius of unicyclic graphs with girth g and k pendant vertices (in Chinese). Sci Sin Math, 2010, 40(10): 1017–1024, doi: 10.1360/012009-887

中受到了极大的关注 (见文献 [4]–[13]). 同时, 在给定的图类中刻画 Laplacian 谱半径的结果也不断涌现 (见文献 [14]–[16]). 本文将重点讨论一类单圈图的谱半径和 Laplacian 谱半径.

单圈图是一个有 n 个点和 n 条边的连通图. 设 G 为一个围长为 g 且有 k 个悬挂点的 n 阶单圈图. 若 $g = n$ 或 $k = 0$, 则 $G \cong C_n$, 这里 C_n 表示 n 个点的圈. 本文只考虑 $g \leq n-1$ 和 $k \geq 1$ 的情形. 令 $\mathcal{U}_{n,g,k} = \{G : G \text{ 是一个围长为 } g \text{ 且有 } k \text{ 个悬挂点的 } n \text{ 阶单圈图}, 3 \leq g \leq n-1, 1 \leq k \leq n-3\}$. 本文分别刻画了 $\mathcal{U}_{n,g,k}$ 中的单圈图的谱半径和 Laplacian 谱半径达到最大时的极图.

2 $\mathcal{U}_{n,g,k}$ 中的单圈图的谱半径

首先我们给出一些在本节中需要用到的引理.

引理 2.1^[16] 设 G 是一个连通图, $u, v \in V(G)$ 且 $v_1, v_2, \dots, v_s \in N(v) \setminus N(u)$ ($1 \leq s \leq d_G(v)$). 令 $\rho(G)$ 和 $X = (x_v)_{v \in V(G)}$ 分别是 $A(G)$ 的谱半径和对应的 Perron 向量. 记 G^* 是一个先删去 G 的边 uv , 再添加新边 uv_i ($1 \leq i \leq s$) 后得到的图. 如果 $x_u \geq x_v$, 则 $\rho(G) < \rho(G^*)$.

由引理 2.1, 我们得到下面的推论.

推论 2.2 设 G 是一个连通图, uv 是 G 的割边 (如图 1(a) 所示). 设 G_1 和 G_2 是 $G - uv$ 的两个连通分支且 $u \in V(G_1)$, $v \in V(G_2)$. 记 G_0 是一个先收缩 G 的边 uv , 再在点 $u(v)$ 处粘上一条悬挂边后得到的图 (如图 1(b) 所示). 则 $\rho(G) < \rho(G_0)$.

引理 2.3^[17,18] 设 G 是一个非平凡的连通图, $u, v \in V(G)$ 且 $d(u, v) = s$. 记 $G_{k,m}^*$ 是一个分别在 G 的两点 u, v 处粘上两条长度分别为 k, m ($k \geq m \geq 1$) 的路后所得到的图, 其中当 $s = 0$ 时, $d_G(u) \geq 1$; 当 $s = 1$ 时, $d_G(u), d_G(v) \geq 2$. 则 $\rho(G_{k,m}^*) > \rho(G_{k+1,m-1}^*)$.

设 G 是一个连通图, $uv \in E(G)$. 记 $G_{u,v}$ 是一个细分 G 的边 uv 后得到的图, 即先去掉 G 的边 uv , 再添加一个新点 w 和两条新边 wu, wv 后得到的图.

引理 2.4^[19] 设 G 是一个连通图, $uv \in E(G)$.

(i) 若 uv 不在 G 的任何内部路上且 $G \not\cong C_n$, 则 $\rho(G) < \rho(G_{u,v})$;

(ii) 若 uv 位于 G 的一条内部路且 $G \not\cong W_n$ (W_n 如图 2(a) 所示), 则 $\rho(G) > \rho(G_{u,v})$.

下面我们将给出图类 $\mathcal{U}_{n,g,k}$ 中谱半径最大的图. 首先定义如下的两类特殊的单圈图.

设 $U_{n,g,k}(q_1, \dots, q_k)$ 是一个在圈 C_g 的某个顶点处粘上 k 条长为 q_i 的路而得到的 n 阶单圈图 (如图 3(a) 所示), 其中 $n = g + \sum_{i=1}^k q_i$, $q_i \geq 1$, $i = 1, \dots, k$.

设 $U_{n,g,k}^*(q_0, q_1, \dots, q_k)$ 是一个在 $U_{g+q_0,g,1}(q_0)$ 的唯一的一个悬挂点处粘上 k 条长为 q_i 的路而得到的 n 阶单圈图 (如图 3(b) 所示), 其中 $n = g + \sum_{i=0}^k q_i$, $q_i \geq 1$, $i = 0, 1, \dots, k$.

