关于诱导子树与图的色数的一个注记

张莹丽, 许宝刚*

南京师范大学数学科学学院, 南京 210023

E-mail: zhangyingli198804@163.com, baogxu@njnu.edu.cn

收稿日期: 2015-08-11; 接受日期: 2016-09-12; 网络出版日期: 2016-11-02; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11331003 和 11571180) 资助项目

摘要 Gyárfás (1975) 和 Sumner (1981) 分别独立地提出了以下猜想: 对于任意的树 T , 存在一个函数 $f_T(x)$ 使得每一个色数大于 $f_T(\omega(G))$ 的图均包含 T 作为诱导子图, 其中 $\omega(G)$ 表示图 G 的团数. Gyárfás 等 (1980) 证明了, 若一个图 G 不含三角形和长为 4 的圈, 则 G 含有任一个 $\chi(G)$ 个顶点的树作为诱导子图. 另外, 他们还证明了, 若 G 不含三角形, 且 $\chi(G) \geq m+n$, 则 G 一定包含一个特殊的树 (m, n) -mop 作为诱导子图. 本文推广了 Gyárfás 等 (1980) 的这两个结果, 证明了 (1) 若图 G 的任一顶点至多含在 k 个三角形和 l 个长为 4 的圈中, 且 $\chi(G) \geq t+2k+2l$, 则 G 包含任一 t 个顶点的树作为诱导子图; (2) 若图 G 中的每一个顶点至多包含在 k 个三角形中, 且不能够诱导出 T , 则 $\chi(G) < m(k+1)+n$, 其中 T 为 (m, n) -mop.

关键词 色数 诱导子树 三角形

MSC (2010) 主题分类 05C15, 05C75

1 引言

图 G 的 k -着色 c 指的是, 从 G 的顶点集 $V(G)$ 到正整数集合 $\{1, 2, \dots, k\}$ 的一个映射使得对于 G 中任意一条边 uv 均有 $c(u) \neq c(v)$. 图 G 的色数 $\chi(G)$ 是使得 G 有一个 k -着色的最小的正整数 k . 图 G 的团数 $\omega(G)$ 是 G 所含的最大的完全子图的大小. 显然, $\chi(G) \geq \omega(G)$, 并且 $\chi(G) - \omega(G)$ 可以任意大, 因为存在不含三角形但色数可以任意大的图 (参见文献 [1]). 事实上, Erdős [2] 证明了, 对于任意给定的两个正整数 k 和 l , 存在一个色数大于 k 且围长大于 l 的图.

给定图 G 和 H , 若 $V(H) \subseteq V(G)$, 且 $E(H) = \{uv \mid u, v \in V(H) \text{ 且 } uv \in E(G)\}$, 则称 H 为 G 的一个诱导子图. 如果一个图 G 的任意诱导子图 $H \subseteq G$ 都满足 $\chi(H) = \omega(H)$, 那么就称它是一个完美图. 强完美图定理 [3] 证明了, 如果 G 不包含长度至少为 5 的奇圈及其补图作为诱导子图, 那么对于 G 的任意子图 H 均有 $\chi(H) = \omega(H)$. 一个图 G 的线图 $L(G)$ 是将图 G 中的边看成顶点, 两个顶点相邻的充要条件是这两个顶点对应的边在 G 中相邻 (有公共顶点). Vizing 定理 [4] 说明了, 对于每一个线图 G , 均有 $\chi(G) \leq \omega(G) + 1$. 注意到, Beineke 定理 [5] 给出了一个图是线图当且仅当这个图不包含 9 个 Beineke 图中的任何一个作为诱导子图. 结合 Vizing 定理和 Beineke 定理, 如果一个图不含 Beineke

英文引用格式: Zhang Y L, Xu B G. A note on induced subtrees and chromatic number of graphs (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 667–672, doi: 10.1360/N012015-00261

