多重 Hurwitz-zeta 值的恒等式

沈忠燕^①, 蔡天新^{②*}^① 浙江外国语学院理工学院数学系, 杭州 310012;^② 浙江大学数学系, 杭州 310027

E-mail: huanchenszhan@yahoo.com.cn, caitianxin@hotmail.com

收稿日期: 2011-03-14; 接受日期: 2011-09-07; * 通信作者

国家自然科学基金(批准号: 10871169)、浙江教育厅(批准号: Y200803340) 和浙江外国语学院(批准号: 09Z08) 资助项目

摘要 当 $k = 2, 3, 4$ 或 5 且 $n > k - 1$ 时, 利用调和乘积公式我们证明了和

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\dots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} \zeta\left(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_k; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right)$$

与

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\dots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} t(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_k)$$

有关的恒等式, 这里

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_k; x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k > 0} \frac{1}{(n_1 + x_1)^{s_1} (n_2 + x_2)^{s_2} \dots (n_k + x_k)^{s_k}}$$

是多重 Hurwitz-zeta 函数,

$$t(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 0} \frac{1}{(2n_1 + 1)^{s_1} (2n_2 + 1)^{s_2} \dots (2n_k + 1)^{s_k}}.$$

关键词 多重 Hurwitz-zeta 值 调和乘积公式 恒等式**MSC (2000) 主题分类** 11M41, 11M06

1 引言

令 $x_i \in [-1, 0], i = 1, 2, \dots, k$ 是实数, 多重 Hurwitz-zeta 函数^[1]

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_k; x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k > 0} \frac{1}{(n_1 + x_1)^{s_1} (n_2 + x_2)^{s_2} \dots (n_k + x_k)^{s_k}},$$

当

$$\operatorname{Re}(s_i + \dots + s_k) > k - i + 1, \quad i = 1, \dots, k$$

时绝对收敛解析. 当 $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, k$ 时, 多重 Hurwitz-zeta 函数就是由 Zagier [2] 定义的多重 zeta 函数,

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_k^{s_k}}.$$

多重 zeta 函数又称 Euler-Zagier 和或多重调和级数 [3], 近年来引起不同方向许多学者的广泛关注. 各种形式的多重 zeta 函数不仅对一般的 zeta 函数理论研究是很重要的, 而且对代数几何、上同调理论、扭结理论和量子力学等的研究是非常有意义的. 多重 Hurwitz-zeta 函数近来也吸引了许多学者的关注, 多重 Hurwitz-zeta 函数解析性质方面的研究见 [4, 5] 等, 代数组组合方面的研究见 [1, 6, 7] 等. 当所有变量 $s_i, i = 1, 2, \dots, k$ 均取值为正整数时, 多重 Hurwitz-zeta 函数和多重 zeta 函数称不相应的多重 Hurwitz-zeta 值和多重 zeta 值. 在 2004 年, Gangle 等 [8] 证明了当 $n > 1$ 时, 有

$$\sum_{m=1}^{n-1} \zeta(2m, 2n-2m) = \frac{3}{4} \zeta(2n), \quad (1.1)$$

和

$$\sum_{m=1}^{n-1} \zeta(2m+1, 2n-2m-1) = \frac{1}{4} \zeta(2n).$$

2009 年, Nakamura [9] 给出了 (1.1) 的一个新的证明. 近来, 我们 [10] 证明了当 $n > 2$ 时,

$$\sum_{a+b+c=n} \zeta(2a, 2b, 2c) = \frac{5}{8} \zeta(2n) - \frac{1}{4} \zeta(2) \zeta(2n-2);$$

当 $n > 3$ 时,

$$\sum_{a+b+c+d=n} \zeta(2a, 2b, 2c, 2d) = \frac{35}{64} \zeta(2n) - \frac{5}{16} \zeta(2) \zeta(2n-2).$$

在这一章中, 我们主要考虑关于多重 Hurwitz-zeta 值

$$\zeta\left(s_1, s_2, \dots, s_k; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right)$$

和多重和式

$$t(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 0} \frac{1}{(2n_1+1)^{s_1} (2n_2+1)^{s_2} \dots (2n_k+1)^{s_k}}$$

的求和问题. 容易看出 $t(s) = \frac{1}{2}(\zeta(s) + \zeta(\bar{s})) = \frac{2^s-1}{2^s} \zeta(s)$, 这里 $\zeta(\bar{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ 是交替 zeta 值. 利用调和乘积公式, 我们得到了关于和式

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\dots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} t(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_k),$$

当 $k = 2, 3, 4, 5$ 时的恒等式, 即下面的定理.

