论文

结构的刚-热弹耦合稳定性问题研究

冯晓九^①, 梁立孚^②, 郭庆勇^{②*}^① 常州大学环境与安全工程学院, 常州 213164;^② 哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院, 哈尔滨 150001

* E-mail: qingyong622@126.com

收稿日期: 2016-04-13; 接受日期: 2016-06-26; 网络出版日期: 2016-09-28

国家自然科学基金(批准号: 10272034)资助项目

摘要 对于刚-热弹耦合动力学这类学科交叉问题, 尚无现成的控制方程可以利用. 由于变分原理是从总体上把握事物, 便于应用功能转化原理和能量守恒定律来研究问题. 应用刚-热弹耦合动力学的变分原理, 不仅可以建立刚-热弹耦合动力学的控制方程, 而且可以为刚-热弹耦合动力学的有限元建模提供方便. 本文根据功能转化原理和能量守恒定律, 建立刚-热弹耦合动力学变分原理, 给出刚-热弹耦合动力学变分原理的驻值条件, 得到刚-热弹耦合动力学的控制方程, 并且, 将以上成果转化为非惯性坐标系中的静力学问题. 作为该理论的应用, 研究了结构的刚-热弹耦合稳定性问题. 在非惯性坐标系中, 给出两向应力状态刚-热弹耦合临界应力. 最后, 讨论了有关问题.

关键词 刚-热弹耦合动力学, 变分原理, 结构稳定性, 刚-热弹耦合的临界应力

1 引言

高超声速飞行器因其特殊的应用价值而成为当前国际研究的热点, 而随着航天飞行器速度的提高, 气动加热现象趋于严重. 为了得到更准确的分析结果, 航天飞行器设计中越来越多的开始计入热-弹耦合效应的影响^[1,2]. 国内外学者已经进行了有益的研究, 可供我们参考和借鉴.

Krishna 和 Bainum^[3]改进了模拟暴露于太阳辐射下的自由梁和板的偏差的计算方法, 考虑了表面反射率和入射角的影响. Thornton 和 Kim^[4]对哈勃太空望远镜的太阳帆板进行了简化, 考虑了支撑杆弹

性变形与热辐射强度的耦合, 研究了结构的热诱发振动现象, 得到了系统稳定性的判据. Johnston 和 Thornton^[5]在温度变化确定的情况下, 用有限单元法研究了热效应对航天器姿态动力学的影响. Johnston 在建模过程考虑了刚体运动和弹性变形的耦合, 但是基于线弹性假设, 忽视了几何非线性效应. 为了考虑温度变化对刚-柔耦合动力学性态的影响, Oguamanam 等人^[6]对受热载荷且存在平面运动的柔性体进行了研究, 采用 16 节点的等参拉格朗日插值的单元, 在温度变化规律为已知的情况下分别建立了中心刚体-曲梁系统和中心刚体-薄板系统的动力学模型, 考虑了几何非线性效应, 但未考虑温度和变

引用格式: 冯晓九, 梁立孚, 郭庆勇. 结构的刚-热弹耦合稳定性问题研究. 中国科学: 技术科学, 2016, 46: 1039–1047
Feng X J, Liang L F, Guo Q Y. Investigation of structural stability of rigid-thermo-elastic coupling (in Chinese). Sci Sin Tech, 2016, 46: 1039–1047, doi: 10.1360/N092016-00142

形的耦合, 也没有对温度变化规律未知的情况做进一步研究. Cannarozzi 和 Ubertini^[7], Kidawa-Kukla^[8], Hosseini-Tehrani 和 Eslami^[9], Mahi 等人^[10]都在这一研究领域做了有益的工作.

由于我国航天工程发展的需求, 我国学者在这一领域也做出重要贡献. 刘锦阳和洪嘉振^[11]同时考虑了几何非线性和热效应, 用假设模态法对各柔性梁进行离散, 从虚功原理出发, 建立了带集中质量的柔性梁系统的动力学方程, 研究了几何非线性和热效应的综合影响. 王捷和刘锦阳^[12]以哈勃天文望远镜(HST)为研究对象, 基于柔性多体系统动力学理论, 考虑了柔性附件弹性变形引起的热辐射边界条件的变化, 建立了中心刚体和太阳能毯柔性附件多体系统的刚-柔-热耦合的动力学方程. 用假设模态法进行离散, 对 HST 双侧太阳翼的振动特性进行分析, 研究系统各特征参数对于柔性附件热颤振的影响. 潘科琪和刘锦阳^[13]研究了在热冲击下任意形状(仅一个方向有曲率)复合材料壳的非线性刚-柔耦合动力学响应. 根据 Mindlin 理论, 建立了任意形状的复合材料壳的非线性应变-位移关系. 借助于数学理论以及几何关系, 描述了壳上任意点的变曲率. 用虚功原理建立了动力学变分方程, 并采用等参单元对壳的连续动力学方程进行离散, 建立了中心刚体-复合材料壳的刚-柔耦合动力学方程, 分析了在热冲击作用下复合材料壳的线性、非线性的动力学特性, 以及曲率、材料特性对动力学响应的影响. 蒋卓良^[14]研究了太阳帆板在热载荷作用下的固有频率和动态响应. 史晓鸣和杨炳渊^[15], 王宏宏等人^[16], 李忠学和严宗达^[17]也在这一研究领域做了有益的工作.

