考虑随机投资收益和单边线性索赔的时间依赖更新风险模型的破产概率

郭风龙^①, 王定成^{①②*}, 张维^③

① 南京审计大学江苏省金融工程重点实验室, 南京 211815;

② 电子科技大学数学科学学院, 成都 610054;

③ 南京审计大学金融学院, 南京 211815

E-mail: fenglongguo@nau.edu.cn, wangdc@nau.edu.cn, zhangwei@nau.edu.cn

收稿日期: 2014-05-14; 接受日期: 2015-03-10; 网络出版日期: 2016-01-25; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11426135, 71501100 和 71271042)、江苏高校优势学科建设工程 (PAPD)、江苏省金融工程重点实验室开放课题 (批准号: NSK2015-02) 和江苏双创计划高层次人才计划资助项目

摘要 本文主要研究一类考虑随机投资收益和相依索赔额的时间依赖的更新风险模型. 在该模型中, 保险投资收益服从指数 Lévy 过程, 而索赔额服从具有独立同分布步长的单边线性过程. 该单边线性过程的步长与索赔到达时间构成独立同分布的随机向量序列, 并且该随机向量的分量之间具有运用步长关于索赔到达时间间隔的条件尾概率渐近性刻画的相依关系. 当单边线性过程的步长服从重尾分布时, 本文得到该更新风险模型破产概率在时间域内的一致渐近估计.

关键词 重尾分布 时间依赖 单边线性过程 投资收益过程 Lévy 过程 更新风险模型

MSC (2010) 主题分类 62E20, 62P05

1 引言

传统的保险风险理论通常假定保险业务的索赔额为独立同分布的随机变量序列. 需要指出的是, 这个假定只是为了数学上处理方便, 而与保险业务的实际情形并不相符. 随着保险和再保险产品复杂性的增加, 索赔额独立的假定显得越来越不现实. 基于此, 目前许多学者提出了不同的相依模型 (如负相依)、渐近尾独立和线性相依等来刻画保险风险的相依关系. 有关负相依情形的研究, 参见文献 [1]; 有关渐近尾独立情形的研究, 参见文献 [2-4]; 有关线性相依情形的研究, 参见文献 [5-9].

本文采用单边线性过程来刻画保险业务索赔额序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的相依关系, 即

$$X_n = \sum_{j=1}^n \varphi_{n-j} \varepsilon_j + \varphi_n \varepsilon_0, \quad n \geq 1, \quad (1.1)$$

其中, 系数 $\{\varphi_j, j \geq 0\}$ 和初始值 ε_0 均为非负常数, 步长 $\{\varepsilon_j, j \geq 1\}$ 为非负随机变量序列.

传统的保险风险理论通常也假定保险业务的索赔额与其索赔到达时间独立. 这个假定在几乎所有的保险业务中并不现实. 文献 [10] 指出, “如果被保险人的免赔额提高, 则索赔到达时间间隔将延长,

英文引用格式: Guo F L, Wang D C, Zhang W. Ruin probability of renewal risk model with stochastic investment returns and one-sided linear time-dependent claims (in Chinese). Sci Sin Math, 2016, 46: 321–350, doi: 10.1360/012016-4

因为金额较小的索赔将消失; 如果索赔为“后续索赔额比前期索赔额大”, 则金额大的索赔更易发生; 如果索赔额为“后续索赔额比前期索赔额小”, 则金额较大的索赔发生的几率降低. 目前有些学者提出了一些模型来刻画索赔额与其到达时间之间的相依关系, 如文献 [10–15].

