无和数列的倒数和

吴建东^{①②}^① 南京师范大学数学科学学院, 南京 210023;^② 南京师范大学数学研究所, 南京 210023

E-mail: wjd.njnu@163.com

收稿日期: 2013-06-13; 接受日期: 2013-09-10

国家自然科学基金 (批准号: 11371195) 和江苏省高校自然科学研究项目 (批准号: 13KJD110005) 资助项目

摘要 设 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ 是一个严格递增的正整数数列, 如果每一个 a_n 都不能写成它前面一些不同项的和, 则称 A 为无和数列. 令 $\rho(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$. 1962 年, Erdős 证明了, 对任意无和数列 A , 有 $\rho(A) < 103$. 1977 年, Levine 和 O'Sullivan 改进为 $\rho(A) < 3.9998$. 最近, Chen 进一步改进为 $\rho(A) < 3.0752$. 本文证明了, 对于无和数列 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ ($a_1 < a_2 < \dots$), 当 $a_1 \geq 2$ 时, 有 $\rho(A) < 2.526$.

关键词 无和数列 κ 数列 Erdős 倒数和常数**MSC (2010) 主题分类** 11B75

1 引言

设 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ 是一个严格递增的正整数数列, 如果每一个 a_n 都不能写成它前面一些不同项的和, 则称 A 为无和数列. 令

$$\rho(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}.$$

由 2 的方幂构成的数列 $1, 2, 2^2, \dots$ 是无和数列, 其倒数之和为 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots = 2$. 一个自然的猜想是, 无和数列的倒数之和 ≤ 2 . 下面的例子^[1] 表明这一猜想不成立: $1, 2, 4, 8, 19, 37, 55, 73, 91, 109, 127, 145, 163, 181$ 分别用 v_i ($1 \leq i \leq 14$) 表示, 令 $v_{15} = 1 + \sum_{k=1}^{14} v_k = 1016$, $v_k = 2^{k-15} v_{15}$ ($k \geq 16$). 对于 $V = \{v_1, v_2, \dots\}$, 有

$$\rho(V) = \sum_{k=1}^{14} \frac{1}{v_k} + \frac{2}{v_{15}} = 2.035 \dots$$

1987 年, Abbott^[2] 证明了, 存在无和数列 A , 使得 $\rho(A) > 2.0648$. 2009 年, Yang^[3] 给出了一个例子 $\rho(A) > 2.0654$.

另一方面, 1962 年, Erdős^[4] 证明了, 对任意无和数列 A , 有 $\rho(A) < 103$. 1977 年, Levine 和 O'Sullivan^[1] 改进为 $\rho(A) < 3.9998$. 最近, Chen^[5] 进一步改进为 $\rho(A) < 3.0752$.

本文证明下面的结果.

定理 1 对于无和数列 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ ($a_1 < a_2 < \dots$), 当 $a_1 \geq 2$ 时, 有 $\rho(A) < 2.526$.

2 无和数列与 κ 数列

对于数列 A , 用 $A(x)$ 表示 A 中不超过 x 的元素个数.

引理 1 [1, 定理 2] 对于无和数列 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ ($a_1 < a_2 < \dots$), 有

$$A(x) \leq \frac{x}{k+1} + a_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad x \geq 0.$$

取 $x = a_n$, 有 $n = A(a_n) \leq \frac{a_n}{k+1} + a_k$. 因此, $a_n \geq (k+1)(n - a_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n \geq 1$).

1977 年, Levine 和 O'Sullivan [1] 引入了 κ 数列的概念: 如果 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ 是一个严格递增的正整数数列, 对任意 $k \geq 1, n \geq 1$, 有 $a_n \geq (k+1)(n - a_k)$, 则称 A 为一个 κ 数列.

由引理 1 知, 无和数列一定是 κ 数列. 借助于 κ 数列, Levine 和 O'Sullivan 将 Erdős 的结果 $\rho(A) < 103$ 大大地改进为 $\rho(A) < 3.9998$.

因无和数列一定是 κ 数列, 因此, 要证明定理 1, 只要证明如下定理.

定理 2 对于 κ 数列 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ ($a_1 < a_2 < \dots$), 当 $a_1 \geq 2$ 时, 有 $\rho(A) < 2.526$.