文献[18,19]将航天动力学处理为刚-弹耦合动力学问题取得成功. 由于高超声速飞行器的飞行马赫数高, 气动加热效应大, 在飞行过程中承受着严酷的气动力载荷和气动热载荷, 因此, 本文将之处理为刚-热弹耦合动力学问题. 本文应用刚-热弹耦合动力学变分原理来研究结构的刚-热弹耦合稳定性问题.

2 刚-热弹耦合动力学的变分原理

刚-热弹耦合动力学的控制方程, 不是刚体动力学和热弹性动力学的控制方程的叠加, 而是还要增加一些耦合项. 因此, 对于如同刚-热弹耦合动力学这样的学科杂交的问题, 尚无现成的控制方程可以

利用. 由于变分原理是从总体上把握事物, 便于应用功能转化原理和能量守恒定律来研究问题, 应用变分原理研究这类耦合动力学问题是一条可行的途径. 应用刚-热弹耦合动力学的变分原理, 不仅可以建立刚-热弹耦合动力学的控制方程, 而且可以为刚-热弹耦合动力学的有限元建模提供方便.

将高速飞行器视为刚-热弹耦合自由体, 简化为图1所示的力学模型. 图1中, e 坐标系为惯性坐标系, b 坐标为连体坐标系(本文中取之为非惯性坐标系), 其坐标原点为质心. X^c 为在坐标系 e 中给出自由体质心的矢径. x 是把自由体视为刚体时由质心到刚体中任意一点 P 的矢径, 显然 x 为常量. u 为把自由体视为变形体时该点的弹性位移. 其余如图1所示. 所以自由体中质量为 dm 的任意一点 P 在坐标系 e 中的位置矢量为 $R = X^c + x + u$.

2.1 一类变量的刚-热弹耦合动力学变分原理

对于刚-热弹耦合自由体, 如果认为作用在变形体上的外力(包括体积力 f 和面积力 $\bar{T}$)为保守力, 导致刚体运动的力也为保守力, 即作用于刚体质心的主矢 F 和主矩 M 为广义保守力, 则 Hamilton 原理泛函为

$$\begin{aligned} \pi_{H1} = & \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_m \left(\frac{1}{2} \frac{dX^c}{dt} \cdot \frac{dX^c}{dt} + \frac{dX}{dt} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{1}{2} \frac{du}{dt} \cdot \frac{du}{dt} \right) dm \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \cdot H^c - \pi_1 + F \cdot X^c + M \cdot \theta \right] dt \\ = & \int_{t_0}^{t_1} \left[\iiint_V \left(\frac{1}{2} \rho \frac{dX^c}{dt} \cdot \frac{dX^c}{dt} + \rho \frac{dX}{dt} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{1}{2} \rho \frac{du}{dt} \cdot \frac{du}{dt} \right) dV \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \cdot H^c - \pi_1 + F \cdot X^c + M \cdot \theta \right] dt, \end{aligned} \quad (1)$$

图1 自由体的 e 坐标系和 b 坐标系

$$\pi_1 = \iiint_V \left[A \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right) - \frac{\partial A \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)}{\partial \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)} : \mathbf{I} \alpha \Delta T - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right] dV - \iint_{S_\sigma} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} dS. \quad (2)$$

其先决条件为

$$\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \text{ (在 } S_u \text{ 上)}, \quad (3)$$

式中, $\mathbf{u}$ 为位移, $\bar{\mathbf{u}}$ 为边界位移, V 为体积, S_σ 为应力边界面, S_u 为位移边界面, A 为应变能密度, t 为时间, ρ 为物质密度, m 为质量; $\mathbf{H}^c$ 为对质心的动量矩, 有时记为 $\mathbf{H}^c = \mathbf{J} \cdot \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$, $\mathbf{J}$ 为对质心的转动惯量; ∇ 为

Hamilton 算子. T 为绝对温度, α 为热膨胀系数.