定理 1.1 对任意的整数 $n > 1$, 我们有

$$\sum_{m=1}^{n-1} t(2m, 2n-2m) = \frac{1}{4} t(2n).$$

定理 1.2 对任意的整数 $n > 2$, 我们有

$$\sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} t(2a, 2b, 2c) = \frac{1}{8}t(2n) - \frac{1}{16}\zeta(2)t(2n-2) = \frac{1}{8}t(2n) - \frac{1}{12}t(2)t(2n-2).$$

定理 1.3 对任意的整数 $n > 3$, 我们有

$$\sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a,b,c,d \geq 1}} t(2a, 2b, 2c, 2d) = \frac{5}{64}t(2n) - \frac{3}{64}\zeta(2)t(2n-2) = \frac{5}{64}t(2n) - \frac{1}{16}t(2)t(2n-2).$$

定理 1.4 对任意的整数 $n > 4$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} t(2a, 2b, 2c, 2d, 2e) &= \frac{7}{128}t(2n) - \frac{9}{256}\zeta(2)t(2n-2) + \frac{3}{1024}\zeta(4)t(2n-4) \\ &= \frac{7}{128}t(2n) - \frac{3}{64}t(2)t(2n-2) + \frac{1}{320}t(4)t(2n-4). \end{aligned}$$

由于

$$\zeta\left(s_1, s_2, \dots, s_k; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right) = 2^{s_1+s_2+\dots+s_k} t(s_1, s_2, \dots, s_k)$$

和

$$\zeta\left(s; -\frac{1}{2}\right) = (2^s - 1)\zeta(s),$$

我们自然就得到了下面关于多重 Hurwitz-zeta 函数

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\dots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} \zeta\left(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_k; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right)$$

的推论.

推论 1.1 对任意的整数 $n > 1$, 我们有

$$\sum_{m=1}^{n-1} \zeta\left(2m, 2n-2m; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\zeta\left(2n; -\frac{1}{2}\right) = \frac{4^n - 1}{4}\zeta(2n).$$

推论 1.2 对任意的整数 $n > 2$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} \zeta\left(2a, 2b, 2c; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{8}\zeta\left(2n; -\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{12}\zeta\left(2; -\frac{1}{2}\right)\zeta\left(2n-2; -\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{4^n - 1}{8}\zeta(2n) - \frac{4^{n-1} - 1}{4}\zeta(2)\zeta(2n-2). \end{aligned}$$

推论 1.3 对任意的整数 $n > 3$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a,b,c,d \geq 1}} \zeta\left(2a, 2b, 2c, 2d; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5}{64}\zeta\left(2n; -\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16}\zeta\left(2; -\frac{1}{2}\right)\zeta\left(2n-2; -\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5(4^n - 1)}{64}\zeta(2n) - \frac{3(4^{n-1} - 1)}{16}\zeta(2)\zeta(2n-2). \end{aligned}$$

推论 1.4 对任意的整数 $n > 4$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} \zeta\left(2a, 2b, 2c, 2d, 2e; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ = \frac{7}{128} \zeta\left(2n; -\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{64} \zeta\left(2; -\frac{1}{2}\right) \zeta\left(2n-2; -\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{320} \zeta\left(4; -\frac{1}{2}\right) \zeta\left(2n-4; -\frac{1}{2}\right) \\ = \frac{7(4^n - 1)}{128} \zeta(2n) - \frac{9(4^{n-1} - 1)}{64} \zeta(2) \zeta(2n-2) + \frac{3(4^{n-2} - 1)}{64} \zeta(4) \zeta(2n-4). \end{aligned}$$

2 引理

为了证明定理, 我们需要下面的引理.

引理 2.1^[11] 对任意的整数 $n > 1$, 有

$$\sum_{m=1}^{n-1} t(2m)t(2n-2m) = \frac{2n-1}{2} t(2n). \quad (2.1)$$

对任意的整数 $n > 2$, 有

$$\sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} t(2a)t(2b)t(2c) = \frac{2n^2 - 3n + 1}{4} t(2n) - \frac{3}{8} \zeta(2)t(2n-2). \quad (2.2)$$

引理 2.2 对任意的整数 $n > 1$, 我们有

$$\sum_{m=1}^{n-1} (n-m-1)(t(2m, 2n-2m) + t(2n-2m, 2m)) = \frac{n-2}{4} t(2n).$$

证明 作变换 $m \rightarrow n-m$, 我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} (n-m-1)(t(2m, 2n-2m) + t(2n-2m, 2m)) \\ = \sum_{m=1}^{n-1} (m-1)(t(2n-2m, 2m) + t(2m, 2n-2m)), \end{aligned} \quad (2.3)$$

又因为

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} (n-m-1)(t(2m, 2n-2m) + t(2n-2m, 2m)) \\ + \sum_{m=1}^{n-1} (m-1)(t(2n-2m, 2m) + t(2m, 2n-2m)) \\ = 2(n-2) \sum_{m=1}^{n-1} t(2m, 2n-2m). \end{aligned} \quad (2.4)$$

由 (2.3), (2.4) 和定理 1.1, 我们有

$$\sum_{m=1}^{n-1} (n-m-1)(t(2m, 2n-2m) + t(2n-2m, 2m)) = \frac{n-2}{4} t(2n).$$

因此引理 2.2 得证. □

引理 2.3 对任意的整数 $n > 1$, 我们有

$$\sum_{m=1}^{n-1} (m-1)(n-m-1)t(2m, 2n-2m) = \frac{4-3n}{16}t(2n) + \frac{2n-3}{16}\zeta(2)t(2n-2).$$