设 $D = \{d_1, d_2, \dots\}$, 其中 $d_1 = 2$, 对于 $n \geq 2$, d_n 按下面的方式定义:

$$d_n = \max \left\{ \max_{1 \leq k \leq n-1} (k+1)(n - d_k), d_{n-1} + 1 \right\}, \quad n = 2, 3, \dots$$

不难证明 D 是 κ 数列. 计算知, D 的开始项为 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, ... 计算数列 D 前 100000 项的倒数和, 有

$$\rho(D) > \sum_{i=1}^{100000} \frac{1}{d_i} > 2.4552.$$

我们引用文献 [5] 中的概念, 只是本节的概念与 D 有关.

定义 1 设 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ 是一个 κ 数列, $2 \leq a_1 < a_2 < \dots$, 若 $a_n = d_n$ ($n < h$), $a_h \neq d_h$, 则称 A 是深度为 h 的 κ 数列, 记为 $H(A) = h$.

定义 2 对于深度为 h 的 κ 数列 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ ($2 \leq a_1 < a_2 < \dots$), 按下面方式定义 $T(A) = \{b_1, b_2, \dots\}$, $b_n = d_n$ ($n \leq h$),

$$b_n = \max \{a_n, (h+1)(n - d_h)\}, \quad n = h+1, h+2, \dots$$

定义 $T^{i+1}(A) = T(T^i(A))$, $i = 1, 2, \dots$

引理 2 [5, 引理 2.6] 若 A 是 κ 数列, 则 $T(A)$ 也是 κ 数列.

定义 3 设 A 是 κ 数列, 若存在 $i \geq 1$, 使得 $\rho(T^i(A)) > \rho(A)$, 则称 A 可扩大, 否则称 A 不可扩大. 对于不可扩大的 κ 数列, 我们将证明下面的结论:

定理 3 若 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ ($2 \leq a_1 < a_2 < \dots$) 是不可扩大的 κ 数列, 则 $H(A) \geq 11$ 且 $a_{11} \leq 71$.

证明 设 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ ($2 \leq a_1 < a_2 < \dots$) 是一个深度为 h 的 κ 数列, 并且 A 不可扩大, 即 $a_1 = d_1, a_2 = d_2, \dots, a_{h-1} = d_{h-1}, a_h \neq d_h$, 且对任意 $i \geq 1$, 有 $\rho(T^i(A)) \leq \rho(A)$.

因为 A 是 κ 数列, 对于 $1 \leq k \leq h-1$, 我们有 $a_h \geq (k+1)(h - a_k) = (k+1)(h - d_k)$. 结合 d_h 的定义

$$d_h = \max \left\{ \max_{1 \leq k \leq h-1} (k+1)(h - d_k), d_{h-1} + 1 \right\},$$

我们有 $a_h \geq d_h$. 又 $a_h \neq d_h$, 故 $a_h > d_h$. 设 $T(A) = \{b_1, b_2, \dots\}$ ($2 \leq b_1 < b_2 < \dots$). 由 $T(A)$ 的定义知, 对所有 $n \geq h+1$, 我们有 $b_n \geq a_n$. 如果对所有 $n \geq h+1$, 有 $b_n = a_n$, 那么,

$$\rho(T(A)) - \rho(A) = \frac{1}{d_h} - \frac{1}{a_h} > 0.$$

这与 A 不可扩大矛盾. 因此, 一定存在 $n \geq h+1$, 使得 $b_n > a_n$. 对于 $n > (h+2)a_{h+1} - (h+1)d_h$, 有 $a_n \geq (h+2)(n - a_{h+1}) > (h+1)(n - d_h)$. 因此, 对所有 $n > (h+2)a_{h+1} - (h+1)d_h$, 有 $b_n = a_n$. 用 U_A 表示最小的正整数 u , 使得 $b_u > a_u$, 用 V_A 表示最大的正整数 v , 使得 $b_v > a_v$. 令

$$\begin{aligned} U_A(k) &= \frac{1}{h}(a_k + (h+1)d_h - k + 1), \\ W_h &= (h+1)d_h - hd_{h-1} + 1, \quad h = 2, 3, \dots, \\ L_h(u) &= \frac{1}{u-h}((u+1)(h+1)(u-d_h) - u - (h+1)d_h - 2), \\ f(h, a, u, v) &= \frac{1}{d_h} - \frac{1}{a} + \sum_{u \leq n \leq v} \left(\frac{1}{(h+1)(n-d_h)} - \frac{1}{\max\{h(n-d_{h-1}), (h+1)(n-a)\}} \right). \end{aligned}$$

下面引用文献 [5] 中的一些引理, 这些结论和证明对本文也适用.