图 1 (a) 推论 2.2 中的图 G ; (b) 推论 2.2 中的图 G_0

图 2 (a) 轮图 W_n ; (b) 图 G 和 G 的一条悬挂路 $v_0v_1 \cdots v_t$

图 3 (a) $U_{n,g,k}(q_1, \dots, q_k)$; (b) $U_{n,g,k}(q_0, q_1, \dots, q_k)$

记 $U_{n,g,k} = U_{n,g,k}(q_1, \dots, q_k)$ 且 $|q_i - q_j| \leq 1, 1 \leq i, j \leq k$.

引理 2.5 (i) $\rho(U_{n,g+1,k}) < \rho(U_{n,g,k})$, 其中 $g \leq n - k - 1$;

(ii) $\rho(U_{n,g,k}) < \rho(U_{n,g,k+1})$, 其中 $k \leq n - g - 1$.

证明 (i) 由引理 2.4(i), $\rho(U_{n,g+1,k}) < \rho(U_{n+1,g+1,k})$. 由引理 2.4(ii), $\rho(U_{n+1,g+1,k}) < \rho(U_{n,g,k})$. 因此 (i) 成立.

(ii) 因为 $k \leq n - g - 1$, 所以 $\sum_{i=1}^k q_i \geq k + 1$. 因此对某个 i , $q_i \geq 2$. 不妨假设 $q_1 \geq 2$. 则由推论 2.2, $\rho(U_{n,g,k}) < \rho(U_{n,g,k+1}(1, q_1 - 1, q_2, \dots, q_k))$. 若 $U_{n,g,k+1}(1, q_1 - 1, q_2, \dots, q_k) \cong U_{n,g,k+1}$, 则 (ii) 成立. 否则, 由引理 2.3, $\rho(U_{n,g,k+1}(1, q_1 - 1, q_2, \dots, q_k)) < \rho(U_{n,g,k+1})$. 因此 (ii) 成立. $\square$

定理 2.6 设 $G \in \mathcal{U}_{n,g,k}$, $1 \leq k \leq n - 3, 3 \leq g \leq n - 1$. 则 $\rho(G) \leq \rho(U_{n,g,k})$, 且等号成立当且仅当 $G \cong U_{n,g,k}$.

证明 我们仅需证明: 如果 $G \in \mathcal{U}_{n,g,k}$, 则 $\rho(G) \leq \rho(U_{n,g,k})$ 且等号成立仅当 $G \cong U_{n,g,k}$.

当 $k = 1$ 时, $G \cong U_{n,g,1}$, 结论显然成立. 下面我们假设 $k \geq 2$. 选取 G 使得 $\rho(G)$ 尽可能地大. 设 $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^t$ 是 $A(G)$ 的 Perron 向量, 其中 x_i 对应于点 v_i ($0 \leq i \leq n - 1$). G 中唯一的长为 g 的圈记为 C . 我们首先证明几个论断.

论断 1 圈 C 上存在唯一的一个顶点 v_i 满足 $d_i \geq 3$.

论断 1 的证明 假设存在两点 $v_i, v_j \in V(C)$ 满足 $d_i, d_j \geq 3$ ($i \neq j$). 记 $N_G(v_i) = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}, v_{i'}\}$, $N_G(v_j) = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_t}, v_{j'}, v_{j''}\}$, 其中 $v_{i'}, v_{i''}, v_{j'}, v_{j''} \in V(C)$ 且 $s, t \geq 1$. 若 $x_i \geq x_j$, 则令 $G^* = G - \{v_j v_{j_1}, \dots, v_j v_{j_t}\} + \{v_i v_{j_1}, \dots, v_i v_{j_t}\}$; 若 $x_i < x_j$, 则令 $G^* = G - \{v_i v_{i_1}, \dots, v_i v_{i_s}\} + \{v_j v_{i_1}, \dots, v_j v_{i_s}\}$. 注意到两种情形下, $G^* \in \mathcal{U}_{n,g,k}$. 故由引理 2.1 可知, $\rho(G^*) > \rho(G)$, 与 G 的取法矛盾. $\square$

由论断 1, 我们令 v_i 是 C 上唯一满足 $d_i \geq 3$ 的点. 记 $N_G(v_i) = \{v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, \dots, v_{i_b}\}$, 这里 $b \geq 3, v_{i_1}, v_{i_2} \in V(C)$.

论断 2 如果 $d_i = 3$, 则存在唯一的一个顶点 $v_j \in V(G) \setminus \{v_i\}$ 满足 $d_j \geq 3$.

论断 2 的证明 我们首先证明存在顶点 $v_j \in V(G) \setminus \{v_i\}$ 满足 $d_j \geq 3$. 否则, 我们得到

$$2n = \sum_{v \in V(G)} d(v) \leq k + 3 + 2(n - k - 1) = 2n - k + 1,$$

即 $k \leq 1$, 与假设矛盾.