证明 文献 [11] 中, 有下面的等式成立:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{n-1} (2m-1)(2n-2m-1)t(2m)t(2n-2m) \\ &= \frac{(2n-1)(n-1)(2n-3)}{6}t(2n) + \frac{2n-3}{2}\zeta(2)t(2n-2), \end{aligned}$$

又由 (2.1), 我们得到

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{n-1} (m-1)(n-m-1)t(2m)t(2n-2m) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{n-1} (2m-1-1)(2n-2m-1-1)t(2m)t(2n-2m) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{n-1} (2m-1)(2n-2m-1)t(2m)t(2n-2m) - \frac{2n-3}{4} \sum_{m=1}^{n-1} t(2m)t(2n-2m) \\ &= \frac{4n^3-24n^2+35n-12}{24}t(2n) + \frac{2n-3}{8}\zeta(2)t(2n-2). \end{aligned}$$

由调和乘积公式知

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{n-1} (m-1)(n-m-1)t(2m, 2n-2m) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} (m-1)(n-m-1)(t(2m, 2n-2m) + t(2n-2m, 2m)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} (m-1)(n-m-1)(t(2m)t(2n-2m) - t(2n)) \\ &= \frac{4-3n}{16}t(2n) + \frac{2n-3}{16}\zeta(2)t(2n-2). \end{aligned}$$

因此引理 2.3 得证. □

引理 2.4 对任意的整数 $n > 1$, 我们有

$$\sum_{m=1}^{n-1} (m-1)t(2m)t(2n-2m) = \frac{2n^2-5n+2}{4}t(2n).$$

证明 作变换 $m \rightarrow n-m$, 我们得到

$$\sum_{m=1}^{n-1} (m-1)t(2m)t(2n-2m) = \sum_{m=1}^{n-1} (n-m-1)t(2n-2m)t(2m),$$

又因为

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{n-1} (m-1)t(2m)t(2n-2m) + \sum_{m=1}^{n-1} (n-m-1)t(2n-2m)t(2m) \\ &= (n-2) \sum_{m=1}^{n-1} t(2m)t(2n-2m). \end{aligned}$$

由 (2.1) 得

$$\sum_{m=1}^{n-1} (m-1)t(2m)t(2n-2m) = \frac{2n^2 - 5n + 2}{4} t(2n).$$

我们证明了引理 2.4. □

引理 2.5^[12] 对任意的整数 $n > 3$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a,b,c,d \geq 1}} t(2a)t(2b)t(2c)t(2d) &= \frac{1}{24}(2n-1)(2n-3)(n-1)t(2n) \\ &\quad + \left\{ \frac{\zeta(2)}{8} - \frac{t(2)}{2} \right\} (2n-3)t(2n-2). \end{aligned}$$

引理 2.6 对任意的整数 $n > 1$, 我们有

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{n-1} (m-1)(n-m-1)^2(t(2m, 2n-2m) + t(2n-2m, 2m)) \\ &= \frac{(4-3n)(n-2)}{16} t(2n) + \frac{(2n-3)(n-2)}{16} \zeta(2)t(2n-2). \end{aligned}$$

证明 作变换 $m \rightarrow n-m$, 我们得到

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{n-1} (m-1)(n-m-1)^2(t(2m, 2n-2m) + t(2n-2m, 2m)) \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} (n-m-1)(m-1)^2(t(2n-2m, 2m) + t(2m, 2n-2m)), \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{n-1} (m-1)(n-m-1)^2(t(2m, 2n-2m) + t(2n-2m, 2m)) \\ &+ \sum_{m=1}^{n-1} (n-m-1)(m-1)^2(t(2n-2m, 2m) + t(2m, 2n-2m)) \\ &= (n-2) \sum_{m=1}^{n-1} (m-1)(n-m-1)(t(2m, 2n-2m) + t(2n-2m, 2m)). \end{aligned}$$

由引理 2.3, 我们证明了引理 2.6. □

引理 2.7 对任意的整数 $n > 4$, 有

$$\sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} t(2a)t(2b)t(2c)t(2d)t(2e)$$

$$= \frac{1}{96}(2n-1)(2n-3)(n-1)(n-2)t(2n) - \frac{5}{32}(n-2)(2n-3)\zeta(2)t(2n-2) + \frac{1}{4}t^2(2)t(2n-4).$$

注 2.1 文献 [12] 中定理 4.3 也证明了该引理, 不过系数有点错误, 我们可以用 [12] 中的证明方法来证明引理 2.7, 证明过程略.