经过严格的数学推演, 可以推导出 Hamilton 原理的驻值条件为

$$-\iiint_V \rho \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} + \frac{d^2 \mathbf{X}^c}{dt^2} \right) dV + \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

$$\iiint_V \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{x} \right) dV - \frac{d\mathbf{H}^c}{dt} + \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

$$-\rho \left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + 2 \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}}{dt^2} \times \mathbf{u} + \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \mathbf{u} \right) + \frac{d^2 \mathbf{X}^c}{dt^2} + \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}}{dt^2} \times \mathbf{x} + \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \mathbf{x} \right) \right] + (\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \cdot \left[\frac{\partial A \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)}{\partial \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)} - \frac{\partial^2 A \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)}{\partial \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right] \cdot \nabla + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

$$(\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \cdot \left[\frac{\partial A \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)}{\partial \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)} - \frac{\partial^2 A \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)}{\partial \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right] \cdot \mathbf{n} - \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{0}, \text{ (在 } S_\sigma \text{ 上)}. \quad (11)$$

$$-\frac{\partial^2 A \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)}{\partial \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right] \cdot \mathbf{n} - \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

当相对速度 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{0}$ 时, 以上各式变换为

$$-\iiint_V \rho \frac{d^2 \mathbf{X}^c}{dt^2} dV + \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

$$-\frac{d\mathbf{H}^c}{dt} + \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{X}^c}{dt^2} + \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}}{dt^2} \times \mathbf{x} + \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \mathbf{x} \right) + (\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \cdot \left[\frac{\partial A \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)}{\partial \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)} - \frac{\partial^2 A \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)}{\partial \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right] \cdot \nabla + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \text{ (在 } V \text{ 中)}, \quad (10)$$

$$(\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \cdot \left[\frac{\partial A \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)}{\partial \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)} - \frac{\partial^2 A \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)}{\partial \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right)^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right] \cdot \mathbf{n} - \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{0}, \text{ (在 } S_\sigma \text{ 上)}. \quad (11)$$

我们注意到, 式(11)与(7)相比, 形式上没有变化,

但其内涵发生了变化, 式(7)是 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \neq \mathbf{0}$ 时得到的结果, 它是非惯性坐标系 $\mathbf{b}$ 中的动力学问题的力学边界条件, 式(11)是 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{0}$ 时得到的, 它已经变化为非惯性坐标系 $\mathbf{b}$ 中的静力学问题的力学边界条件了.

2.2 二类变量的刚-热弹耦合动力学变分原理

应用对合变换^[20], 可将刚-热弹耦合动力学一类变量的 Hamilton 原理式(1)~(3)变换为刚-热弹耦合动

力学两类变量的 Hamilton 原理

$$\pi_{H2} = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iiint_V \rho \left[\frac{1}{2} \mathbf{v}^c \cdot \mathbf{v}^c + (\mathbf{v}^c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}^d + \frac{1}{2} \mathbf{v}^d \cdot \mathbf{v}^d \right] dV + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} - \pi_2 + \mathbf{F} \cdot \mathbf{X}^c + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\theta} \right\} dt, \quad (12)$$

$$\pi_2 = \iiint_V \left[A(\mathbf{E}) - \frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} : \mathbf{I} \alpha \Delta T - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right] dV - \iint_{S_\sigma} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} dS = 0. \quad (13)$$

其先决条件为

$$\begin{cases} \mathbf{v}^c - \frac{d\mathbf{X}^c}{dt} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\omega} - \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla), \\ \mathbf{v}^d - \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{v}^d - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \mathbf{u} \right) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (\text{在 } S_u \text{ 上}), \end{cases} \quad (14)$$

式中, $\mathbf{v}^c$ 为质心运动速度, $\mathbf{v}^d$ 为弹性变形速度, $\boldsymbol{\omega}$ 为转动角速度, $\mathbf{E}$ 为应变张量.

以下推导刚-热弹耦合动力学两类变量的 Hamilton 原理的驻值条件. 为此, 将 π_{H2} 变分, 并令 $\delta\pi_{H2} = 0$, 可得

$$\begin{aligned} \delta\pi_{H2} = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iiint_V \rho \left[\mathbf{v}^c \cdot \delta\mathbf{v}^c + (\mathbf{v}^c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{v}^d + \mathbf{v}^d \cdot \delta(\mathbf{v}^c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) + \mathbf{v}^d \cdot \delta\mathbf{v}^d \right] dV \right. \\ & + \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \delta\boldsymbol{\omega} - \iiint_V \left[\left(\frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial^2 A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right) : \delta\mathbf{E} - \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} \right] dV \\ & \left. - \iint_{S_\sigma} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta\mathbf{u} dS + \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{X}^c + \mathbf{M} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \right\} dt \\ = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iiint_V \rho \left[(\mathbf{v}^c + \mathbf{v}^d) \cdot \delta\mathbf{v}^c + (\mathbf{v}^c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{v}^d) \cdot \delta\mathbf{v}^d - (\mathbf{v}^d \times \mathbf{x}) \cdot \delta\boldsymbol{\omega} \right] dV \right. \\ & \left. + \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \delta\boldsymbol{\omega} - \iiint_V \left[\left(\frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial^2 A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right) : \delta\mathbf{E} - \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} \right] dV \right\} dt \end{aligned}$$

$$- \iint_{S_\sigma} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta\mathbf{u} dS + \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{X}^c + \mathbf{M} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \left\} dt = 0. \quad (15)$$