图中的任何一个作为诱导子图, 则 $\chi(G) \leq \omega(G) + 1$. 这些结果意味着, 通过禁用某些子图, 图的色数可以被一个关于图的团数的函数所界定. 令 $\mathcal{G}$ 表示一类图集. 如果存在一个函数 f 使得, 对于任意的 $G \in \mathcal{G}$, 均有 $\chi(G) \leq f(\omega(G))$, 那么称 $\mathcal{G}$ 是 χ -有界的, 且称 f 是 $\mathcal{G}$ 的一个界定 (binding) 函数. 这个概念是 1987 年由 Gyárfás [6] 提出的. 前面的论述表明了, 完美图类是 χ -有界的且以 $f(x) = x$ 为界定函数, 所有线图也是 χ -有界的且以 $f(x) = x + 1$ 为界定函数.

令 $\mathcal{F}$ 表示一个有限的图集. 我们用 $\mathcal{F}$ -free 图表示不包含 $\mathcal{F}$ 中的任何一个图作为诱导子图的图类. Erdős 定理 [2] 说明了, 如果 $\mathcal{F}$ -free 图是 χ -有界的, 那么 $\mathcal{F}$ 一定包含一个树.

Gyárfás [7] 和 Sumner [8] 分别给出了下面这个猜想.

猜想 1 对于任意的树 T , 均存在一个函数 $f_T(x)$ 使得, 对于任意满足 $\chi(G) > f_T(\omega(G))$ 的图 G , 均有 G 包含 T 作为诱导子图.

为了方便起见, 如果 G 包含 H 作为诱导子图, 那么称 G 诱导出 H , 否则称 G 不诱导 H . 我们用 $R(m, n)$ 表示 Ramsey 数, 即一个最小的正整数 k 使得对于每一个阶为 k 的图, 或者包含一个大小为 m 的独立集, 或者包含一个大小为 n 的团. 在 1987 年, Gyárfás [6] 证明了, 对于每一个正整数 l , 如果 $\chi(G) \geq R(l, \omega(G))$, 那么 G 诱导出 $K_{1,l}$. 这就说明了猜想 1 对于半径为 1 的树是成立的. 文献 [9] 引用了 Hajnal 和 Rödl 分别证明的结论: 对于每一个树 T , 存在一个函数 $f_T(k)$ 使得, 如果图 G 满足 $\chi(G) \geq f_T(k)$, 则 G 诱导出 K_k 或者 $K_{k,k}$ 或者 T . 根据这些结果, Gyárfás 等 [10] 证明了猜想 1 在不包含三角形的图类上对于半径为 2 的树是成立的. 之后, Kierstead 和 Penrice [9] 延展了 Gyárfás 等的证明技巧, 证明了猜想 1 对于半径为 2 的树是成立的. 目前为止, 对于半径为 3 的树的结果很少. Kierstead 和 Zhu [11] 证明了, 对于半径为 3 的树 T , 如果这个树是由一个半径为 2 的树通过对其与根相邻的边恰剖分一次得到的, 那么存在一个函数 $f_T(x)$, 对于任何满足 $\chi(G) \geq f_T(\omega(G))$ 的图 G , 均有 G 诱导出 T . 从拓扑学的角度, Scott [12] 证明了, 对于任意的树 T 和正整数 k , 存在整数 $g_T(k)$ 和 d_T , 使得每一个满足 $\chi(G) \geq g_T(k)$ 的图 G 均能够诱导出 K_k 或者 T 的一个剖分 (其中每条边至多剖分 d_T 次). Chudnovsky 等 [13] 证明了 χ -有界的性质关于图的三种运算 (包括图的复合、通过团的粘合、以及通过有限个点的粘合) 是封闭的. 有兴趣的读者可参见文献 [14] 以了解更多与 χ -有界的问题相关的结果. 另外, 读者也可参见文献 [15–20] 了解更多关于曲面、图、以及染色的问题、方法与结果.

Gyárfás 等 [10] 在不含三角形的图类上, 证明了如下两个结论.