本文假定由索赔额步长 $\{\varepsilon_j, j \geq 1\}$ 和索赔到达时间 $\{\theta_j, j \geq 1\}$ 构成的随机向量 $\{(\varepsilon_j, \theta_j), j \geq 1\}$ 均为随机向量 (ε, θ) 的独立同分布拷贝. 随机向量 (ε, θ) 满足相依关系

$$\mathbb{P}(\varepsilon > x \mid \theta = t) \sim \mathbb{P}(\varepsilon > x)h(t), \quad (1.2)$$

其中, $h(\cdot) : [0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ 为某一可测函数; 符号 $\sim$ 表示当 $x \rightarrow \infty$ 时, 两边量的比趋近于 1. 当 t 不是 θ 的可能值时, 即对任意包含 t 的开集 E , $\mathbb{P}(\theta \in E) = 0$, 则 (1.2) 的条件概率可理解为非条件概率, 因此, $h(t) = 1$. 记随机变量 ε 和 θ 的分布分别为 F 和 G . 为避免平凡起见, 假定分布 G 非退化到零. 因此, 索赔到达时间 $\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$, $n \geq 1$, 构成更新计数过程为

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(\tau_k \leq t)}, \quad t \geq 0,$$

其中, $\mathbf{1}_A$ 为事件 A 的示性函数. 为方便起见, 记 $\tau_0 = 0$.

假定该保险业务的初始资本为 $x > 0$, 并且按照常数 $c > 0$ 的速率收取保费, 则在 $t \geq 0$ 时刻保险业务的盈余可表示为

$$R_t = x + ct - \sum_{n=1}^{N_t} X_n. \quad (1.3)$$

假定保险人可将其保险盈余投资到风险资产中, 并且风险资产的价格过程为几何 Lévy 过程 $\{e^{\xi_t}, t \geq 0\}$, 即 $\{\xi_t, t \geq 0\}$ 为初始值为 0 的 Lévy 过程. 这种投资收益假定在数理金融中有着广泛的应用, 参见文献 [16–23]. 关于 Lévy 过程的一般理论, 参见专著 [24, 25].

假定随机过程 $\{\xi_t, t \geq 0\}$ 与随机向量序列 $\{(\varepsilon_j, \theta_j), j \geq 1\}$ 相互独立. 保险业务在时刻 $t \geq 0$ 的总财富可表示为

$$U_t = e^{\xi_t} \left(x + \int_{0-}^t e^{-\xi_s} dR_s \right). \quad (1.4)$$

定义风险模型 (1.4) 的破产时刻为

$$\Gamma(x) = \inf\{t \geq 0 : U_t < 0 \mid U_0 = x\}, \quad (1.5)$$

则在时刻 $t > 0$ 破产的概率和最终破产概率可分别定义为

$$\Psi(x, t) = \mathbb{P}(\Gamma(x) \leq t), \quad \Psi(x) = \mathbb{P}(\Gamma(x) < \infty). \quad (1.6)$$

本文主要研究具有相依结构 (1.1) 和 (1.2) 的更新风险模型 (1.3) 和 (1.4) 的破产概率的估计问题. 当 (1.1) 中单边线性过程的步长具有重尾时, 本文建立该破产概率在一定时间域内的一致渐近估计.

本文剩余部分主要由三节组成. 第 2 节主要引入一些记号并给出本文的主要结果; 第 3 和第 4 节证明这些结果.

2 记号与主要结果

2.1 记号

对任意实数 x 和 y , 记 $x \wedge y = \min\{x, y\}$, $x \vee y = \max\{x, y\}$. 设 (γ, σ^2, ν) 为 Lévy 过程 $\{\xi_t, t \geq 0\}$ 的特征三元组, 其中 $\gamma \in (-\infty, \infty)$, $\sigma \geq 0$ 为常数, ν 为 Lévy 测度并且满足 $\nu(\{0\}) = 0$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty$. 定义 Lévy 过程 $\{\xi_t, t \geq 0\}$ 的 Laplace 指数为

$$\phi(s) = \log \mathbb{E}[e^{-s\xi_1}], \quad s \in (-\infty, \infty).$$

如果 $\phi(s)$ 有限, 则由文献 [24, 定理 25.17] 知,

$$\phi(s) = -\gamma s + \frac{\sigma^2}{2} s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-sx} - 1 + sx \mathbf{1}_{(|x| \leq 1)}) \nu(dx),$$

并且

$$\mathbb{E}e^{-s\xi_t} = e^{t\phi(s)} < \infty, \quad t \geq 0.$$

定义更新计数过程 $\{N_t, t \geq 0\}$ 的更新函数为

$$\lambda_t = \mathbb{E}N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_k \leq t), \quad t \geq 0.$$