先决条件的变分式为

$$\begin{cases} \delta\mathbf{v}^c - \delta \frac{d\mathbf{X}^c}{dt} = \mathbf{0}, \\ \delta\boldsymbol{\omega} - \delta \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \mathbf{0}, \\ \delta\mathbf{E} - \frac{1}{2} \delta(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla) = \mathbf{0}, \\ \delta\mathbf{v}^d - \delta \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \delta\mathbf{v}^d - \delta \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \mathbf{u} \right) = \mathbf{0}, \\ \delta\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (\text{在 } S_u \text{ 上}). \end{cases} \quad (16)$$

将(16)代入(15)式, 可得

$$\begin{aligned} \delta\pi_{H2} = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iiint_V \left[\rho(\mathbf{v}^c + \mathbf{v}^d) \cdot \delta \frac{d\mathbf{X}^c}{dt} + \rho(\mathbf{v}^c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{v}^d) \cdot \delta \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right] dV \right. \\ & - \iiint_V \rho(\mathbf{v}^d \times \mathbf{x}) \cdot \delta \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} dV + \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \delta \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} + \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{X}^c + \mathbf{M} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \\ & \left. - \iiint_V \left[\left(\frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial^2 A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right) : \delta\mathbf{E} - \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} \right] dV - \iint_{S_\sigma} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta\mathbf{u} dS \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

进行分部积分, 则有

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \rho(\mathbf{v}^c + \mathbf{v}^d) \cdot \delta \frac{d\mathbf{X}^c}{dt} dt \\ = & \rho(\mathbf{v}^c + \mathbf{v}^d) \cdot \delta\mathbf{X}^c \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \rho \left(\frac{d\mathbf{v}^c}{dt} + \frac{d\mathbf{v}^d}{dt} \right) \cdot \delta\mathbf{X}^c dt, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \rho(\mathbf{v}^c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{v}^d) \cdot \delta \frac{d\mathbf{u}}{dt} dt \\ = & \rho(\mathbf{v}^c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{v}^d) \cdot \delta\mathbf{u} \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{v}^c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{v}^d) \cdot \delta\mathbf{u} dt, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{t_0}^{t_1} \rho(\mathbf{v}^d \times \mathbf{x}) \cdot \delta \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} dt \\ = & -\rho(\mathbf{v}^d \times \mathbf{x}) \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{v}^d \times \mathbf{x}) \cdot \delta\boldsymbol{\theta} dt, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \delta \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} dt = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} dt. \quad (21)$$

应用 Green 定理, 则有

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial^2 A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right) : \delta \mathbf{E} dV \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial^2 A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right) \\ & \quad : \delta \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \nabla + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \nabla \right) dV \\ &= \iiint_V \left[(\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \cdot \left(\frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial^2 A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right) \right] : \mathbf{u} \nabla dV \\ &= \iint_{S_\sigma + S_u} \left[(\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \cdot \left(\frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial^2 A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right) \cdot \mathbf{n} \right] \cdot \delta \mathbf{u} dS \\ & \quad - \iiint_V \left[(\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \cdot \left(\frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial^2 A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right) \cdot \nabla \right] \cdot \delta \mathbf{u} dV. \end{aligned} \quad (22)$$

将式(18)~(22)代入式(17), 考虑到位移边界条件 $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$, (23)

并且按惯例在时域边界 $t = t_0$ 和 $t = t_1$ 处, 取 $\delta \mathbf{X}^c$, $\delta \boldsymbol{\theta}$, $\delta \mathbf{u}$ 等于零, 可得

$$\begin{aligned} \delta \pi_{H2} = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ - \iiint_V \left[\rho \left(\frac{d\mathbf{v}^c}{dt} + \frac{d\mathbf{v}^d}{dt} \right) dV + \mathbf{F} \right] \cdot \delta \mathbf{X}^c \right. \\ & + \left[\iiint_V \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{v}^d \times \mathbf{x}) dV - \frac{d}{dt} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M} \right] \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \\ & - \iiint_V \rho \left[\frac{d\mathbf{v}^c}{dt} + \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) + \frac{d\mathbf{v}^d}{dt} \right] \cdot \delta \mathbf{u} dV \\ & + \iiint_V \left[(\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \cdot \left(\frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial^2 A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right) \cdot \nabla + \mathbf{f} \right] \cdot \delta \mathbf{u} dV \\ & \left. - \iint_{S_\sigma} \left[(\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \cdot \left(\frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial^2 A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right) \cdot \mathbf{n} - \bar{\mathbf{T}} \right] \cdot \delta \mathbf{u} dS \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