引理 3 [5, 引理 2.7] $W_h \leq U_A \leq V_A \leq L_h(U_A)$, $U_A \geq U_A(k)$, $k = 1, 2, \dots, U_A$.

引理 4 [5, 引理 2.8] 设 k, l 和 m 为整数, $l \geq k > m + 1/2$, 则

$$\sum_{k \leq n \leq l} \frac{1}{n-m} \leq \log \frac{l-m+1/2}{k-m-1/2}.$$

引理 5 [5, 引理 2.9]

$$\rho(T(A)) - \rho(A) = \frac{1}{d_h} - \frac{1}{a_h} + \sum_{n=U_A}^{V_A} \left(\frac{1}{(h+1)(n-d_h)} - \frac{1}{\min\{a_n, (h+1)(n-d_h)\}} \right).$$

引理 6 [5, 引理 2.11] $\rho(T(A)) - \rho(A) \geq f(h, a_h, U_A, L_h(U_A))$.

引理 7 [5, 引理 2.12] 若 $U_A \geq a_h + \frac{a_h d_h}{h+1}$, 则 $\rho(T(A)) - \rho(A) > 0$.

引理 8 [5, 引理 2.13] 当 $h \geq 3$ 时, 有

$$\rho(T(A)) - \rho(A) \geq \frac{1}{d_h} - \frac{1}{a_h} - \frac{1}{h(h+1)} \log \frac{h(W_h+1)}{W_h-h}.$$

在文献 [5, 引理 2.13] 证明中, 当 $h \geq 3$ 时, 文献 [5, (2.3)] 成立. 当 $h = 1, 2$ 时, 对于本文不成立.

情形 1 $h = 1$.

此时, $d_1 = 2$, $a_1 \geq 3$. 由引理 5 知,

$$\rho(T(A)) - \rho(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{a_1} + \sum_{n=U_A}^{V_A} \left(\frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{\min\{a_n, 2(n-2)\}} \right). \quad (2.1)$$

由 $a_{U_A} < b_{U_A} = \max\{a_{U_A}, 2(U_A - 2)\}$ 及

$$a_{U_A} \geq a_1 + U_A - 1, \quad (2.2)$$

知 $U_A \geq a_1 + 4$. 由引理 3 知,

$$\begin{aligned} V_A &\leq L_h(U_A) = \frac{1}{U_A - 1}(2(U_A + 1)(U_A - 2) - U_A - 6) \\ &= 2U_A - 1 - \frac{11}{U_A - 1}. \end{aligned}$$

因此, $V_A \leq 2U_A - 2$. 注意到

$$\frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{\min\{a_n, 2(n-2)\}} \leq 0,$$

由 (2.1) 和 (2.2) 知,

$$\rho(T(A)) - \rho(A) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{a_1} + \sum_{n=U_A}^{2U_A-2} \left(\frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{\min\{a_n, 2(n-2)\}} \right). \quad (2.3)$$

当 $n \geq U_A$ 时, $a_n \geq a_1 + n - 1 \geq n + 2$, $2(n-2) \geq n + 2$. 这里用到了 $U_A \geq a_1 + 4 \geq 7$. 因此, 当 $n \geq U_A$ 时, $\min\{a_n, 2(n-2)\} \geq n + 2$. 由 (2.2) 和引理 4 知,

$$\begin{aligned} \rho(T(A)) - \rho(A) &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{a_1} + \sum_{n=U_A}^{2U_A-2} \left(\frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{a_1} + \sum_{n=U_A}^{2U_A-2} \left(\frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{2} \sum_{n=U_A}^{2U_A-2} \frac{1}{n+2} \\ &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{2} \log \frac{2U_A + \frac{1}{2}}{U_A + \frac{3}{2}} \\ &> \frac{1}{2} - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

由于 A 不能扩大, 故 $\rho(T(A)) - \rho(A) \leq 0$. 再由上式知, $3 \leq a_1 \leq 6$. 由引理 7 和 $\rho(T(A)) - \rho(A) \leq 0$ 知, $U_A < 2a_1$. 这样, $a_1 + 4 \leq U_A \leq 2a_1 - 1$. 所以, $5 \leq a_1 \leq 6$.