3 定理的证明

定理 1.1 的证明 用调和乘积公式, 我们有

$$t(2m)t(2n-2m) = t(2m, 2n-2m) + t(2n-2m, 2m) + t(2n).$$

对 m 从 1 到 $n-1$ 求和并由对称性, 我们得到

$$\sum_{m=1}^{n-1} t(2m, 2n-2m) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} t(2m)t(2n-2m) - \sum_{m=1}^{n-1} t(2n) \right\}.$$

由 (2.1) 得到

$$\sum_{m=1}^{n-1} t(2m, 2n-2m) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2n-1}{2} t(2n) - (n-1)t(2n) \right\} = \frac{1}{4} t(2n).$$

这就完成了定理 1.1 的证明. □

定理 1.2 的证明 再次用调和乘积公式, 我们有

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} t(2a)t(2b)t(2c) \\ &= 6 \sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} t(2a, 2b, 2c) \\ &+ 3 \sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} (t(2a, 2b+2c) + t(2b+2c, 2a)) + \sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} t(2n). \end{aligned} \quad (3.1)$$

容易得到

$$\sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} t(2n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} t(2n). \quad (3.2)$$

由引理 2.2, 我们得到

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} (t(2a, 2b+2c) + t(2b+2c, 2a)) \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=1}^{n-a-1} (t(2a, 2n-2a) + t(2n-2a, 2a)) \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} (n-a-1)(t(2a, 2n-2a) + t(2n-2a, 2a)) \\ &= \frac{n-2}{4} t(2n). \end{aligned} \quad (3.3)$$

联合 (2.2), (3.1) 至 (3.3), 我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} t(2a, 2b, 2c) &= \frac{1}{6} \left\{ \sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} t(2a)t(2b)t(2c) - 3 \sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} (t(2a, 2b+2c) \right. \\ &\quad \left. + t(2b+2c, 2a)) - \sum_{\substack{a+b+c=n \\ a,b,c \geq 1}} t(2n) \right\} \\ &= \frac{1}{8}t(2n) - \frac{1}{16}\zeta(2)t(2n-2). \end{aligned}$$

这就完成了定理 1.2 的证明. □

定理 1.3 的证明 用调和乘积公式和对称性, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a,b,c,d \geq 1}} t(2a)t(2b)t(2c)t(2d) \\ &= 24 \sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a,b,c,d \geq 1}} t(2a, 2b, 2c, 2d) \\ &\quad + 12 \sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a,b,c,d \geq 1}} (t(2a+2b, 2c, 2d) + t(2c, 2a+2b, 2d) + t(2c, 2d, 2a+2b)) \\ &\quad + 6 \sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a,b,c,d \geq 1}} t(2a+2b, 2c+2d) + 4 \sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a,b,c,d \geq 1}} (t(2a+2b+2c, 2d) \\ &\quad + t(2d, 2a+2b+2c)) + \sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a,b,c,d \geq 1}} t(2n), \end{aligned} \quad (3.4)$$

容易得到

$$\sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a,b,c,d \geq 1}} t(2n) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}t(2n). \quad (3.5)$$

接下来, 我们分别考虑 (3.4) 中间的 3 个和式. 首先, 我们考虑 (3.4) 中间的第三个和式, 得到

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a,b,c,d \geq 1}} (t(2a+2b+2c, 2d) + t(2d, 2a+2b+2c)) \\ &= \sum_{d=1}^{n-1} \sum_{a=1}^{n-d-1} \sum_{b=1}^{n-a-d-1} (t(2n-2d, 2d) + t(2d, 2n-2d)) \\ &= \sum_{d=1}^{n-1} \frac{(n-d-1)(n-d-2)}{2} (t(2n-2d, 2d) + t(2d, 2n-2d)) \\ &= \frac{n-3}{2} \sum_{d=1}^{n-1} (n-d-1)(t(2n-2d, 2d) + t(2d, 2n-2d)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{n-1} (d-1)(n-d-1)(t(2n-2d, 2d) + t(2d, 2n-2d)), \end{aligned}$$

我们分别利用引理 2.2 和 2.3, 那么上面的和式等于

$$\frac{2n^2 - 7n + 8}{16}t(2n) - \frac{2n-3}{16}\zeta(2)t(2n-2). \quad (3.6)$$

其次, 我们考虑 (3.4) 中间的第二个和式,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a,b,c,d \geq 1}} t(2a+2b, 2c+2d) \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{a=1}^{m-1} \sum_{c=1}^{n-m-1} t(2m, 2n-2m) \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} (m-1)(n-m-1)t(2m, 2n-2m), \end{aligned}$$

由引理 2.3, 上式等于

$$\frac{4-3n}{16}t(2n) + \frac{2n-3}{16}\zeta(2)t(2n-2). \quad (3.7)$$

最后, 我们考虑 (3.4) 中间的第一个和式, 用调和乘积公式, 我们有

$$\begin{aligned} t(2a+2b)t(2c, 2d) &= \{t(2a+2b, 2c, 2d) + t(2c, 2a+2b, 2d) + t(2c, 2d, 2a+2b)\} \\ &\quad + \{t(2a+2b+2c, 2d) + t(2c, 2a+2b+2d)\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

由对称性, (3.8) 右边第二部分求和就是 (3.6), (3.8) 左边求和等于

$$\sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a,b,c,d \geq 1}} t(2a+2b)t(2c, 2d) = \sum_{m=2}^{n-2} \sum_{a+b=m} t(2m) \sum_{c+d=n-m} t(2c, 2d).$$