由于 $\delta \mathbf{X}^c$, $\delta \boldsymbol{\theta}$, $\delta \mathbf{u}$ 的任意性, 故由式(24)可得驻值条件为

$$- \iiint_V \rho \left(\frac{d\mathbf{v}^c}{dt} + \frac{d\mathbf{v}^d}{dt} \right) dV + \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (25)$$

$$\iiint_V \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{v}^d \times \mathbf{x}) dV - \frac{d}{dt} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & -\rho \frac{d\mathbf{v}^c}{dt} - \rho \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - \rho \frac{d\mathbf{v}^d}{dt} + (\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \\ & \cdot \left[\frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial^2 A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right] \cdot \nabla + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (\text{在 } V \text{ 中}), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \cdot \left[\frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial^2 A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right] \cdot \mathbf{n} \\ & - \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{0}, \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}). \end{aligned} \quad (28)$$

明显可见, 刚-热弹耦合动力学两类变量的 Hamilton 原理的驻值条件与其先决条件一起, 构成封闭的微分方程组. 若将运动学方程和几何方程代入式(25)~(28)中, 经变换可得式(8)~(11).

当相对速度 $\mathbf{v}^d = \mathbf{0}$ 时, 以上各式变换为

$$- \iiint_V \rho \frac{d\mathbf{v}^c}{dt} dV + \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (29)$$

$$-\frac{d}{dt} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & -\rho \frac{d\mathbf{v}^c}{dt} - \rho \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) + (\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \\ & \cdot \left[\frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial^2 A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right] \cdot \nabla + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (\text{在 } V \text{ 中}), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I} + \mathbf{u} \nabla) \cdot \left[\frac{\partial A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial^2 A(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} : \mathbf{I} \alpha \Delta T \right] \cdot \mathbf{n} \\ & - \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{0}, \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}). \end{aligned} \quad (32)$$

我们注意到, 式(32)与(28)相比, 形式上没有变化, 但其内涵发生了变化, 式(28)是 $\mathbf{v}^d \neq \mathbf{0}$ 时得到的结果, 它是非惯性坐标系 $\mathbf{b}$ 中的动力学问题的力学边界条件, 式(32)是 $\mathbf{v}^d = \mathbf{0}$ 时得到的结果, 它已经变化为非惯性坐标系 $\mathbf{b}$ 中的静力学问题的力学边界条件了.

3 算例

本节以高速飞行器为例讨论应用刚-热弹耦合动力学变分原理来研究结构的刚-热弹耦合稳定性问题. 假设高速飞行器处于类似俯冲拉起的机动飞行状态, 在飞行器质心建立的与飞行器结构固连的坐标系是非惯性坐标系. 在这个坐标系中, 大范围的刚体运动与弹性变形体之间的耦合体现为惯性耦合, 高速飞行器的升力、阻力、推力和惯性力组成平衡力系, 形成刚-弹耦合问题. 如果再考虑高速飞行器的空气动

力加热引起的热效应, 则可以出现刚-热弹耦合效应, 形成刚-热弹耦合问题.

在高速飞行器升力、阻力、推力和惯性力组成的平衡力系作用之下, 飞行器结构产生弹性变形. 飞行器的翼面的上壁板处于受压状态, 下壁板处于受拉状态. 本文将研究飞行器的翼面上壁板的刚-热弹性稳定性问题.

假设飞行器的翼面简化为单块式结构, 可以将纵向构件和横向构件交叉形成的网格中镶嵌的蒙皮简化为四边简支的矩形板. 不妨取出其中的一块板, 研究其刚-热弹性稳定性. 讨论考虑刚-热弹耦合效应的问题. 即在考虑高速飞行器处于类似俯冲拉起机动飞行状态引起内应力的同时, 考虑高速飞行器的空气动力加热引起的热效应问题.

如图 2 所示四边简支的矩形板, b 为板的宽度, a 为板的长度, h 为板的厚度. 在 $x=0$ 及 $x=a$ 的两边和在 $y=0$ 及 $y=b$ 的两边上均为简单铰链支持.

将薄板的相关参数纳入方程式(10)中, 可得各向同性板弯曲微分方程为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left[q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]. \quad (33)$$

其位移边界条件为

$$w_{x=0} = 0, w_{x=a} = 0, w_{y=0} = 0, w_{y=b} = 0, \quad (34)$$

式中, w 为薄板的挠度, N_x, N_y, N_{xy} 及 N_{yx} 表示作用在板每单位长度内的法向力与剪力, N_x, N_y, N_{xy} 及 N_{yx} 和横向载荷 q 中都包含惯性耦合导致的惯性力分量.