接着, 我们假设存在两点 $v_j, v_l \in V(G) \setminus \{v_i\}$ 满足 $d_j \geq 3$ 且 $d_l \geq 3$. 记 $N_G(v_j) = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_a}\}$, $N_G(v_l) = \{v_{l_1}, \dots, v_{l_c}\}$, 其中 $a, c \geq 3$ 且 v_{j_1}, v_{l_1} 是位于 G 中最短 (v_j, v_l) -路上的两个顶点. 若 $x_l \geq x_j$, 则令 $G_1^* = G - \{v_j v_{j_2}, \dots, v_j v_{j_a}\} + \{v_l v_{j_2}, \dots, v_l v_{j_a}\}$. 注意到 $G_1^* \in \mathcal{U}_{n,g,k}$, 故由引理 2.1, $\rho(G_1^*) > \rho(G)$, 与 G 的取法矛盾. 若 $x_j > x_l$, 则令 $G_2^* = G - \{v_l v_{l_2}, \dots, v_l v_{l_c}\} + \{v_j v_{l_2}, \dots, v_j v_{l_c}\}$. 注意到 $G_2^* \in \mathcal{U}_{n,g,k}$, 同样由引理 2.1 可知, $\rho(G_2^*) > \rho(G)$, 与 G 的取法矛盾. $\square$

论断 3 $d_i \geq 4$.

论断 3 的证明 假设 $d_i = 3$. 则由论断 2, $G \cong U_{n,g,k}^*(q_0, q_1, \dots, q_k)$, 其中 $n - g = \sum_{i=0}^k q_i$, $q_i \geq 1$, $i = 0, 1, \dots, k$. 令 v_j 是 $V(G) \setminus \{v_i\}$ 中满足 $d_j \geq 3$ 的唯一顶点, 且记 $N_G(v_j) = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_h}\}$, 其中 v_{j_1} 是位于最短 (v_i, v_j) -路上的唯一顶点且 $h \geq 3$. 若 $x_j \leq x_i$, 则令 $G' = G - \{v_j v_{j_3}, \dots, v_j v_{j_h}\} + \{v_i v_{j_3}, \dots, v_i v_{j_h}\}$. 注意到 $G' \in \mathcal{U}_{n,g,k}$, 因此由引理 2.1 可知, $\rho(G') > \rho(G)$, 与 G 的取法矛盾. 从而我们假设 $x_j > x_i$. 令 $G'' = G - v_i v_{i_1} + v_j v_{i_1}$. 则由引理 2.1 可知, $\rho(G'') > \rho(G)$. 注意到 $G'' \cong U_{n,g+q_0,k}$. 因此由引理 2.5(i), 我们得到 $\rho(U_{n,g,k}) > \rho(U_{n,g+1,k}) > \dots > \rho(U_{n,g+q_0,k})$. 于是 $\rho(U_{n,g,k}) > \rho(G'') > \rho(G)$, 与 G 的取法矛盾. $\square$

论断 4 $G \cong U_{n,g,k}(q_1, \dots, q_k)$, 其中 $n - g = \sum_{i=1}^k q_i$, $q_i \geq 1$, $i = 1, \dots, k$.

论断 4 的证明 假设 $G \not\cong U_{n,g,k}(q_1, \dots, q_k)$. 则存在顶点 $v_j \in V(G) \setminus V(C)$ 满足 $d_j \geq 3$. 记 $N_G(v_j) = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_c}\}$, $c \geq 3$, 其中 v_{j_1} 是 G 中最短 (v_i, v_j) -路上的唯一顶点 (可能 $v_{j_1} = v_i$). 若 $x_i \geq x_j$, 则令 $G^* = G - \{v_j v_{j_3}, \dots, v_j v_{j_c}\} + \{v_i v_{j_3}, \dots, v_i v_{j_c}\}$; 若 $x_i < x_j$, 则令 $G^* = G - \{v_i v_{i_1}, v_i v_{i_2}\} + \{v_j v_{i_1}, v_j v_{i_2}\}$. 注意到在这两种情形下, 均有 $G^* \in \mathcal{U}_{n,g,k}$. 因此由引理 2.1, $\rho(G^*) > \rho(G)$, 与 G 的取法矛盾. $\square$

由论断 4 和引理 2.3 可知, $G \cong U_{n,g,k}$. 定理 2.6 证明完毕. $\square$

由引理 2.5 和定理 2.6, 我们得到下面的结论.

推论 2.7 (i)^[8] 设 G 是一个有 k 个悬挂点的 n 阶单圈图. 则 $\rho(G) \leq \rho(U_{n,3,k})$, 且等式成立当且仅当 $G \cong U_{n,3,k}$;

(ii)^[20,21] 设 G 是一个围长为 g 的 n 阶单圈图. 则 $\rho(G) \leq \rho(U_{n,g,n-g})$, 且等式成立当且仅当 $G \cong U_{n,g,n-g}$. $\square$

3 $\mathcal{U}_{n,g,k}$ 中的单圈图的 Laplacian 谱半径

首先给出一些在本节中需要用到的引理.