由定理 1.1, 上式等于

$$\frac{1}{4} \sum_{m=2}^{n-2} (m-1)t(2m)t(2n-2m).$$

由引理 2.4, 上式等于

$$\begin{aligned} &\frac{2n^2-5n+2}{16}t(2n) - \frac{n-2}{4}t(2)t(2n-2) \\ &= \frac{2n^2-5n+2}{16}t(2n) - \frac{3n-6}{16}\zeta(2)t(2n-2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

再联合 (3.6) 和 (3.8), 我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a,b,c,d \geq 1}} (t(2a+2b, 2c, 2d) + t(2c, 2a+2b, 2d) + t(2c, 2d, 2a+2b)) \\ &= \frac{n-3}{8}t(2n) - \frac{n-3}{16}\zeta(2)t(2n-2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

联合引理 2.5, (3.4) 至 (3.7), (3.10) 并由 $t(2) = \frac{3}{4}\zeta(2)$, 我们完成了定理 1.3 的证明. $\square$

定理 1.4 的证明 利用调和乘积公式及对称性, 我们有

$$\sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} t(2a)t(2b)t(2c)t(2d)t(2e)$$

$$\begin{aligned}
 &= 120 \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} t(2a, 2b, 2c, 2d, 2e) \\
 &+ 60 \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} (t(2a+2b, 2c, 2d, 2e) + t(2c, 2a+2b, 2d, 2e) + t(2c, 2d, 2a+2b, 2e) \\
 &+ t(2c, 2d, 2e, 2a+2b)) + 20 \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} (t(2a+2b+2c, 2d, 2e) + t(2d, 2a+2b+2c, 2e) \\
 &+ t(2d, 2e, 2a+2b+2c)) + 30 \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} (t(2a+2b, 2c+2d, 2e) + t(2a+2b, 2e, 2c+2d) \\
 &+ t(2e, 2a+2b, 2c+2d)) + 10 \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} (t(2a+2b+2c, 2d+2e) + t(2d+2e, \\
 &2a+2b+2c)) + 5 \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} (t(2a+2b+2c+2d, 2e) + t(2e, 2a+2b+2c+2d)) \\
 &+ \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} t(2n). \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

显然,

$$\sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} t(2n) = \frac{n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 50n + 24}{24} t(2n). \tag{3.12}$$

接下来, 我们分别考虑 (3.11) 中间的 5 个和式. 首先, 我们考虑 (3.11) 中间的第五个和式, 得到

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} (t(2a+2b+2c+2d, 2e) + t(2e, 2a+2b+2c+2d)) \\
 &= \sum_{e=1}^{n-1} \sum_{a=1}^{n-e-1} \sum_{b=1}^{n-a-e-1} \sum_{c=1}^{n-a-b-e-1} (t(2n-2e, 2e) + t(2e, 2n-2e)) \\
 &= \sum_{e=1}^{n-1} \frac{(n-e-1)(n-e-2)(n-e-3)}{6} (t(2n-2e, 2e) + t(2e, 2n-2e)) \\
 &= \frac{(n-3)(n-4)}{6} \sum_{e=1}^{n-1} (n-e-1)(t(2n-2e, 2e) + t(2e, 2n-2e)) \\
 &\quad - \frac{n-5}{6} \sum_{e=1}^{n-1} (n-e-1)(e-1)(t(2n-2e, 2e) + t(2e, 2n-2e)) \\
 &\quad - \frac{1}{6} \sum_{e=1}^{n-1} (e-1)(n-e-1)^2 (t(2n-2e, 2e) + t(2e, 2n-2e)),
 \end{aligned}$$

分别利用引理 2.2, 引理 2.3 和引理 2.6, 上式等于

$$\begin{aligned}
 &\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{24} t(2n) - \frac{(4-3n)(n-5)}{48} t(2n) - \frac{(2n-3)(n-5)}{48} \zeta(2) t(2n-2) \\
 &\quad - \frac{(4-3n)(n-2)}{96} t(2n) - \frac{(2n-3)(n-2)}{96} \zeta(2) t(2n-2) \\
 &= \frac{4n^3 - 27n^2 + 56n - 48}{96} t(2n) - \frac{2n^2 - 11n + 12}{32} \zeta(2) t(2n-2). \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

其次, 我们考虑 (3.11) 中间的第四个和式, 得到

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} (t(2a+2b+2c, 2d+2e) + t(2d+2e, 2a+2b+2c)) \\
 &= \sum_{m=2}^{n-3} \sum_{a=1}^{n-m-1} \sum_{b=1}^{n-a-m-1} \sum_{d=1}^{m-1} (t(2n-2m, 2m) + t(2m, 2n-2m)) \\
 &= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(m-1)(n-m-2)(n-m-1)}{2} (t(2n-2m, 2m) + t(2m, 2n-2m)) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} (m-1)(n-m-1)^2 (t(2n-2m, 2m) + t(2m, 2n-2m)) \\
 &\quad - \sum_{m=1}^{n-1} (n-m-1)(m-1)t(2n-2m, 2m),
 \end{aligned}$$