定理 1 设 t 为非负整数. 如果 G 中不包含三角形和四边形, 且 $\chi(G) \geq t$, 那么 G 包含任意一个含有 t 个顶点的树作为诱导子图.

我们用 (m, n) -mop 来表示一个特殊的树 (我们称之为单杆星图), 它是将一个恰含 m 个顶点的路的一个端点与一个恰含 $n + 1$ 个顶点的星图的中心粘合到一起而得到的. 我们称路上另外一个没有粘合的端点为这个单杆星图 (mop) 的顶端. 对于树 (m, n) -mop, Gyárfás 等 [10] 证明了下面的定理.

定理 2 如果图 G 不包含三角形, 并且不能够诱导出 T , 那么 $\chi(G) < m + n$, 其中 T 为 (m, n) -mop. 本文利用 Gyárfás 等的类似讨论方法对上述两个定理作了如下的推广.

定理 3 设 k, l 和 t 都为非负整数. 如果 G 中的每一个顶点至多包含在 k 个三角形和 l 个四边形中, 并且 $\chi(G) \geq t + 2k + 2l$, 那么 G 包含任意一个含有 t 个顶点的树作为诱导子图.

定理 4 如果图 G 中的每一个顶点至多包含在 k 个三角形中, 并且不能够诱导出 T , 那么 $\chi(G) < m(k + 1) + n$, 其中 T 为 (m, n) -mop.

我们的证明中还要用到染色临界图的一个性质. 设一个图 G 的色数为 k , 且对 G 的任一个顶点 x 都有 $\chi(G - x) < k$, 则称 G 为一个染色 k -临界图. 根据临界子图的定义, 一个图 G 的 $\chi(G)$ -临界子图一定是原图 G 的诱导子图, 因而, 任意 $\chi(G)$ -临界子图的诱导子图也是原图的诱导子图. 所以, 在

证明过程中通常是在其临界子图中寻找所需的诱导子图结构.

定理 5 ^[21] 任一个图 G 都有一个染色 $\chi(G)$ - 临界子图, 设为 H , 满足 $\delta(H) \geq \chi(G) - 1$.

我们在下一节中证明定理 3 和 4.

2 定理证明

定理 3 的证明 类似于 Gyárfás 等 ^[10] 的证明方法, 我们证明定理的一个更强的形式: 令 G 表示每个顶点至多包含在 k 个三角形和 l 个四边形的图, 如果对于任意的 $x \in V(G)$, 均有 $d(x) \geq t + 2k + 2l - 1$, 那么 G 包含任意一个恰含 t 个顶点的树作为诱导子图.

如果上述强化形式成立. 当 G 的每个顶点至多包含在 k 个三角形和 l 个四边形中且 $\chi(G) \geq t + 2k + 2l$ 时, 根据定理 5, G 有一个 $\chi(G)$ - 临界子图 H , 且 $\delta(H) \geq \chi(G) - 1 \geq t + 2k + 2l - 1$, 则 H 中含任一个 t 个点的树为诱导子图, 所以定理 3 成立.

为证明上述结论, 对于固定的 k 和 l , 我们对 t 作归纳. 因为每一个非空图均包含一条边, $t = 2$ 的情形是显然的.

现假设 $t \geq 3$, 且假设该结论对于至多有 $t - 1$ 个顶点的树是成立的, 我们证明它对于 t 个顶点的树依然成立. 令 T 表示恰含 t 个顶点的树, x 表示 T 的一个叶点. 因为 G 中每一个顶点至多包含 k 个三角形和 l 个四边形, 且对于任意的 $v \in V(G)$ 均有 $d(v) \geq t + 2k + 2l - 1 > (t - 1) + 2k + 2l - 1$, 所以, G 包含一个同构于 $T - x$ 的诱导子图 T' . 令 z 表示 T' 中对应于 T 中 x 的邻点的顶点 (因为 x 是叶点, 所以它有唯一的一个邻点). 我们将 $N_G(z)$ 分成 4 个部分:

$$Z_1 := N_G(z) \cap T',$$

$$Z_2 := \{w : w \in N_G(z) \text{ 并且 } N_G(w) \cap N_G(z) \neq \emptyset\},$$

$$Z_3 := \{w : w \in N_G(z) \text{ 并且对于其他的某个 } w' \in N_G(z), |N_G(w) \cap N_G(w') \cap V(T')| > 1\},$$

$$Z_4 := N_G(z) \setminus (Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3).$$

因为 $G[N_G(z)]$ 中的所有非孤立点都在 Z_2 中, 所以, Z_1 与 Z_4 之间没有边.