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 为板的弯曲刚度, E 为各向同性板的弹性模量, ν 为泊松系数.

当横向载荷 $q=0$, 纵向的中面力 $N_{xy}=N_{yx}=0$, $N_x=$

图 2 双向压力 σ_x, σ_y 和温升 ΔT 共同作用的四边简支板

$h\sigma_x$ 和 $N_y=h\sigma_y$ 时, 则式(33)变换为

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = h\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h\sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (35)$$

当高速飞行器的展弦比较小时, 这样做比较接近实际情况. 由于应力载荷和热应力载荷同时作用时, $\sigma_x = \sigma_{xre} + \sigma_T$, $\sigma_y = \sigma_{yre} + \sigma_T$, 其中, σ_{xre} 和 σ_{yre} 为刚-弹耦合产生的应力, σ_T 为热应力. 在逐渐增大的压应力 σ_x 和 σ_y 作用下使板由原来的平衡稳定状态开始变为不稳定, 即板面发生挠曲.

将板的挠度函数以三角级数表示出来

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (36)$$

该级数函数满足四边简支的边界条件. 其中 m 与 n 可以是任意正整数, 即 m 或 $n=1,2,3,\dots$. 从挠度函数的变化规律来看, m 与 n 均表示挠度半波的数目. A_{mn} 为幅值.

将式(36)代入式(35)中, 可得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \pi^2 A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \left[\pi^2 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - (\sigma_{xre} + \sigma_T) h \frac{m^2}{a^2} - (\sigma_{yre} + \sigma_T) h \frac{n^2}{b^2} \right] = 0. \quad (37)$$

上式中总的值为零, 括号前之值不可能处处为零, 只可能括号内之值为零, 可得

$$\begin{aligned} & (\sigma_{xre} + \sigma_T) h \frac{m^2}{a^2} + (\sigma_{yre} + \sigma_T) h \frac{n^2}{b^2} \\ & = D\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (38)$$

如果简化为 $\sigma_{xre} + \sigma_T = \sigma_{yre} + \sigma_T = \sigma$, 并令 $\sigma_E = \frac{\pi^2 D}{a^2 h}$,

则有

$$\sigma = \sigma_T \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (39)$$

当 $m=n=1$ 时, 则有临界应力

$$\sigma_{cr} = \sigma_E \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (40)$$

当板为正方形时, 临界应力为

$$\sigma_{cr} = 2\sigma_E. \quad (41)$$

这里指出, 诸多学者研究仅仅在温度场作用下板的稳定性问题, 从而推导出临界温度的表达式. 这

类研究是重要的, 有益的. 可是, 在多数情况下板要承受外力和温度的联合作用, 这就不能应用这些学者的理论来处理问题了. 本节研究刚-热弹耦合的情况, 弹性应力和热应力的合力达到临界应力, 薄板开始失稳. 但是, 要注意, 这时板的热屈曲临界温度不再是仅仅在温度场作用下板的临界温度了.

当应力载荷和热应力载荷同时作用时, 满足式(38). 将式(38)展开可得

$$\begin{aligned} & \sigma_{xre} h \frac{m^2}{a^2} + \sigma_{yre} h \frac{n^2}{b^2} + \sigma_T h \frac{m^2}{a^2} + \sigma_T h \frac{n^2}{b^2} \\ &= D\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (42)$$

移项可得

$$\begin{aligned} & \sigma_T h \frac{m^2}{a^2} + \sigma_T h \frac{n^2}{b^2} \\ &= D\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \sigma_{xre} h \frac{m^2}{a^2} - \sigma_{yre} h \frac{n^2}{b^2}. \end{aligned} \quad (43)$$

进一步变换为

$$\begin{aligned} & \sigma_T \frac{m^2}{a^2} + \sigma_T \frac{n^2}{b^2} \\ &= \frac{D\pi^2}{h} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \sigma_{xre} \frac{m^2}{a^2} - \sigma_{yre} \frac{n^2}{b^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

令

$$\sigma_{xre} = \sigma_{yre} = \sigma_{re}, \quad \sigma_E = \frac{\pi^2 D}{a^2 h},$$

则有

$$\sigma_T = \sigma_E \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right) - \sigma_{re}. \quad (45)$$

当 $m = n = 1$ 时, 则有临界热应力

$$\sigma_{Tcr} = \sigma_E \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) - \sigma_{re}. \quad (46)$$

当板为正方形时, 热应力为

$$\sigma_{Tcr} = 2\sigma_E - \sigma_{re}. \quad (47)$$

将热应力的表达式 $\sigma_T = \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}$ 代入上式, 可得

$$\frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu} = 2\sigma_E - \sigma_{re}. \quad (48)$$

进而可得

$$\Delta T = \frac{1-\nu}{E\alpha} (2\sigma_E - \sigma_{re}). \quad (49)$$

4 讨论与总结

4.1 刚-弹耦合问题

考虑高速飞行器处于类似俯冲拉起的机动飞行状态, 高速飞行器升力、阻力、推力和惯性力组成的平衡力系, 飞行器结构产生弹性变形. 飞行器的翼面的上壁板处于受压状态, 下壁板处于受拉状态. 将研究飞行器的翼面的上壁板弹性稳定性问题. 这里考虑刚-弹耦合效应的问题(不再附加气动加热问题).