上面的和式中分别利用引理 2.6 和引理 2.3, 等于

$$-\frac{3n^2-16n+16}{32}t(2n) + \frac{2n^2-11n+12}{32}\zeta(2)t(2n-2). \quad (3.14)$$

第三, 用调和乘积公式处理 (3.11) 中间的第三个和式, 有

$$\begin{aligned}
 & t(2a+2b, 2c+2d)t(2e) \\
 &= \{t(2a+2b, 2c+2d, 2e) + t(2a+2b, 2e, 2c+2d) \\
 &\quad + t(2e, 2a+2b, 2c+2d)\} + \{t(2a+2b+2e, 2c+2d) \\
 &\quad + t(2a+2b, 2c+2d+2e)\}. \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

由对称性, (3.15) 右边的第二项求和就等于 (3.14), (3.15) 左边求和等于

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} t(2a+2b, 2c+2d)t(2e) \\
 &= \sum_{e=1}^{n-4} \sum_{m=1}^{n-e-1} \sum_{a=1}^{m-1} \sum_{c=1}^{n-e-m-1} t(2m, 2n-2e-2m)t(2e) \\
 &= \sum_{e=1}^{n-4} \sum_{m=1}^{n-e-1} (m-1)(n-e-m-1)t(2m, 2n-2e-2m)t(2e).
 \end{aligned}$$

由引理 2.3, 上式等于

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^{n-4} t(2e) \left(\frac{4-3(n-e)}{16} t(2n-2e) + \frac{2n-2e-3}{16} \zeta(2)t(2n-2e-2) \right) \\
 &= \frac{1}{16} \sum_{e=1}^{n-4} t(2e)t(2n-2e) - \frac{3}{16} \sum_{e=1}^{n-4} (n-e-1)t(2e)t(2n-2e) \\
 &\quad + \frac{\zeta(2)}{16} \sum_{e=1}^{n-4} t(2e)t(2n-2e-2) + \frac{\zeta(2)}{8} \sum_{e=1}^{n-4} (n-e-2)t(2e)t(2n-2e-2).
 \end{aligned}$$

上面和式中第一和第三部分利用 (2.1), 第二和第四部分利用引理 2.4 并注意到 $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(6) = \pi^6/945$, 那么上式等于

$$\begin{aligned} &= -\frac{6n^2 - 19n + 8}{64}t(2n) + \frac{4n^2 - 14n + 9}{64}\zeta(2)t(2n-2) + \frac{1}{8}t(4)t(2n-4) \\ &\quad - \frac{\zeta(2)}{16}t(2)t(2n-4) + \frac{5}{16}t(6)t(2n-6) - \frac{3\zeta(2)}{16}t(4)t(2n-6) \\ &= -\frac{6n^2 - 19n + 8}{64}t(2n) + \frac{4n^2 - 14n + 9}{64}\zeta(2)t(2n-2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

联合 (3.14)–(3.16), (3.11) 中间的第三个和式等于

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} \{t(2a+2b, 2c+2d, 2e) + t(2a+2b, 2e, 2c+2d) + t(2e, 2a+2b, 2c+2d)\} \\ &= \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} \{t(2a+2b, 2c+2d)t(2e) - \{t(2a+2b+2e, 2c+2d) + t(2a+2b, 2c+2d+2e)\}\} \\ &= -\frac{13n-24}{64}t(2n) + \frac{8n-15}{64}\zeta(2)t(2n-2). \end{aligned} \quad (3.17)$$

第四, 用调和乘积公式处理 (3.11) 中间的第二个和式, 我们得到

$$\begin{aligned} &t(2a+2b+2c)t(2d, 2e) \\ &= \{t(2a+2b+2c, 2d, 2e) + t(2d, 2a+2b+2c, 2e) \\ &\quad + t(2d, 2e, 2a+2b+2c)\} + \{t(2a+2b+2c+2d, 2e) + t(2d, 2a+2b+2c+2e)\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

由对称性, (3.18) 右边的第二项求和就等于 (3.13), (3.18) 左边求和等于

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} t(2a+2b+2c)t(2d, 2e) \\ &= \sum_{m=3}^{n-2} \sum_{a+b+c=m} \sum_{d+e=n-m} t(2m)t(2d, 2e), \end{aligned}$$

由定理 1.1, 上式等于

$$\begin{aligned} &\sum_{m=3}^{n-2} \sum_{a=1}^{m-1} \sum_{b=1}^{m-a-1} \sum_{d=1}^{n-m-1} t(2m)t(2d, 2n-2m-2d) \\ &= \sum_{m=3}^{n-2} \frac{(m-1)(m-2)}{2} t(2m) \frac{1}{4} t(2n-2m) \\ &= \frac{n-3}{8} \sum_{m=3}^{n-2} (m-1)t(2m)t(2n-2m) - \frac{1}{8} \sum_{m=3}^{n-2} (m-1)(n-m-1)t(2m)t(2n-2m), \end{aligned}$$