当建立破产概率的一致渐近估计时, 将时间变量 t 限制到集合

$$\Lambda = \{t : 0 < \lambda_t \leq \infty\}$$

上是自然的. 记 $\underline{t} = \inf\{t : \lambda_t > 0\} = \inf\{t : \mathbb{P}(\tau_1 \leq t) > 0\}$. 显然, 当 $\mathbb{P}(\theta = \underline{t}) > 0$ 时, $\Lambda = [\underline{t}, \infty]$; 当 $\mathbb{P}(\theta = \underline{t}) = 0$ 时, $\Lambda = (\underline{t}, \infty]$. 为了方便起见, 对任意固定的实数 $T \in \Lambda$, 记 $\Lambda_T = \Lambda \cap [0, T]$.

本文假定 (1.1) 中的步长 $\{\varepsilon_j, j \geq 1\}$ 的共同分布 F 属于重尾分布簇 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{L}$ 的交集或该交集的子集 $\mathcal{R}$. 按照定义, 定义在 $[0, \infty)$ 上的分布 F 称为属于具有控制变化尾部的重尾分布簇 $\mathcal{D}$, 如果对所有 $x \geq 0$, $\bar{F}(x) > 0$ 并且对任意实数 $0 < y < 1$,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} < \infty;$$

定义在 $[0, \infty)$ 上的分布 F 称为属于具有长尾的重尾分布簇 $\mathcal{L}$, 如果对所有实数 $x \geq 0$, $\bar{F}(x) > 0$ 并且对任意实数 $l \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-l)}{\bar{F}(x)} = 1. \quad (2.1)$$

重尾分布簇的交集 $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ 包含许多重要的重尾分布, 并且其著名的子集是具有正则变化尾部的重尾分布簇 $\mathcal{R}$. 按照定义, 定义在 $[0, \infty)$ 上的分布 F 称为属于尾指数 $-\alpha$ 的正则变化分布簇 $\mathcal{R}_{-\alpha}$, 如果对任意实数 $x \geq 0$, $\bar{F}(x) > 0$ 并且存在常数 $\alpha > 0$ 使得对任意 $y > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} = y^{-\alpha}. \quad (2.2)$$

若记 (2.2) 的正则性为 $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, 则重尾分布簇 $\mathcal{R}$ 为所有重尾分布簇 $\mathcal{R}_{-\alpha}$ 在区间 $0 < \alpha < \infty$ 的并集. 关于重尾分布及其在保险与金融中的应用, 参见专著 [26, 27].

本文的工作与重尾分布的两个重要指数密切相关. 对定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的任意分布 F 和任意实数 $y > 0$, 引入记号

$$\bar{F}_*(y) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)}, \quad \bar{F}^*(y) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)},$$

并定义

$$\mathbb{J}_F^+ = \inf \left\{ -\frac{\log \bar{F}_*(y)}{\log y} : y > 1 \right\} = -\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\log \bar{F}_*(y)}{\log y},$$

$$\mathbb{J}_F^- = \sup \left\{ -\frac{\log \bar{F}^*(y)}{\log y} : y > 1 \right\} = -\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\log \bar{F}^*(y)}{\log y}.$$

按照文献 [26] 中的术语, $\mathbb{J}_F^+$ 和 $\mathbb{J}_F^-$ 分别称为函数 $f(x) = (\bar{F}(x))^{-1}$ ($x \geq 0$) 的上下 Matuszewska 指数. 为不引起混淆起见, 也称 $\mathbb{J}_F^\pm$ 为分布 F 的上下 Matuszewska 指数. 特别地, 当 $F \in \mathcal{D}$ 时, $\mathbb{J}_F^+ < \infty$; 当 $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ ($\alpha \geq 0$) 时, $\mathbb{J}_F^- = \mathbb{J}_F^+ = \alpha$.