按照与第3节的步骤处理问题, 式(28)中不再出现热应力, 从而变换为

$$\sigma_{xre} h \frac{m^2}{a^2} + \sigma_{yre} h \frac{n^2}{b^2} = D\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (50)$$

如果取 $\sigma_{xre} = \sigma_{yre} = \sigma$, 并令 $\sigma_E = \frac{\pi^2 D}{a^2 h}$, 则有

$$\sigma = \sigma_E \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (51)$$

当 $m = n = 1$ 时, 则有临界应力

$$\sigma_{cr} = \sigma_E \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (52)$$

当板为正方形时, 临界应力为

$$\sigma_{cr} = 2\sigma_E. \quad (53)$$

有趣的是式(53)与(41)完全相同. 这种结果是否合理呢? 这是合理的. 因为, 临界应力反映了结构的一种保持稳定的能力, 当结构或者其元件达到临界应力状态, 便要失去稳定性, 无论在刚-弹耦合或者在刚-热弹(不考虑刚度降低的热效应)情况下都是如此. 在第2节的刚-热弹耦合情况下, 弹性应力和热应力的合力达到临界应力, 薄板开始失稳. 在刚-弹耦合情况下, 弹性应力达到临界应力, 薄板也开始失稳.

4.2 板的热屈曲

如果只考虑高速飞行器的空气动力加热或者由于其他原因引起的热效应, 不再考虑刚-弹耦合引起的应力 σ_{xre} 和 σ_{yre} , 研究板的热屈曲问题. 按照与前面类似的步骤处理问题, 式(32)中不再出现应力 σ_{xre} 和 σ_{yre} , 从而变换为

$$\sigma_T h \frac{m^2}{a^2} + \sigma_T h \frac{n^2}{b^2} = D\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (54)$$

进一步变换为

$$\sigma_T \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = \frac{D\pi^2}{h} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (55)$$

令

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 D}{a^2 h},$$

则有

$$\sigma_T = \sigma_E \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (56)$$

当 $m = n = 1$ 时, 则有临界热应力

$$\sigma_{Tcr} = \sigma_E \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (57)$$

当板为正方形时, 热应力为

$$\sigma_{Tcr} = 2\sigma_E. \quad (58)$$

将热应力的表达式 $\sigma_T = \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}$ 和 $\sigma_E = \frac{\pi^2 D}{a^2 h}$ 代入

式(47), 解得

$$\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 h^2}{12(1+\nu)\alpha a^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (59)$$

如果将热应力的表达式 $\sigma_T = \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}$ 和 $\sigma_E = \frac{\pi^2 D}{a^2 h}$

代入式(48), 解得

$$\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 h^2}{6(1+\nu)\alpha a^2}. \quad (60)$$

可见, 板的热屈曲临界温度与弹性模量无关.

4.3 结构的振动问题

在本文的前面讨论中, 在 $\mathbf{v}^d = 0$ 情况下, 以高速飞行器为例讨论应用刚-热弹耦合动力学变分原理来研究结构的刚-热弹耦合稳定性问题. 这类问题在非惯性坐标系 $\mathbf{b}$ 中处理为静力学问题. 如果在 $\mathbf{v}^d \neq 0$ 情况下, 则可以处理为以高速飞行器为例讨论应用刚-热弹耦合动力学变分原理来研究结构的动力学问题. 例如, 按照与前面类似的步骤研究薄板的振动问题. 这是因为这里论及的稳定性和振动都属于数学上的特征值问题. 正因为如此, 有的学者将这类振动问题也称之为稳定性问题.

4.4 解析分析和数值分析的互补特性

应用变分方法来研究耦合动力学可以从两个方面着手: 一方面是对耦合动力学的变分原理求驻值, 得到耦合动力学的控制方程, 通过求解控制方程求得各类耦合运动动力学问题的合理解; 另一方面, 从各类耦合运动动力学的变分原理出发, 应用变分直接方法-Ritz 方法或者有限元素法, 直接求得各类耦合运动动力学问题的近似解. 这种方法能够方便地应用高速数字电子计算机进行计算. 本文按照第一个方面的思路, 对结构的刚-热弹耦合稳定性进行了解析分析. 另一方面, 也不排斥其他学者应用变分直接方法-Ritz 方法或者有限元素法, 对结构的刚-热弹耦合稳定性进行数值分析. 本文认为, 解析分析和数值分析是互补的.