分别利用引理 2.3 的证明和引理 2.4 并注意到 $t(2) = \frac{3}{4}\zeta(2)$, 那么上式等于

$$\frac{8n^3 - 42n^2 + 67n - 24}{192}t(2n) - \frac{6n^2 - 28n + 33}{64}\zeta(2)t(2n-2). \quad (3.19)$$

由 (3.13), (3.18) 和 (3.19), 那么 (3.11) 中间的第二项和等于

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} \{t(2a+2b+2c, 2d, 2e) + t(2d, 2a+2b+2c, 2e) + t(2d, 2e, 2a+2b+2c)\} \\
 &= \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} \{t(2a+2b+2c)t(2d, 2e) - \{t(2a+2b+2c+2d, 2e) + t(2d, 2a+2b+2c+2e)\}\} \\
 &= \frac{4n^2 - 15n + 24}{64} t(2n) - \frac{2n^2 - 6n + 9}{64} \zeta(2) t(2n-2).
 \end{aligned} \quad (3.20)$$

最后, 用调和乘积公式处理 (3.11) 中间的第一个和式, 我们得到

$$\begin{aligned}
 t(2a+2b)t(2c, 2d, 2e) &= \{t(2a+2b, 2c, 2d, 2e) + t(2c, 2a+2b, 2d, 2e) + t(2c, 2d, 2a+2b, 2e) \\
 &\quad + t(2c, 2d, 2e, 2a+2b)\} + \{t(2a+2b+2c, 2d, 2e) + t(2c, 2a+2b+2d, 2e) \\
 &\quad + t(2c, 2d, 2a+2b+2e)\}.
 \end{aligned} \quad (3.21)$$

由对称性, (3.21) 右边的第二项求和就等于 (3.20), (3.21) 左边求和等于

$$\sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} t(2a+2b)t(2c, 2d, 2e) = \sum_{m=2}^{n-3} \sum_{a+b=m} \sum_{c+d+e=n-m} t(2m)t(2c, 2d, 2e),$$

由定理 1.2, 上式等于

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=2}^{n-3} (m-1)t(2m) \left\{ \frac{1}{8} t(2n-2m) - \frac{1}{16} \zeta(2) t(2n-2-2m) \right\} \\
 &= \frac{1}{8} \sum_{m=2}^{n-3} (m-1)t(2m)t(2n-2m) - \frac{\zeta(2)}{16} \sum_{m=2}^{n-3} (m-1)t(2m)t(2n-2-2m),
 \end{aligned}$$

由引理 2.4, 且 $t(2) = \frac{3}{4}\zeta(2)$, 上式等于

$$\frac{2n^2 - 5n + 2}{32} t(2n) - \frac{2n^2 - 3n - 3}{64} \zeta(2) t(2n-2). \quad (3.22)$$

由 (3.20)–(3.22), (3.11) 中间的第一个和式等于

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} \{t(2a+2b, 2c, 2d, 2e) + t(2c, 2a+2b, 2d, 2e) + t(2c, 2d, 2a+2b, 2e) \\
 &\quad + t(2c, 2d, 2e, 2a+2b)\} \\
 &= \sum_{\substack{a+b+c+d+e=n \\ a,b,c,d,e \geq 1}} \{t(2a+2b)t(2c, 2d, 2e) - \{t(2a+2b+2c, 2d, 2e) + t(2c, 2a+2b+2d, 2e) \\
 &\quad + t(2c, 2d, 2a+2b+2e)\}\} \\
 &= \frac{5n-20}{64} t(2n) - \frac{3n-12}{64} \zeta(2) t(2n-2).
 \end{aligned} \quad (3.23)$$

联合引理 2.7, (3.11)–(3.14), (3.17), (3.20), (3.23) 并由 $t(2) = \frac{3}{4}\zeta(2)$, $t(4) = \frac{15}{16}\zeta(4)$, 我们完成了定理 1.4 的证明. $\square$

注 3.1 如果我们不知道

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} t(2a_1)t(2a_2)\cdots t(2a_k), \quad \text{对于 } n \geq k$$

的恒等式, 我们也可以得到

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} t(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_k), \quad \text{对于 } n \geq k$$

和

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} \zeta\left(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_k; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right), \quad \text{对于 } n \geq k$$

的恒等式. 实际上, 我们只需要利用调和乘积公式和对称性, 比如,

$$\begin{aligned} & k \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} t(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_k) \\ &= \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} t(2a_1, \dots, 2a_{k-1})t(2a_k) \\ &\quad - \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} (t(2a_1+2a_k, \dots, 2a_{k-1}) + \cdots + t(2a_1, \dots, 2a_{k-1}+2a_k)), \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} (t(2a_1+2a_k, \dots, 2a_{k-1}) + \cdots + t(2a_1, \dots, 2a_{k-1}+2a_k)) \\ &= \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} t(2a_1, \dots, 2a_{k-2})t(2a_{k-1}+2a_k) \\ &\quad - \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} (t(2a_1+2a_{k-1}+2a_k, \dots, 2a_{k-2}) \\ &\quad + \cdots + t(2a_1, \dots, 2a_{k-2}+2a_{k-1}+2a_k)). \end{aligned}$$