令 w 和 w' 为 Z_4 中两个不同的顶点. 如果 $N_G(w) \cap N_G(w')$ 在 T' 中有两个顶点, 那么 w 和 w' 将均在 Z_3 中, 所以,

$$Z_4 \text{ 中任意两个不同的顶点在 } V(T') - \{z\} \text{ 中没有公共的邻点.}$$

注意到 $G[Z_2]$ 中每条边与 z 一起形成一个包含 z 的三角形, 并且 z 至多包含在 k 个三角形中, 所以, 在 $N_G(z)$ 中至多有 k 对相邻的顶点使得这对邻点与点 z 构成三角形. 所以,

$$|Z_2| \leq 2k. \quad (2.1)$$

因为两个不同的顶点与其两个公共的邻点可以构成一个四边形, 且因为点 z 至多包含在 l 个四边形中, 所以, 在 $N_G(z)$ 中至多有 l 对点使得每一对点集在 T' 上至少有两个相同的邻点, 即

$$|Z_3| \leq 2l. \quad (2.2)$$

因为 $d(z) \leq |Z_1| + |Z_2| + |Z_3| + |Z_4|$, $d(z) \geq t + 2k + 2l - 1$, 所以, $|Z_4| \geq t - 1 - |Z_1| > t - 2 - |Z_1|$ ((2.1) 和 (2.2)). 我们已知 G 中没有位于 Z_1 与 Z_4 之间的边, 并且在 Z_4 中任意两个不同的顶点在 $V(T') - \{z\}$

中无公共的邻点. 如果 Z_4 中的每一个顶点在 T' 上至少有两个邻点, 那么 $t-2-|Z_1| = |V(T')|-1-|Z_1| \geq \sum_{w \in Z_4} (|N_G(w) \cap V(T')| - 1) \geq |Z_4|$, 矛盾. 所以, 在 Z_4 中一定存在一个顶点, 不妨设其为 z' , 在 T' 中只有唯一的邻点 z . 现在, 由 $T' \cup \{z'\}$ 得到的诱导子图与 T 是同构的, 结论得证. $\square$

下面我们证明定理 4, 其证明依旧沿用 Gyárfás 等^[10] 证明定理 2 的方法, 即先在 G 中找一条诱导路 $P = u_1 u_2 \cdots u_h$, 并依次去掉路 P 上顶点的邻点, 然后在剩下的图 H 中找出一个星图与 P 一起形成导出的 (m, n) -mop. 我们的证明修正了 Gyárfás 等^[10] 证明中的一个微小瑕疵. Gyárfás 等^[10] 在其证明中断言去掉路 $u_1 u_2 \cdots u_h$ 及其邻点后剩余的图 H 中存在一个以 u_h 为中心的星图. 这个结论一般而言是不成立的 (找出保证这一断言成立的充分条件或许正是猜想 1 最困难的地方). 正确的选择应该是在 H 中存在一个星图和从其中心顶点到 u_h 的一条诱导路 (从而 u_h 与该星图的其他顶点不相邻), 这一个构形与 P 一起包含一个诱导的 (m, n) -mop.