参考文献

- 1 范绪箕. 高速飞行器热结构分析与应用. 北京: 国防工业出版社, 2009
- 2 杨炳渊, 史晓鸣, 梁强. 高超声速有翼导弹多场耦合动力学研究和进展(下). 强度与环境, 2008, 35: 55-62
- 3 Krishna R, Bainum P M. Dynamics and control of orbiting flexible structures exposed to solar radiation. J Guid Control Dynam, 1985 8: 591-596
- 4 Thornton E A, Kim Y A. Thermally induced bending vibrations of a flexible rolled-up solar array. J Spacecraft Rockets, 1993, 30: 438-448
- 5 Johnston J D, Thornton E A. Thermally induced attitude dynamics of a spacecraft with a flexible appendage. J Guid Control Dynam, 1998, 21: 581-587
- 6 Oguamanam D C D, Hansen J S, Heppler G R. Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels. J Appl Mech, 2004, 71: 49-56
- 7 Cannarozzi A A, Ubertini F. A mixed variational method for linear coupled thermoelastic analysis. Int J Solids Struct, 2001, 38: 717-739
- 8 Kidawa-Kukla J. Vibration of a beam induced by harmonic motion of a heat source. J Sound Vibr, 1997, 205: 213-222
- 9 Hosseini-Tehrani P, Eslami M R. BEM analysis of thermal and mechanical shock in a two-dimensional finite domain considering coupled thermoelasticity. Eng Anal Bound Elem, 2000, 24: 249-257

- 10 Mahi A, Adda Bedia E A, Tounsi A, et al. An analytical method for temperature-dependent free vibration analysis of functionally graded beams with general boundary conditions. *Compos Struct*, 2010, 92: 1877–1887
- 11 刘锦阳, 洪嘉振. 温度场中的柔性梁系统动力学建模. *振动工程学报*, 2006, 19: 469–474
- 12 王捷, 刘锦阳. 刚-柔-热耦合多体系统的动力学分析. *应用力学学报*, 2012, 29: 501–507
- 13 潘科琪, 刘锦阳. 热冲击下的复合材料壳刚柔耦合动力学研究. *振动与冲击*, 2013, 32: 1–6, 29
- 14 蒋卓良. 太阳能帆板传热与振动研究. 硕士学位论文. 成都: 西南交通大学, 2010
- 15 史晓鸣, 杨炳渊. 瞬态加热环境下变厚度板温度场及热模态分析. *计算机辅助工程*, 2006, 15: 15–18
- 16 王宏宏, 陈怀海, 崔旭利, 等. 热效应对导弹翼面固有振动特性的影响. *振动、测试与诊断*, 2010, 30: 275–279
- 17 李忠学, 严宗达. 周边固支的矩形板的动力耦合热弹性问题分析. *工程力学*, 1998, 15: 22–28
- 18 Liang L F, Liu S Q, Zhou J S. Quasi-variational principles of single flexible body dynamics and their applications. *Sci China Ser G-Phys Mech Astron*, 2009, 52: 775–787
- 19 Liang L F, Song H Y. Non-linear and non-conservative quasi-variational principle of flexible body dynamics and application in spacecraft dynamics. *Sci China Phys Mech Astron*, 2013, 56: 2192–2199
- 20 钱伟长. 对合变换和薄板弯曲问题的多变量变分原理. *应用数学和力学*, 1985, 6: 25–46

Investigation of structural stability of rigid-thermo-elastic coupling

FENG XiaoJiu¹, LIANG LiFu² & GUO QingYong²

¹ School of Environmental and Safety Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China;

² College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China

For rigid-thermo-elastic coupling dynamics, a subject crossing research, there are not available governing equations until now. Dealing with the problem from entirety angle, variational principles can apply the transformation theory between work and energy and the law of conservation of energy to solve the problem conveniently. As a result, the variational principle can be used not only to establish the governing equation but also to provide convenience for finite element models of rigid-thermo-elastic coupling dynamics. In the paper, according to the transformation theory between work and energy and the law of conservation of energy, the variational principle of rigid-thermo-elastic coupling dynamics was established. Stationary value conditions of variational principle and the governing equations of rigid-elastic coupled dynamics were obtained. And then, conclusions presented above were transformed to statics expression in non-inertia coordinate system. As an application of variational principle of rigid-thermo-elastic coupling dynamics, investigation of structural stability of rigid-thermo-elastic coupling was carried out. Two-oriented critical stresses in case of rigid-elastic coupling state and rigid-thermo-elastic coupling state were presented. Finally, this paper discusses some problems.

rigid-thermo-elastic coupling dynamics, variational principle, structural stability, critical stress of rigid-thermo-elastic coupling

doi: 10.1360/N092016-00142