引理 3.1 设 G 是一个最大度为 Δ 的连通图. 令 $m_i = \sum_{v_j \in N_G(v_i)} d_j/d_i$, 其中 d_i 是顶点 v_i 的度. 则

(i)^[22] $\mu(G) \geq \Delta + 1$, 等式成立当且仅当 $\Delta = n - 1$;

(ii)^[23] $\mu(G) \leq \max\{d_i + d_j : v_i v_j \in E(G)\}$, 等式成立当且仅当 G 是正则二部图或半正则二部图;

(iii)^[24] $\mu(G) \leq \max\{d_i + m_i : v_i \in V(G)\}$, 等式成立当且仅当 G 是正则二部图或半正则二部图;

(iv)^[25,26] $\mu(G) \leq \max\{\frac{d_i(d_i+m_i)+d_j(d_j+m_j)}{d_i+d_j} : v_i v_j \in E(G)\}$, 等式成立当且仅当 G 是正则二部图或半正则二部图.

引理 3.2^[27] 设 u, v 是连通图 G 的两个不同顶点. 记 G^t 是一个在 G 的顶点 v 处粘上 t 条路 $vv_{i1}v_{i2} \dots v_{iq_i}$ ($i = 1, 2, \dots, t$) 后所得到的图. 令 X 是 $L(G^t)$ 的最大特征向量, 其中 x_v 对应于顶点 v , 且 $\mu(G^t) \geq 4$. 设 $G^u = G^t - \{vv_{i1}, vv_{21}, \dots, vv_{t1}\} + \{uv_{i1}, uv_{21}, \dots, uv_{t1}\}$. 如果 $|x_u| \geq |x_v|$, 则 $\mu(G^u) \geq \mu(G^t)$. 进一步, 如果 $|x_u| > |x_v|$, 则 $\mu(G^u) > \mu(G^t)$.

引理 3.3^[28] 设 G 是一个 n 阶连通图, $n \geq 2$, v 是 G 的一个顶点. 图 $G_{k,m}^*$ 的定义见引理 2.3. 如果 $m \geq k \geq 1$, 则 $\mu(G_{k-1,m+1}^*) \leq \mu(G_{k,m}^*)$, 等号成立当且仅当存在 $G_{k,m}^*$ 的对应于 $\mu(G_{k,m}^*)$ 的单位特征向量, 其对应于顶点 v 的分量为零.

引理 3.4 设 G 是一个连通图, $v_0 v_1 \dots v_t$ 是 G 的悬挂路 (如图 2(b) 所示). 令 X 是 $L(G)$ 的最大特征向量, 其中 x_i 对应于顶点 v_i . 令 $f_1(\mu) = 1 - \mu$, $f_i(\mu) = 2 - \mu - f_{i-1}^{-1}(\mu)$, 其中 $i \geq 2$.

(i) 如果 $\mu \geq 5$, 则 $f_i(\mu) < f_{i+1}(\mu) < -2$ ($1 \leq i \leq t - 1$);

(ii)^[28] $x_i = f_{t-i}(\mu)x_{i+1}$, $0 \leq i \leq t-1$.

证明 对 i 归纳证明即可. □

记 U^* 是一个在 C_3 的两个顶点处分别粘上一条悬挂边后得到的 5 阶图. 易知 $\mu(U^*) \approx 4.303$.

引理 3.5 设 $G \in \mathcal{U}_{n,3,n-3}$, 则 $\mu(G) \leq n$ 且等号成立当且仅当 $G \cong U_{n,3,n-3}$.

证明 首先注意到如果 $G \cong U_{n,3,n-3}$, 则 $\Delta(G) = n-1$, 因此由引理 3.1(i), $\mu(G) = n$.

下面我们证明: 如果 $G \in \mathcal{U}_{n,3,n-3}$, 则 $\mu(G) \leq n$ 且等号成立仅当 $G \cong U_{n,3,n-3}$. 如果 $k=1$, 则结论显然成立. 故不妨假设 $k \geq 2$. 显然 $n \geq 5$. 设 $C = v_1 v_2 v_3 v_1$ 是 G 中唯一的 3-圈. 则对任意的顶点 $v_j \in V(G) \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$, 均有 $d_j = 1$. 于是 $d_1 + d_2 + d_3 = n+3$. 不妨假设 $d_1 \geq d_2 \geq d_3$. 则 $d_1 \geq \frac{n+3}{3}$.

若 $d_1 = n-1$, 则 $G \cong U_{n,3,n-3}$, 因此结论成立.