定理 4 的证明 对于固定的 k , 我们也是通过对 m 作归纳法证明一个更强的结论. 如果 G 中的每一个顶点至多包含在 k 个三角形中, $\chi(G) \geq m(k+1) + n$, $u \in V(G)$, 对于任意的 $x \in V(G) - \{u\}$, 有 $d(x) \geq m(k+1) + n - 1$, 并且 $d(u) \geq 1$, 那么 G 能够诱导出一个以 u 为顶端的 (m', n) -mop, 其中 m' 为不小于 m 的整数. 事实上, 若 $\chi(G) \geq m(k+1) + n$, 根据定理 5, G 有一个 $\chi(G)$ - 临界子图 H , 且 $\delta(H) \geq \chi(G) - 1 \geq m(k+1) + n - 1 \geq 1$. 故定理 4 成立.

首先, 考虑 $m = 2$ 的情形. G 中的每一个顶点至多包含在 k 个三角形中, $\chi(G) \geq 2(k+1) + n$, $u \in V(G)$, 对于任意的 $x \in V(G) - \{u\}$, 有 $d(x) \geq 2(k+1) + n - 1 = n + 1 + 2k$, 并且 $d(u) \geq 1$. 令 $v \in N_G(u)$, 因为 $d(v) \geq n + 1 + 2k$, 并且 v 至多包含在 k 个三角形中, 所以, $N_G(v)$ 中至多有 k 对点集使得每一对点集是相邻的并且与点 v 构成三角形. 令 $I \subseteq N_G(v) \setminus N_G(u)$ 表示在 $G[N_G(v)]$ 中最大的独立集, 则 $|I| \geq d(v) - 2k \geq n + 1$. 由 $I \cup \{v\}$ 诱导出来的子图包含了一个以 u 为顶端的 $(2, n)$ -mop.

假设结论对于小于 m 的整数是成立的. 我们定义下面的集合. 令

$$X := V(G) - \{u\} - N_G(u), \quad A := \{x_1, x_2, \dots, x_t\} \subseteq X,$$

使得对于任意的 $1 \leq i \leq t$, x_i 与 $X - \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ 中的至多 $(m-1)(k+1) + n - 2$ 个顶点相邻, 并且取 t 是满足这个性质的最大的数.

令 $B = X - A$. 下面我们将证明 $\chi(G_B) \geq (m-1)(k+1) + n = m(k+1) + n - (k+1)$. 假设这个结论不成立, 令 c 表示 G_B 的一个 $((m-1)(k+1) + n - 1)$ - 着色. 在此着色的基础上, 我们用这 $(m-1)(k+1) + n - 1$ 种颜色从 x_t 到 x_1 为 A 中顶点着色. 因为 x_t 至多与 B 中的 $(m-1)(k+1) + n - 2$ 个顶点相邻, 所以至少有一种颜色可以着 x_t . 那么, 我们考虑 x_{t-1} , x_{t-1} 至多与 $B \cup \{x_t\}$ 中的 $(m-1)(k+1) + n - 2$ 个顶点相邻, 所以至少有一种颜色可以着 x_{t-1} . 我们用这种着色方式着其余的顶点, 最后得到了 G_X 的一个 $((m-1)(k+1) + n - 1)$ - 着色.

因为 u 至多包含在 k 个三角形中, 所以 $\Delta(G[N_G(u)]) \leq k$. 由 Brooks 定理^[22], $\chi(G[N_G(u)]) \leq k+1$.

因为在 X 与 $\{u\}$ 之间没有边, 我们可以得到 $G_{X \cup \{u\}}$ 的一个 $((m-1)(k+1) + n - 1)$ - 着色, 加上 $G[N_G(u)]$ 的一个 $(k+1)$ - 着色, 我们可以得到 G 的一个 $(m(k+1) + n - 1)$ - 着色, 但这与 $\chi(G) \geq m(k+1) + n$ 矛盾. 所以, $\chi(G_B) \geq (m-1)(k+1) + n = m(k+1) + n - (k+1)$.

显然, 由 B 的定义, 我们可以得到, 对于 B 中的任意点 x , 有 $d_{G_B}(x) \geq (m-1)(k+1) + n - 1$.