以下若无特别说明, 所有的极限关系均针对 $x \rightarrow \infty$. 对任意两个正函数 $a(\cdot)$ 和 $b(\cdot)$, 符号 $a(x) \asymp b(x)$ 表示 $0 < \liminf a(x)/b(x) \leq \limsup a(x)/b(x) < \infty$, 符号 $a(x) \lesssim b(x)$ 表示 $\limsup a(x)/b(x) \leq 1$, 符号 $a(x) \sim b(x)$ 表示 $\lim a(x)/b(x) = 1$. 对任意满足

$$l_1 = \liminf_{x \rightarrow \infty} \inf_{t \in E \neq \emptyset} \frac{a(x, t)}{b(x, t)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \sup_{t \in E \neq \emptyset} \frac{a(x, t)}{b(x, t)} = l_2$$

的二元函数 $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ 和集合 E , 如果 $0 < l_1 \leq l_2 < \infty$, 则称渐近关系 $a(x, t) \asymp b(x, t)$ 对所有的 $t \in E$ 一致成立; 如果 $l_2 \leq 1$, 则称渐近关系 $a(x, t) \lesssim b(x, t)$ 对所有的 $t \in E$ 一致成立; 如果 $l_1 \geq 1$, 则称渐近关系 $a(x, t) \gtrsim b(x, t)$ 对所有的 $t \in E$ 一致成立; 并且如果 $l_1 = l_2 = 1$, 则称渐近关系 $a(x, t) \sim b(x, t)$ 对所有的 $t \in E$ 一致成立.

2.2 主要结果

为了建立破产概率在某个有限时间域内的一致渐近估计, 我们需要下面四个假定.

第一个假定与 (1.1) 中单边线性过程的系数 $\{\varphi_n, n \geq 0\}$ 有关.

(A) (1.1) 中的系数 $\{\varphi_n, n \geq 0\}$ 满足 $\varphi_0 > 0$ 和 $\bar{\varphi} := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n < \infty$.

第二和第三个假定与随机对 (ε, θ) 的相依结构有关.

(B1) 存在某个可测函数 $h(\cdot) : [0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ 使得对任意固定的 $T \in \Lambda$, 渐近关系 (1.2) 对所有的 $t \in \Lambda_T$ 均成立.

(C) 记 $\tilde{t} = \sup\{t \geq 0 : \bar{G}(t) > 0\}$, 下面两者之一满足,

(i) 针对 $\tilde{t} = \infty$ 的情形, 存在 $t^* \in \Lambda$ 使得 $\inf_{0 \leq t \leq t^*} h(t) > 0$;

(ii) 针对 $\tilde{t} < \infty$ 的情形, 对任意的 $T \in \Lambda$, 有 $\inf_{0 \leq t \leq T} h(t) > 0$.

在假定 (C) 下, 如果 $\mathbb{P}(\theta = 0) > 0$, 则可令 $t^* = 0$. 在这种假定下, 由假定 (B1) 知, $h(0) > 0$, 这意味着 $\inf_{0 \leq s \leq t^*} h(s) > 0$ 的假定可去掉.

第四个假定与 Lévy 过程 $\{\xi_t, t \geq 0\}$ 的 Laplace 指数 $\phi(\cdot)$ 有关.

(D1) 存在某个常数 $\eta > 1$ 使得 Lévy 过程 $\{\xi_t, t \geq 0\}$ 的 Laplace 指数 $\phi(\cdot)$ 在该点有限, 即 $\phi(\eta) \in (-\infty, \infty)$.

现在给出本文的第一个结果.