对于 $5 \leq a_1 \leq 6$, $a_1 + 4 \leq U_A \leq 2a_1 - 1$, 直接计算知,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{a_1} + \sum_{n=U_A}^{2U_A-2} \left(\frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{\max\{n+a_1-1, 2(n-a_1)\}} \right) > 0. \quad (2.4)$$

当 $n \geq U_A$ 时, $a_n \geq \max\{n+a_1-1, 2(n-a_1)\}$, $n+a_1-1 \leq 2(n-2)$ (这里用到 $U_A \geq a_1 + 4$). 因此, $\min\{a_n, 2(n-2)\} \geq \max\{n+a_1-1, 2(n-a_1)\}$. 这样由 (2.3) 和 (2.4) 得到 $\rho(T(A)) - \rho(A) > 0$, 与 A 不能扩大矛盾.

情形 2 $h = 2$.

此时, $d_h = 3$. 由引理 5 知,

$$\rho(T(A)) - \rho(A) = \frac{1}{3} - \frac{1}{a_2} + \sum_{n=U_A}^{V_A} \left(\frac{1}{3(n-3)} - \frac{1}{\min\{a_n, 3(n-3)\}} \right). \quad (2.5)$$

由引理 3 知, $U_A \geq W_2 = 3d_2 - 2d_1 + 1 = 6$ 及

$$V_A \leq L_h(U_A) = \frac{1}{U_A - 2}((U_A + 1)(3U_A - 9) - U_A - 11)$$

$$\begin{aligned}
&= 3U_A - 9 + \frac{3(3U_A - 9) - U_A - 11}{U_A - 2} \\
&= 3U_A - 9 + \frac{8U_A - 38}{U_A - 2} \\
&= 3U_A - 1 - \frac{22}{U_A - 2}.
\end{aligned}$$

因此, $V_A \leq 3U_A - 2$. 当 $n \geq U_A$ 时, $a_n \geq 2(n - a_1) = 2(n - 2)$ 且 $3(n - 3) \geq 2(n - 2)$. 由 (2.5) 和引理 4 知,

$$\begin{aligned}
\rho(T(A)) - \rho(A) &\geq \frac{1}{3} - \frac{1}{a_2} + \sum_{n=U_A}^{3U_A-2} \left(\frac{1}{3(n-3)} - \frac{1}{2(n-2)} \right) \\
&\geq \frac{1}{3} - \frac{1}{a_2} + \sum_{n=U_A}^{3U_A-2} \left(\frac{1}{3(n-2)} - \frac{1}{2(n-2)} \right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{a_2} - \frac{1}{6} \sum_{n=U_A}^{3U_A-2} \frac{1}{n-2} \\
&\geq \frac{1}{3} - \frac{1}{a_2} - \frac{1}{6} \log \frac{3U_A - \frac{7}{2}}{U_A - \frac{5}{2}} \\
&\geq \frac{1}{3} - \frac{1}{a_2} - \frac{1}{6} \log \frac{29}{7}.
\end{aligned}$$

这里用到 $U_A \geq 6$. 由 A 不能扩大可知, $\rho(T(A)) - \rho(A) \leq 0$. 再由上式知, $a_2 \leq 10$. 由 $a_h > d_h$ ($h = 2$) 和 $d_2 = 3$ 知, $a_2 \geq 4$. 因此, $4 \leq a_2 \leq 10$. 由引理 7 和 $\rho(T(A)) - \rho(A) \leq 0$ 知, $U_A < 2a_2$. 由引理 3 知, $U_A \geq U_A(2) = \frac{1}{2}(a_2 + 8) = \frac{1}{2}a_2 + 4$. 当 $4 \leq a_2 \leq 10$, $\frac{1}{2}a_2 + 4 \leq U_A \leq 2a_2 - 1$ 时, 计算知,

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{a_2} + \sum_{n=U_A}^{3U_A-1-\lceil \frac{22}{U_A-2} \rceil} \left(\frac{1}{3n-9} - \frac{1}{\max\{2n-4, 3(n-a_2)\}} \right) > 0.$$