现在考虑这两个顶点子集 $\{u\}$ 和 B . 不妨假设由 B 诱导出的子图是连通的, 若否, 我们可以选择 G_B 的某个色数至少为 $(m-1)(k+1) + n$ 的一个连通分支. 因为 G 是连通的, 并且 B 是有限的, 我们可以找到一条 $\{u\}$ 到 B 的最短路 $P = \{u, v_1, v_2, \dots, v_s\}$, 使得 $s \geq 2$, $v_1 \in N_G(u)$, 并且 $v_s \in B$. 考虑由 $\{v_{s-1}\} \cup B$ 诱导出的子图, 显然, $G_{B \cup \{v_{s-1}\}}$ 中的每一个顶点至多包含在 k 个三角形中, 对于每一个 B

中的点 x , 有 $d_{G_B}(x) \geq (m-1)(k+1) + n-1$, 并且 $d(v_{s-1}) \geq 1$, 由归纳假设, 可以得到一个以 v_{s-1} 为顶端的 $(m'-1, n)$ -mop, 其中 $m' \geq m$. 基于这个 $(m'-1, n)$ -mop, 我们考虑由 $V(P) \cup B$ 诱导出的子图, 由最短路的定义, $V(P)$ 得到的诱导子图一定是一条路, 所以, 我们得到了一条以顶端在 P 上的一个 $(m' + |V(P)| - 3, n)$ -mop, 其中 $m' \geq m$. $\square$

3 结论与讨论

Gyárfás^[7] 和 Sumner^[8] 独立地提出了猜想 1. 根据 Ramsey 理论, 这个猜想对星 $K_{1,r}$ 是正确的. Kierstead 和 Penrice^[9] 运用文献 [10] 的技巧证明了这个猜想对于半径为 2 的树是成立的. 然而对于半径大于等于 3 的树的结果仍然很少, Gyárfás^[6] 证明了猜想 1 对路成立. 另外值得一提的是, Gyárfás 等^[10] 在不含三角形和四边形的图类上证明了猜想 1, 但非常有意思的是, 这个猜想在仅仅不含三角形的图类上又变得异常的困难 (参见文献 [10]). 我们对不含三角形和四边形这一条件作了一点松弛, 证明了对于固定的正整数 k 和 l , 在每个顶点至多包含在 k 个三角形和 l 个四边形的图类上, 猜想 1 是成立的.

1997 年, Scott^[12] 从拓扑的角度证明了猜想 1: 对于任意的树 T 和正整数 k , 存在整数 $g_T(k)$ 和 d_T , 使得每一个满足 $\chi(G) \geq g_T(k)$ 的图 G 均能够诱导出 K_k 或者 T 的一个剖分 (其中每条边至多剖分 d_T 次). 沿着这个思路, 如果能将参数 d_T 下降至零, 就证明了这一猜想. 我们在另一篇文献 [23] 中运用文献 [12] 中相同的方法将 d_T 降低了很多, 但离解决猜想 1 还有很远的路. 我们认为其中一个关键问题可能是猜想 1 对由一条路的两端各粘上一个星形成的特殊树还未解决. 文献 [23] 通过拓展文献 [10] 的方法证明了猜想 1 对由一条路的某一个端点粘上一个星形成的树是成立的. 有兴趣的读者可以尝试在下面两类树上证明猜想 1 的正确性, 一类是由一条路的两端各粘上一个星形成特殊的树; 另一类是由一条路的各点上都粘一条边形成的树 (俗称毛毛虫树).

致谢 衷心感谢各位审稿人给出的宝贵修改意见与建议.