若 $d_1 \leq n-2$, 则由引理 3.1(iii), $\mu(G) \leq \max\{d_i + m_i : v_i \in V(G)\} = d_1 + \frac{n+1}{d_1}$. 当 $n \geq 6$ 时, $d_1^2 \geq (\frac{n+3}{3})^2 > n+1$, 因此 $\mu(G) \leq n-2 + \frac{n+1}{n-2} < n$. 当 $n=5$ 时, $G \cong U^*$. 于是 $\mu(G) \approx 4.303 < 5$. 证明完毕. □

定理 3.6 假设 $G \in \mathcal{U}_{n,g,k}$, $1 \leq k \leq n-3$, $3 \leq g \leq n-1$. 则 $\mu(G) \leq \mu(U_{n,g,k})$, 且等号成立当且仅当 $G \cong U_{n,g,k}$.

证明 我们仅需证明: 若 $G \in \mathcal{U}_{n,g,k}$, 则 $\mu(G) \leq \mu(U_{n,g,k})$ 且等号成立仅当 $G \cong U_{n,g,k}$. 若 $k=1$, 则 $G \cong U_{n,g,1}$, 结论显然成立. 接下来设 $k \geq 2$. 若 $g=3$, $k=n-3$, 则由引理 3.5 可知结论成立. 故又假设 $g > 3$ 或 $g=3$ 且 $k < n-g$. 注意到在这两种情形下均有 $k < n-3$.

选取 $G \in \mathcal{U}_{n,g,k}$ 使得 $\mu(G)$ 尽可能地大. 设 X 是 $L(G)$ 的最大特征向量, 其中 x_i 对应于顶点 v_i . G 中唯一的长为 g 的圈记为 C .

论断 1 $\Delta(G) \leq k+2$. 而且, 如果存在顶点 $v_i \in V(G)$ 满足 $d_i = k+2$, 则 $v_i \in V(C)$ 且对任意的 $v_l \in V(G) \setminus \{v_i\}$, 均有 $d_l \leq 2$.

论断 1 的证明 假设存在某个顶点 $v_i \in V(G)$ 满足 $d_i > k+2$, 则 $2n = \sum_{v \in V(G)} d(v) > k+2 + k+2(n-k-1) = 2n$, 矛盾. 因此 $\Delta(G) \leq k+2$.

假设 $v_i \in V(G)$ 满足 $d_i = k+2$ 且 $v_i \notin V(C)$, 则由图 G 的连通性可知, 存在顶点 $v_l \in V(C)$ 使得 $d_l \geq 3$. 因此 $2n = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq k+2 + k+3 + 2(n-k-2) = 2n+1$, 矛盾. 故 $v_i \in V(C)$.

假设存在某个顶点 $v_l \in V(G) \setminus \{v_i\}$ 满足 $d_l > 2$, 则 $2n = \sum_{v \in V(G)} d(v) > k+2 + k+2 + 2(n-k-2) = 2n$, 矛盾. □

论断 2 G 中存在两个顶点 v_i, v_j 满足 $v_i v_j \in E(G)$, $d_i + d_j = k+4$, $v_i \in V(C)$ 且对任意的 $v_l \in V(G) \setminus \{v_i, v_j\}$, 均有 $d_l \leq 2$.

论断 2 的证明 因为 $k < n-3$, 所以 $\Delta(U_{n,g,k}) = k+2 < n-1$. 因此, 由引理 3.1(i) 可得, $\mu(U_{n,g,k}) > k+3$. 又由 G 的选取可知, $\mu(G) \geq \mu(U_{n,g,k}) > k+3$. 于是由引理 3.1(ii) 可得, $\max\{d_i + d_j : v_i v_j \in E(G)\} \geq \mu(G) > k+3$. 从而 G 中存在一条边 $v_i v_j \in E(G)$ 满足 $d_i + d_j \geq k+4$. 如果 $d_i + d_j > k+4$, 则 $2n = \sum_{v \in V(G)} d(v) > k+4 + k+2(n-k-2) = 2n$, 矛盾. 因此, G 中存在一条边 $v_i v_j \in E(G)$ 满足 $d_i + d_j = k+4$.

假若 $v_i, v_j \notin V(C)$. 则由图 G 的连通性可知, 存在顶点 $v_l \in V(C)$ 满足 $d_l \geq 3$. 于是我们得到 $2n = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq k+4 + 3 + k+2(n-k-3) = 2n+1$, 矛盾. 因此 $\{v_i, v_j\} \cap V(C) \neq \emptyset$. 不妨设 $v_i \in V(C)$.

假若存在某个顶点 $v_l \in V(G) \setminus \{v_i, v_j\}$ 满足 $d_l > 2$, 则 $2n = \sum_{v \in V(G)} d(v) > 2 + k+4 + k+2(n-k-3) = 2n$, 矛盾. □

论断 3 圈 C 中有且只有一个顶点 v_i 满足 $d_i \geq 3$.