注意到, 当 $n \geq U_A$ 时, $a_n \geq \max\{2n-4, 3(n-a_2)\}$, $3(n-3) \geq \max\{2n-4, 3(n-a_2)\}$. 由 (2.5) 知,

$$\rho(T(A)) - \rho(A) \geq \frac{1}{3} - \frac{1}{a_2} + \sum_{n=U_A}^{3U_A-1-\lceil \frac{22}{U_A-2} \rceil} \left(\frac{1}{3n-9} - \frac{1}{\max\{2n-4, 3(n-a_2)\}} \right) > 0,$$

与 A 不能扩大矛盾.

情形 3 $3 \leq h \leq 11$.

由 A 不能扩大知, $\rho(T(A)) - \rho(A) \leq 0$. 由引理 8 知,

$$d_h + 1 \leq a_h \leq \left(\frac{1}{d_h} - \frac{1}{h(h+1)} \log \frac{h(W_h + 1)}{W_h - h} \right)^{-1}. \quad (2.6)$$

由引理 3 和 7 知,

$$W_h \leq U_A < a_h + \frac{a_h d_h}{h+1}. \quad (2.7)$$

若 $3 \leq h \leq 10$, 则对于满足 (2.6) 的 a_h 及满足 (2.7) 的 U_A , 计算知,

$$f(h, a_h, U_A, L_h(U_A)) > 0,$$

与引理 6 矛盾. 所以, $h \geq 11$. 若 $h = 11$, 则由 (2.6) 知, $a_{11} \leq 71$. 若 $h \geq 12$, 则 $a_{11} = d_{11} = 30$. 总之 $a_{11} \leq 71$.

至此, 定理 3 证毕. □

3 定理 2 的证明

因无和数列一定是 κ 数列, 因此, 要证明定理 1, 只要证明定理 2.

下面证明定理 2.

证明 设 A 为 κ 数列, 要估计 $\rho(A)$ 的上界, 由定理 3, 可设 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5, a_5 = 6, a_6 = 9, a_7 = 12, a_8 = 16, a_9 = 20, a_{10} = 25, a_{11} \leq 71$.

利用分部求和知,

$$\rho(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n) - A(n-1)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n)}{n(n+1)}.$$

令

$$\rho(r) = \sum_{2^{r-1} < n \leq 2^r} \frac{A(n)}{n(n+1)}, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

$$J(n) = \min_{1 \leq k \leq 10} \left[\frac{n}{k+1} + a_k \right].$$

我们有

$$\rho(A) = \sum_{r=0}^{\infty} \rho(r).$$

引理 9 ^[1, 引理 1] 对 κ 数列 A , 有

$$\rho(r) < \frac{\log 2}{k+1} + \frac{a_k}{2^r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots$$

设 γ 为正实数, $r_1 < r_2 < \dots$ 是所有大于 N 的满足如下条件的整数 r :

$$A(2^r) > \frac{\gamma 2^r}{r(r+1)}.$$

引理 10 ^[1, (3.14)] 设 N, M 和 H 为正整数, $M = 2H, R = N + H$, 则

$$\rho(A) \leq \sum_{r=0}^N \rho(r) + \frac{\gamma}{N+1} + \frac{3R^2 + 11R + 16}{\gamma 2^R} + \frac{1}{2^{H-1}} + \sum_{i=1}^M \left(\rho(r_i) - \frac{\gamma}{r_i(r_i+1)} \right).$$

取 $\gamma = 0.6442, N = 4, H = 24, M = 48, R = 28$. 注意到 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5, a_5 = 6, a_6 = 9, a_7 = 12, a_8 = 16$, 我们有

$$\sum_{r=0}^N \rho(r) = \sum_{n=1}^{16} \frac{A(n)}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^8 \frac{1}{a_i} - \frac{8}{17}.$$

计算知,

$$\sum_{i=1}^8 \frac{1}{a_i} - \frac{8}{17} + \frac{\gamma}{N+1} + \frac{3R^2 + 11R + 16}{\gamma 2^R} + \frac{1}{2^{H-1}} \leq 1.36522.$$

引理 11 $\rho(A) \leq 1.36522 + \sum_{i=1}^{48} \left(\rho(r_i) - \frac{0.6442}{r_i(r_i+1)} \right).$