参考文献

- 1 Mycielski J. Sur le coloriage des graphes. Colloq Math, 1955, 3: 161–162
- 2 Erdős P. Graph theory and probability. Canad J Math, 1959, 11: 34–38
- 3 Chudnovsky M, Robertson N, Seymour P, et al. The strong perfect graph theorem. Ann of Math (2), 2006, 164: 51–229
- 4 Vizing V. The chromatic class of a multigraph. Kibernetika (kiev), 1965, 3: 29–39
- 5 Beineke L. Derived graphs and digraphs. In: Beiträge zur Graphentheorie. Teubner: Leipzig, 1968, 17–33
- 6 Gyárfás A. Problems from the world surrounding perfect graphs. Appl Math, 1987, 19: 413–441
- 7 Gyárfás A. On Ramsey covering-numbers. In: Infinite and Finite Sets. New York: North-Holland/American Elsevier, 1975, 801–816
- 8 Sumner D. Subtrees of a graph and chromatic number. In: The Theory and Applications of Graphs. New York: Wiley, 1981, 557–576
- 9 Kierstead H, Penrice S. Radius two trees specify $\chi(G)$ -bounded classes. J Graph Theory, 1994, 18: 119–129
- 10 Gyárfás A, Szemerédi E, Tuza Z. Induced subtrees in graphs of large chromatic number. Discrete Math, 1980, 30: 235–244
- 11 Kierstead H, Zhu Y. Radius three trees in graphs with large chromatic number. SIAM J Discrete Math, 2004, 17: 571–581
- 12 Scott A. Induced trees in graphs of large chromatic number. J Graph Theory, 1997, 24: 297–311
- 13 Chudnovsky M, Penev I, Scott A, et al. Substitution and χ -boundedness. J Combin Theory Ser B, 2013, 103: 567–586
- 14 Randerath B, Schiermeyer I. Vertex colouring and forbidden subgraphs—A survey. Graphs Combin, 2004, 20: 1–40

- 15 Borodin O. Colorings of plane graphs: A survey. *Discrete Math*, 2013, 313: 517–539
- 16 Dong W, Xu B, Zhang X. Improved bounds on linear coloring of plane graphs. *Sci China Math*, 2010, 53: 1895–1902
- 17 Lin Q, Hou J, Liu Y. Acyclic edge coloring of graphs with large girths. *Sci China Math*, 2012, 55: 2593–2600
- 18 Wan M, Xu B. Acyclic edge coloring of planar graphs without adjacent cycles. *Sci China Math*, 2014, 57: 433–442
- 19 Wang Y, Mao X, Lu H, et al. On 3-colorability of planar graphs without adjacent short cycles. *Sci China Math*, 2010, 53: 1129–1132
- 20 许怡安, 张晓岩. 环面图上的一个 Lebesgue 型定理及其在线性染色中的应用. *中国科学: 数学*, 2011, 41: 477–484
- 21 Bondy J, Murty U. *Graph Theory*. Berlin: Springer, 2008
- 22 Brooks R. On colouring the nodes of a network. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 37. Cambridge: Cambridge University Press, 1941, 194–197
- 23 Xu B, Zhang Y. Some results on chromatic number and subtrees of graphs. *Front Math China*, 2017, 12: 441–457

A note on induced subtrees and chromatic number of graphs

ZHANG YingLi & XU BaoGang

Abstract Gyárfás (1975) and Sumner (1981) independently, conjectured that for every tree T , there exists an integer-valued function $f_T(x)$ such that every graph G of chromatic number larger than $f_T(\omega(G))$ contains T as an induced subgraph, where $\omega(G)$ is the clique number of G . Gyárfás et al. proved that if G contains no triangles and cycles of length 4, then G contains every tree on $\chi(G)$ vertices as an induced subgraph. Besides this, they also confirmed that if G contains no triangles and $\chi(G) \geq m + n$, then G can induce an (m, n) -mop which is a special tree. In this note, we generalize these two results of Gyárfás et al. and prove that (1) if every vertex of G is contained in at most k triangles and l cycles of length 4, and $\chi(G) \geq t + 2k + 2l$, then G contains every tree on t vertices as an induced subgraph; (2) if every vertex of G is contained in at most k triangles, and $\chi(G) \geq m(k + 1) + n$, then G contains an (m, n) -mop as an induced subgraph.

Keywords chromatic number, induced subgraph, triangle

MSC(2010) 05C15, 05C75

doi: 10.1360/N012015-00261