论断 3 的证明 假设存在两个顶点 $v_i, v_j \in V(C)$ 满足 $d_i, d_j \geq 3$. 由论断 2, $v_i v_j \in E(G)$, $d_i + d_j = k + 4$ 且对于任意的 $v_l \in V(G) \setminus \{v_i, v_j\}$, 均有 $d_l \leq 2$. 不失一般性, 假设 $d_i \leq d_j$. 则 $d_i \leq \frac{k+4}{2}$, 进而由 $d_i \geq 3$ 可得 $d_i d_j = d_i(k+4-d_i) \geq 3(k+1)$. 如果 $k \geq 3$, 则由引理 3.1(iii), 我们得到

$$\begin{aligned} \mu(G) &\leq \frac{d_i^2 + d_j + 2d_i - 2 + d_j^2 + d_i + 2d_j - 2}{d_i + d_j} \\ &= \frac{k^2 + 11k + 24 - 2d_i d_j}{k + 4} \leq \frac{k^2 + 5k + 18}{k + 4} \leq k + 3 < \mu(U_{n,g,k}), \end{aligned}$$

与 G 的取法矛盾. 因此下面我们假设 $k = 2$. 注意到 $\mu(G) \geq 5$.

设 $v_i v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_q}$ 是粘在 v_i 处的一条悬挂路, $v_j v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_h}$ 是粘在 v_j 处的一条悬挂路. 如果 $|x_j| > |x_i|$, 则令 $G' = G - v_i v_{i_1} + v_j v_{i_1}$; 如果 $|x_j| < |x_i|$, 则令 $G' = G - v_j v_{j_1} + v_i v_{j_1}$. 注意到这两种情形下, 均有 $G' \in \mathcal{U}(n, g, k)$. 于是由引理 3.2 可知, $\mu(G') > \mu(G)$, 与 G 的取法矛盾. 因此我们假设 $|x_j| = |x_i|$. 设 $G' = G - v_i v_{i_1} + v_j v_{i_1}$. 令

$$(X')_l = \begin{cases} -x_l, & \text{若 } l = i_1, \\ x_l, & \text{否则.} \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} 0 &\geq \mu(G') - \mu(G) \geq X^t [L(G') - L(G)] X = (x_j - x_{i_1})^2 - (x_i - x_{i_1})^2 = 2x_{i_1}(x_i - x_j), \\ 0 &\geq \mu(G') - \mu(G) \geq X'^t L(G') X' - X^t L(G) X = (x_j + x_{i_1})^2 - (x_i - x_{i_1})^2 = 2x_{i_1}(x_i + x_j). \end{aligned}$$

如果 $x_{i_1}(x_i - x_j) < 0$ 且 $x_{i_1}(x_i + x_j) < 0$, 则 $x_{i_1} x_i < x_{i_1} x_j < -x_{i_1} x_i$. 于是 $|x_{i_1}| \cdot |x_j| < |x_{i_1}| \cdot |x_i|$, 即 $|x_j| < |x_i|$, 矛盾. 因此假设 $x_{i_1}(x_i - x_j) = 0$ 或者 $x_{i_1}(x_i + x_j) = 0$. 如果 $x_{i_1}(x_i - x_j) = 0$, 则 $\mu(G') = \mu(G)$ 且 X 是 $L(G')$ 的一个最大的特征向量, 于是

$$0 = [\mu(G') - \mu(G)] x_i = [L(G') X]_i - [L(G) X]_i = x_{i_1} - x_i.$$

如果 $x_{i_1}(x_i + x_j) = 0$, 则 $\mu(G') = \mu(G)$ 且 X' 是 $L(G')$ 的一个最大的特征向量, 于是

$$0 = [\mu(G') - \mu(G)] x_i = [L(G') X']_i - [L(G) X]_i = x_{i_1} - x_i.$$

因此在这两种情形下, 都有 $x_i = x_{i_1}$. 由引理 3.4(ii) 可知, $x_i = f_q(\mu) x_{i_1}$. 故由 $f_q(\mu) \neq 1$ 可得, $x_{i_1} = x_i = 0$. 类似的, 我们得到 $x_{i_2} = \cdots = x_{i_q} = 0$. 因为 $|x_j| = |x_i|$, 所以 $x_j = x_i = 0$. 重复应用引理 3.4, 可得 $x_{j_1} = x_{j_2} = \cdots = x_{j_h} = 0$. 进一步, 对于任意的顶点 $v_l \in V(C) \setminus \{v_i, v_j\}$, 均有 $x_l = 0$. 否则, 我们令 $G^* = G - v_i v_{i_1} + v_l v_{i_1}$, 这里 $v_l \in V(C) \setminus \{v_i, v_j\}$ 且 $|x_l| > 0$. 注意到 $G^* \in \mathcal{U}(n, g, k)$ 且 $|x_l| > 0 = |x_i|$, 因此由引理 3.2, $\mu(G^*) > \mu(G)$, 与 G 的取法矛盾. 于是 $X = 0$, 矛盾. $\square$

论断 4 G 中存在唯一的一个顶点 v 满足 $d_G(v) \geq 3$.