引理 12 ^[5, 引理 3.4] 设 a, b 为正实数, c, r 为整数, $r \geq c \geq 3$, 则

$$\frac{a}{2^r} - \frac{b}{r(r+1)} \leq \max \left\{ 0, \frac{a}{2^c} - \frac{b}{c(c+1)} \right\}.$$

令

$$F(x) = \frac{x(x+1)\log 2}{0.6442 \times 2^x + x(x+1)}, \quad G(x) = \frac{0.6442}{x(x+1)}.$$

引理 13 [5, 引理 3.5] 设 $1 \leq j \leq i$, 则

$$\begin{aligned} \rho(r_i) - \frac{0.6442}{r_i(r_i+1)} &\leq \sum_{n=2^{r_i-1}+1}^{2^{r_i}} \frac{\min\{s_i, J(n)\}}{n(n+1)} - G(r_i), \\ \rho(r_i) - \frac{0.6442}{r_i(r_i+1)} &\leq F(r_j) + \max\{0, 2^{j-i} - G(r_j+i-j)\}, \\ \rho(r_i) - \frac{0.6442}{r_i(r_i+1)} &\leq \frac{\log 2}{s_j+1} + \max\{0, 2^{j-i} - G(r_j+i-j)\}, \end{aligned}$$

其中 $s_k = A(2^{r_k})$.

证明 当 $2^{r_i-1}+1 \leq n \leq 2^{r_i}$ 时, 由引理 1 知, $A(n) \leq J(n)$. 由 s_i 的定义知, $A(n) \leq A(2^{r_i}) = s_i$. 因此,

$$A(n) \leq \min\{s_i, J(n)\}.$$

注意到

$$\rho(r_i) = \sum_{n=2^{r_i-1}+1}^{2^{r_i}} \frac{A(n)}{n(n+1)},$$

引理 13 中第一个不等式成立.

现在证明后两个不等式.

由引理 9 知,

$$\rho(r_i) < \frac{\log 2}{s_j+1} + \frac{a_{s_j}}{2^{r_i}}. \quad (3.1)$$

由 $s_j = A(2^{r_j})$ 知, $a_{s_j} \leq 2^{r_j}$. 由 (3.1) 知,

$$\rho(r_i) < \frac{\log 2}{s_j+1} + \frac{1}{2^{r_i-r_j}}.$$

由 r_j 的定义知,

$$s_j = A(2^{r_j}) > \frac{0.6442 \times 2^{r_j}}{r_j(r_j+1)}.$$

这样

$$\frac{\log 2}{s_j+1} < \frac{r_j(r_j+1)\log 2}{0.6442 \times 2^{r_j} + r_j(r_j+1)} = F(r_j).$$

由于 $1 \leq j \leq i$, 故 $r_i - r_j = (r_i - r_{i-1}) + \cdots + (r_{j+1} - r_j) \geq i - j$, 即 $r_i \geq r_j + i - j$. 由引理 12 知,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{r_i-r_j}} - \frac{0.6442}{r_i(r_i+1)} &\leq \max\left\{0, \frac{2^{r_j}}{2^{r_j+i-j}} - \frac{0.6442}{(r_j+i-j)(r_j+i-j+1)}\right\} \\ &= \max\{0, 2^{j-i} - G(r_j+i-j)\}. \end{aligned}$$

所以,

$$\rho(r_i) - \frac{0.6442}{r_i(r_i+1)} < \frac{\log 2}{s_j+1} + \frac{1}{2^{r_i-r_j}} - \frac{0.6442}{r_i(r_i+1)}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq F(r_j) + \max\{0, 2^{j-i} - G(r_j + i - j)\}. \\
 \rho(r_i) - \frac{0.6442}{r_i(r_i + 1)} &< \frac{\log 2}{s_j + 1} + \frac{1}{2^{r_i - r_j}} - \frac{0.6442}{r_i(r_i + 1)} \\
 &\leq \frac{\log 2}{s_j + 1} + \max\{0, 2^{j-i} - G(r_j + i - j)\}.
 \end{aligned}$$