如此继续下去, 我们得到

$$\begin{aligned} & k \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} t(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_k) \\ &= \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} t(2a_1, \dots, 2a_{i-1})t(2a_i + \cdots + 2a_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \sum_{m=i-1}^{n-k+i-1} \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}=m \\ a_1, a_2, \dots, a_{i-1} \geq 1}} t(2a_1, \dots, 2a_{i-1}) \sum_{\substack{a_i+\cdots+a_k=n-m \\ a_i, \dots, a_k \geq 1}} t(2a_i + \cdots + 2a_k), \end{aligned}$$

当 $i = 1$ 时, 规定

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}=m \\ a_1, a_2, \dots, a_{i-1} \geq 1}} t(2a_1, \dots, 2a_{i-1}) = 1$$

和 $m = 0$, 上面的和式等于

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \sum_{m=i-1}^{n-k+i-1} \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}=m \\ a_1, a_2, \dots, a_{i-1} \geq 1}} t(2a_1, \dots, 2a_{i-1}) \sum_{\substack{a_i+\cdots+a_k=n-m \\ a_i, \dots, a_k \geq 1}} t(2n-2m) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \sum_{m=i-1}^{n-k+i-1} \binom{n-m-1}{k-i} t(2n-2m) \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}=m \\ a_1, a_2, \dots, a_{i-1} \geq 1}} t(2a_1, \dots, 2a_{i-1}), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} t(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_k) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \sum_{m=i-1}^{n-k+i-1} \binom{n-m-1}{k-i} t(2n-2m) \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}=m \\ a_1, a_2, \dots, a_{i-1} \geq 1}} t(2a_1, \dots, 2a_{i-1}). \end{aligned}$$

参考文献

- 1 Murty M R, Sinha K. Multiple Hurwitz zeta functions. *Proc Symp Pure Math*, 2006, 75: 135–156
- 2 Zagier D. Values of zeta functions and their applications. *Progr Math*, 1992, 120: 497–512
- 3 Hoffman M E. Multiple harmonic series. *Pacific J Math*, 1992, 152: 275–290
- 4 Kelliher J P, Masri R. Analytic continuation of multiple Hurwitz zeta functions. *Math Proc Camb Phil Soc*, 2008, 145: 605–617
- 5 Zhao J Q. Analytic continuation of multiple zeta functions. *Proc Amer Math Soc*, 1999, 128: 1275–1283
- 6 Borwein J M, Bradley D M, Broadhurst D J, et al. Combinatorial aspects of multiple zeta values. *Electron J Combin*, 1998, 5, #R38, [MR 1637378] (99g:11100). [ArXiv.org/abs/math.NT/9812020](https://arxiv.org/abs/math.NT/9812020)
- 7 Minh H, Jacob G, Gérard P, et al. De l'algèbre des ζ de Riemann multivariées à l'algèbre des ζ de Hurwitz multivariées. *Sém Lothar Combin*, 2001, 44 Art. B44i, 21pp
- 8 Gangl H, Kaneko M, Zagier D. Double zeta values and modular forms. In: Böcherer S. *Proceedings of the Conference in Memory of Tsuneo Arakawa: Automorphic Forms and Zeta Functions*. Singapore: World Scientific, 2006, 71–106
- 9 Nakamura T. Restricted and weighted sum formulas for double zeta values of even weight. *Šiauliai Math Semin*, 2009, 12: 151–155
- 10 Shen Z Y, Cai T X. Some identities for multiple zeta values. *J Number Theory*, 2012, 132: 314–323
- 11 Sitaramachandrarao R, Davis B. Some identities involving the Riemann zeta function (II). *Indian J Pure Appl Math*, 1986, 17: 1175–1186
- 12 Sankaranaryanan A. An identities involving Riemann-zeta function. *Indian J Pure Appl Math*, 1987, 18: 794–800

Some identities for multiple Hurwitz-zeta values

SHEN ZhongYan & CAI TianXin

Abstract When $k = 2, 3, 4$ or 5 and $n > k - 1$, we obtain the identities for

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} \zeta\left(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_k; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right)$$

and

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_k=n \\ a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1}} t(2a_1, 2a_2, \dots, 2a_k),$$

where

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_k; x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k > 0} \frac{1}{(n_1 + x_1)^{s_1} (n_2 + x_2)^{s_2} \cdots (n_k + x_k)^{s_k}}$$

is the multiple Hurwitz-zeta function,

$$t(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 0} \frac{1}{(2n_1 + 1)^{s_1} (2n_2 + 1)^{s_2} \cdots (2n_k + 1)^{s_k}}.$$

Keywords: multiple Hurwitz-zeta value, harmonic shuffle relation, identity

MSC(2000): 11M41, 11M06

doi: 10.1360/012011-194