论断 4 的证明 假设 G 中存在两个顶点 v_i, v_j 满足 $d_i, d_j \geq 3$. 由论断 3, 我们不妨假设 $v_i \in V(C)$, $v_j \in V(G) \setminus V(C)$. 由论断 2 可知, $v_i v_j \in E(G)$, $d_i + d_j = k + 4$, 并且对于任意顶点 $v_l \in V(G) \setminus \{v_i, v_j\}$ 均有 $d_l \leq 2$. 注意到 $\min\{d_i, d_j\} \leq \frac{k+4}{2}$, 故由 $d_i, d_j \geq 3$ 可得, $d_i d_j = d_i(k+4-d_i) = d_j(k+4-d_j) \geq 3(k+1)$. 如果 $k \geq 3$, 则由引理 3.1(iii), 我们得到

$$\mu(G) \leq \frac{d_i^2 + d_j + 2d_i - 2 + d_j^2 + d_i + 2d_j - 2}{d_i + d_j} = \frac{k^2 + 11k + 24 - 2d_i d_j}{k + 4}$$

$$\leq \frac{k^2 + 5k + 18}{k + 4} \leq k + 3 < \mu(U_{n,g,k}),$$

与 G 的取法矛盾. 因此接下来我们假设 $k = 2$. 注意到 $\mu(G) \geq 5$.

设 $v_j v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_{q_1}}, v_j v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_{q_2}}$ 是 G 的粘在顶点 v_j 处的两条悬挂路. 设 X 是 $L(G)$ 的最大特征向量, 其中 x_i 对应于顶点 v_i . 则由 $L(G)X = \mu(G)X$, 得到 $(3 - \mu)x_j = x_i + x_{i_1} + x_{j_1}$. 应用引理 3.4(ii), $x_j = f_{q_1}(\mu)x_{i_1} = f_{q_2}(\mu)x_{j_1}$. 于是由引理 3.4(i),

$$|x_i| = |x_j| \cdot |3 - \mu - f_{q_1}^{-1}(\mu) - f_{q_2}^{-1}(\mu)| > |x_j| \cdot \left(-3 + \mu - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = |x_j| \cdot (\mu - 4) \geq |x_j|.$$

设 $G' = G - v_j v_{j_1} + v_i v_{j_1}$. 则 $G' \in \mathcal{U}(n, g, k)$. 由引理 3.2 可得, $\mu(G') > \mu(G)$, 与 G 的取法矛盾. $\square$

由论断 4 可得, $G \cong U_{n,g,k}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_k)$, 其中 $\sum_{i=1}^k q_i = n - g$. 设 $v_i \in V(C)$ 是满足 $d_i \geq 3$ 的唯一的顶点, 并且 $v_i v_{l_1} v_{l_2} \cdots v_{l_{q_i}}$ ($1 \leq l \leq k$) 是连接 v_i 的 k 条悬挂路.

论断 5 $x_i \neq 0$.

论断 5 的证明 假设 $x_i = 0$. 由引理 3.4 可得, $x_{l_1} = x_{l_2} = \cdots = x_{l_{q_i}} = 0$ ($1 \leq l \leq k$). 如果存在某个顶点 $v_j \in V(C)$ 满足 $x_j \neq 0$, 则令 $G' = G - \{v_i v_{l_1}, \dots, v_i v_{l_{q_i}}\} + \{v_j v_{l_1}, \dots, v_j v_{l_{q_i}}\}$. 则 $G' \in \mathcal{U}(n, g, k)$. 注意到 $|x_j| > |x_i| = 0$, 因此由引理 3.2 可知, $\mu(G') > \mu(G)$, 与 G 的取法矛盾. 于是对于任意顶点 $v_j \in V(C)$, 均有 $x_j = 0$. 从而 $X = 0$, 矛盾. $\square$

如果 $q_1 \geq q_2 + 2$, 则记 $G^* = U_{n,g,k}(q_1 - 1, q_2 + 1, q_3, \dots, q_k)$. 于是 $G^* \in \mathcal{U}(n, g, k)$. 注意到 $G \cong U_{n,g,k}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_k)$, 故由引理 3.3 和论断 5 可知, $\mu(G^*) > \mu(G)$, 与 G 的取法矛盾. 因此 $G \cong U_{n,g,k}$. 定理 3.6 证明完毕. $\square$

注记 $k + 3 < \mu(U_{n,g,k}) < k + 3 + \frac{4}{k+4}$, 其中 $g > 3$ 或者 $g = 3$ 且 $k < n - g$.

证明 由引理 3.1 的 (i) 和 (iv), 结论显然成立. $\square$

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵意见和建议!