引理 13 得证. □

对 $i \geq 1$, 令

$$\begin{aligned}
 A_i(t) &= \sum_{n=2^{i+3}+1}^{2^{i+4}} \frac{\min\{t, J(n)\}}{n(n+1)} - G(i+4), \\
 H(i, j) &= \max_{0 \leq k \leq 50} (F(j+k+4) + \max\{0, 2^{j-i} - G(i+k+4)\}), \\
 B_i &= \min_{1 \leq j \leq i} \max\{H(i, j), F(j+55) + 2^{j-i}\}, \\
 J(i, j, t) &= \frac{\log 2}{t+1} + \max\{0, 2^{i-j} - G(j+4)\}, \quad 1 \leq i \leq j.
 \end{aligned}$$

为了方便, 我们将 B_i ($7 \leq i \leq 48$) 的上界罗列如下.

引理 14

$$\begin{aligned}
 B_7 &< 0.3307714282, & B_8 &< 0.2690222440, & B_9 &< 0.2075519810, \\
 B_{10} &< 0.1584970468, & B_{11} &< 0.1228586682, & B_{12} &< 0.0919244525, \\
 B_{13} &< 0.0678369952, & B_{14} &< 0.0524335982, & B_{15} &< 0.0370376631, \\
 B_{16} &< 0.0276134093, & B_{17} &< 0.0199403465, & B_{18} &< 0.0143315078, \\
 B_{19} &< 0.0105313514, & B_{20} &< 0.0072697390, & B_{21} &< 0.0053992037, \\
 B_{22} &< 0.0035383711, & B_{23} &< 0.0025019253, & B_{24} &< 0.0015841295, \\
 B_{25} &< 0.0010150895, & B_{26} &< 0.0007789868, & B_{27} &< 0.0004882814, \\
 B_{28} &< 0.0004307093, & B_{29} &< 0.0002441407, & B_{30} &< 0.0002369564, \\
 B_{31} &< 0.0001297820, & B_{32} &< 0.0001220705, & B_{33} &< 0.0000707963, \\
 B_{34} &< 0.0000610353, & B_{35} &< 0.0000384781, & B_{36} &< 0.0000305177, \\
 B_{37} &< 0.0000208429, & B_{38} &< 0.0000152589, & B_{39} &< 0.0000112553, \\
 B_{40} &< 0.0000076295, & B_{41} &< 0.0000060607, & B_{42} &< 0.0000038148, \\
 B_{43} &< 0.0000032549, & B_{44} &< 0.0000019075, & B_{45} &< 0.0000017437, \\
 B_{46} &< 0.0000009538, & B_{47} &< 0.0000009320, & B_{48} &< 0.0000004971.
 \end{aligned}$$

引理 15 ^[5, 引理 3.7] 当 $r_i = i + 4$ 时, 有

$$\rho(r_i) - \frac{0.6442}{r_i(r_i + 1)} \leq A_i(s_i),$$

对 $i \geq 1$, 有

$$\rho(r_i) - \frac{0.6442}{r_i(r_i + 1)} \leq B_i,$$

当 $r_i = i + 4$, $1 \leq i \leq j$ 时, 有

$$\rho(r_j) - \frac{0.6442}{r_j(r_j + 1)} \leq J(i, j, s_i).$$

证明 第一和第三个不等式由引理 13 的第一和第三个不等式得到.

下证第二个不等式. 对于 $1 \leq j \leq i$, 令 $r_j = N + j + k = j + k + 4$, $k \geq 0$. 由引理 13 的第二个不等式得到

$$\rho(r_i) - \frac{0.6442}{r_i(r_i + 1)} \leq F(j + k + 4) + \max\{0, 2^{j-i} - G(i + k + 4)\}. \quad (3.2)$$

当 $0 \leq k \leq 50$ 时, (3.2) 的右边 $\leq H(i, j)$; 当 $k \geq 51$ 时, (3.2) 的右边 $\leq F(j + 55) + 2^{j-i}$. 所以, (3.2) 的右边 $\leq B_i$. 引理 15 得证. $\square$

当 $5 \leq r \leq 11$ 时,

$$A(2^r) \geq A(32) \geq 10 > \frac{0.6442 \times 2^r}{r(r + 1)}.$$

因此, $r_i = N + i = 4 + i$ ($1 \leq i \leq 7$). 设 $r_i = N + i = 4 + i$ ($1 \leq i \leq l - 1$), $r_l > N + l = 4 + l$, 则 $l \geq 8$. 令 $T_1 = \{\emptyset\}$, $T_2 = \{8\}$, $T_3 = \{9, 10\}$, $T_4 = \{11, 12\}$, $T_5 = \{13\}$, $T_6 = \{14, 15\}$, $T_7 = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22\}$,

$$L_i = \rho(r_i) - \frac{0.6442}{r_i(r_i + 1)} + \sum_{j \in T_i} \left(\rho(r_j) - \frac{0.6442}{r_j(r_j + 1)} \right), \quad 1 \leq i \leq 7. \quad (3.3)$$

当 $1 \leq i \leq 7$ 时, $r_i = 4 + i$. 由引理 15 知,

$$\rho(r_i) - \frac{0.6442}{r_i(r_i + 1)} \leq A_i(s_i), \quad (3.4)$$

$$\rho(r_j) - \frac{0.6442}{r_j(r_j + 1)} \leq \min\{B_j, J(i, j, s_i)\}, \quad j \geq 8. \quad (3.5)$$

由 (3.3)–(3.5) 知,

$$L_i \leq A_i(s_i) + \sum_{j \in T_i} \min\{B_j, J(i, j, s_i)\}, \quad 1 \leq i \leq 7.$$

令

$$Z_i = \max_{10 \leq s \leq J(2^{i+4})} \left(A_i(s) + \sum_{j \in T_i} \min\{B_j, J(i, j, s)\} \right), \quad 1 \leq i \leq 7.$$

计算知, $Z_1 < 0.239116$, $Z_2 < 0.232983$, $Z_3 < 0.216581$, $Z_4 < 0.162356$, $Z_5 < 0.110738$, $Z_6 < 0.0953729$, $Z_7 < 0.0957598$.

所以, 由引理 11, 14 和 15, 有

$$\begin{aligned} \rho(A) &< 1.36522 + \sum_{i=1}^{48} \left(\rho(r_i) - \frac{0.6442}{r_i(r_i + 1)} \right) \\ &= 1.36522 + \sum_{i=1}^7 L_i + \sum_{i=23}^{48} \left(\rho(r_i) - \frac{0.6442}{r_i(r_i + 1)} \right) \\ &\leq 1.36522 + \sum_{i=1}^7 Z_i + \sum_{i=23}^{48} B_i \\ &< 2.526. \end{aligned}$$

至此, 定理 2 证毕. $\square$

因无和数列一定是 κ 数列, 因此, 定理 1 亦得证.

致谢 感谢审稿人对本文修改提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Levine E, O'Sullivan J. An upper estimate for the reciprocal sum of a sum-free sequence. *Acta Arith*, 1977, 23: 9–24
- 2 Abbott H L. On sum-free sequences. *Acta Arith*, 1987, 48: 93–96
- 3 Yang S C. Note on the reciprocal sum of a sum-free sequence. *J Math Res Exposition*, 2009, 29: 753–755
- 4 Erdős P. Some remarks on number theory III. *Mat Lapok (NS)*, 1962, 13: 28–38
- 5 Chen Y G. On the reciprocal sum of a sum-free sequence. *Sci China Math*, 2013, 56: 951–966
- 6 Deshouillers J, Erdős P, Melfi G. On a question about sum-free sequences. *Discrete Math*, 1999, 200: 49–54
- 7 Levine E. An extremal result for sum-free sequences. *J Number Theory*, 1980, 12: 251–257

On the reciprocal sum of sum-free sequences

WU JianDong

Abstract Let $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ be a strictly increasing sequence of positive integers. A is called a sum-free sequence if no a_i is the sum of two or more distinct earlier terms. The number $\rho(A) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots$ is called the reciprocal sum of A . In 1962, Erdős proved that $\rho(A) < 103$ for any sum-free sequence A . In 1977, Levine and O'Sullivan improved this considerably to $\rho(A) < 3.9998$. Recently, Chen improved it to $\rho(A) < 3.0752$. In this note, we prove that, for any sum-free sequence $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ with $2 \leq a_1 < a_2 < \dots$, we have $\rho(A) < 2.526$.

Keywords sum-free sequence, κ -sequence, Erdős reciprocal sum constants

MSC(2010) 11B75

doi: 10.1360/N012013-00102