参考文献

- 1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. London: Macmillan, 1976
- 2 Cvetković D, Doob M, Sachs H. Spectra of Graphs. New York: Academic Press, 1980
- 3 Bruadli R A, Solheid E S. On the spectral radius of complementary acyclic matrices of zeros and ones. SIAM J Algebra Discrete Methods, 1986, 7: 265–272
- 4 Berman A, Zhang X D. On the spectral radius of graphs with cut vertices. J Combin Theory Ser B, 2001, 83: 233–240
- 5 Chang A, Tian F. On the spectral radius of unicyclic graphs with perfect matchings. Linear Algebra Appl, 2004, 370: 237–250
- 6 Chang A, Tian F. On the index of bicyclic graphs with perfect matchings. Discrete Math, 2004, 283: 51–59
- 7 Guo J M, Shao J Y. On the spectral radius of trees with fixed diameter. Linear Algebra Appl, 2006, 413: 131–147
- 8 Guo S G. The spectral radius of unicyclic and bicyclic graphs with n vertices and k pendant vertices. Linear Algebra Appl, 2005, 408: 78–85
- 9 Liu H Q, Lu M, Tian F. On the spectral radius of graphs with cut edges. Linear Algebra Appl, 2004, 389: 139–145
- 10 Liu H Q, Lu M, Tian F. On the spectral radius of unicyclic graphs with fixed diameter. Linear Algebra Appl, 2007, 420: 449–457
- 11 Simić S K. On the largest eigenvalue of bicyclic graphs. Publ Inst Math (Beograd), 1989, 46: 1–6
- 12 Wu B F, Xiao E L, Hong Y. The spectral radius of trees on k pendant vertices. Linear Algebra Appl, 2005, 395: 343–349
- 13 Yu A M, Tian F. On the spectral radius of unicyclic graphs. MATCH Commun Comput Chem, 2004, 51: 97–105
- 14 Guo J M. The Laplacian spectral radii of unicyclic and bicyclic graphs with n vertices and k pendant vertices. Sci China Math, 2010, 53: 2135–2142, doi: 10.1007/s11425-010-3132-6

- 15 Zhai M Q, Shu J L, Lu Z H, Maximizing the Laplacian spectral radii of graphs with given diameter. *Linear Algebra Appl*, 2009, 430: 1897–1905
- 16 Zhang X L, Zhang H P. The Laplacian spectral radius of some bipartite graphs. *Linear Algebra Appl*, 2008, 428: 1610–1619
- 17 Cvetković D, Rowlinson P. The largest eigenvalue of a graph: a survey. *Linear Multilinear Algebra*, 1990, 28: 3–33
- 18 Li Q, Feng K. On the largest eigenvalues of graphs (in Chinese). *Acta Math Appl Sin*, 1979, 2: 167–175
- 19 Hoffman A J, Smith J H. On the spectral radii of topologically equivalent graphs. In: Fiedler M, ed. *Recent Advances in Graph Theory*. New Tork: Academia Praha, 1975, 273–281
- 20 Hong Y. On the spectra of unicyclic graphs (in Chinese). *J East China Normal Univ*, 1986, 1: 31–34
- 21 Guo S G. First six unicyclic graphs of order n with larger spectral radius. *Appl Math J Chinese Univ Ser A*, 2003, 18: 480–486
- 22 Grone R, Merris R, Sunder V S. The Laplacian spectrum of a graph II. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 1990, 11: 218–238
- 23 Anderson W N, Morley T D. Eigenvalues of the Laplacian of a graph. *Linear Multilinear Algebra*, 1985, 18: 141–145
- 24 Merris R. A note on the Laplacian graph eigenvalues. *Linear Algebra Appl*, 1998, 285: 33–35
- 25 Li J S, Zhang X D. On Laplacian eigenvalues of a graph. *Linear Algebra Appl*, 1998, 285: 305–307
- 26 Pan Y L. Sharp upper bounds for the Laplacian graph eigenvalues. *Linear Algebra Appl*, 2002, 355: 287–295
- 27 Guo J M. The Laplacian spectral radius of a graph under perturbation. *Comput Math Appl*, 2007, 54: 709–720
- 28 Guo J M. The effect on the Laplacian spectral radius of a graph by adding or grafting edges. *Linear Algebra Appl*, 2006, 413: 59–71

On the (Laplacian) spectral radius of unicyclic graphs with girth g and k pendant vertices

LIU HuiQing, LU Mei & ZHANG ShunZhe

Abstract The spectral radius of a graph is the largest eigenvalue of adjacency matrix of the graph and its Laplacian spectral radius is the largest eigenvalue of the Laplacian matrix which is the difference of the diagonal matrix of vertex degrees and the adjacency matrix. In this paper, we determine the unicyclic graph with the maximal spectral radius and the maximal Laplacian spectral radius among all unicyclic graphs of order n and girth g with k pendant vertices, respectively.

Keywords: spectral radius, Laplacian spectral radius, unicyclic graph, girth, pendant vertex

MSC(2000): 05C35, 05C50