定理 1 考虑由 (1.3) 和 (1.4) 中定义的更新风险模型 $\{U_t, t \geq 0\}$, 其相依结构由 (1.1) 和 (1.2) 给出. 如果假定 (A)、(B)、(C) 和 (D1) 成立, 更新分布 F 属于重尾分布簇 $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$, 并且上 Matuszewski 指标满足 $0 \leq \mathbb{J}_F^+ < \eta$, 则对任意固定的 $T \in \Lambda$, 渐近关系

$$\Psi(x, t) \sim \int_{0-}^t \left\{ \mathbb{P}(\varepsilon \Theta_{u,t} > x) + \int_{0-}^{t-u} \mathbb{P}(\varepsilon \Theta_{u+v,t} > x) d\lambda_v \right\} h(u) dG(u) \quad (2.3)$$

对所有 $t \in \Lambda_T$ 成立, 其中

$$\Theta_{s,t} = \sum_{k=0}^{N_{t-s}} \varphi_k e^{-\xi_{s+\tau_k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-\xi_{s+\tau_k}} \mathbf{1}_{(s+\tau_k \leq t)}, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (2.4)$$

定理 1 的证明放在第 3 节. 接下来给出本文的第二个结果, 该结果将建立破产概率在无限时间域内的一致渐近估计. 为此, 我们需要将上面的一些假定进行加强.

首先, 需要将假定 (B1) 修改如下:

(B2) 存在某个可测函数 $h(\cdot) : [0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ 使得渐近关系 (1.2) 对所有 $t \in \Lambda$ 均成立.

对关系 (1.2) 的两边同时关于 $\mathbb{P}(\theta \in dt)$ 进行积分可以看出, 假定 (B2) 蕴含 $\mathbb{E}h(\theta) = 1$.

其次, 需要将假定 (D1) 加强如下:

(D2) 存在某个常数 $\kappa > 1$ 使得 Lévy 过程 $\{\xi_t, t \geq 0\}$ 的 Laplace 指数 $\phi(\cdot)$ 在该点小于等于零, 即 $\phi(\kappa) \in (-\infty, 0]$.

由函数 $\phi(\cdot)$ 的凸性及 $\phi(0) = 0$ 可看出, 假定 (D2) 蕴含着 Lévy 过程 $\{\xi_t, t \geq 0\}$ 的 Laplace 指数 $\phi(\cdot)$ 在区间 $(0, \kappa)$ 的任意一点均小于零, 即对任意 $0 < p < \kappa$, $\phi(p) \in (-\infty, 0)$.

现给出本文的第二个主要结果.

定理 2 考虑 (1.3) 和 (1.4) 中定义的更新风险模型 $\{U_t, t \geq 0\}$. 其相依结构由 (1.1) 和 (1.2) 给出. 如果假定 (A)、(B2)、(C) 和 (D2) 成立, 并且对某个 $0 < \alpha < \kappa$, 更新分布 F 属于重尾分布簇 $\mathcal{R}_{-\alpha}$, 则渐近关系

$$\Psi(x, t) \sim \int_{0-}^t \left\{ \mathbb{P}(\varepsilon \Theta_{u,t} > x) + \int_{0-}^{t-u} \mathbb{P}(\varepsilon \Theta_{u+v,t} > x) d\lambda_v \right\} h(u) dG(u) \quad (2.5)$$

对所有 $t \in \Lambda$ 一致成立, 其中, 符号 $\Theta_{u,t}$ 和 $\Theta_{u+v,t}$ 的定义见 (2.4). 特别地,

$$\Psi(x) \sim \bar{F}(x) \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-\xi_{\tau_k}} \right)^{\alpha} \frac{\mathbb{E}h(\theta) e^{\theta \phi(\alpha)}}{1 - \mathbb{E}e^{\theta \phi(\alpha)}}. \quad (2.6)$$

定理 2 的证明见第 4 节. 接下来给出一些注释.

2.3 一些注释

注 1 时间序列分析中的许多线性过程都具有 (1.1) 的单边线性的形式, 并且假定 (A) 很容易满足. 作为例子, 考虑索赔额序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从阶数为 $(1, 1)$ 的自回归滑动平均过程, 即

$$X_n = a_1 X_{n-1} + \varepsilon_n + a_2 \varepsilon_{n-1}, \quad 0 \leq a_1, a_2 < 1, \quad n \geq 1, \quad (2.7)$$

其中, 初值 X_0 和系数 $\varepsilon_0 \geq 0$ 均为常数, 更新 $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ 为非负独立同分布随机变量. 注意到 (2.7) 可重新写为

$$X_n = \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_{n-j} \varepsilon_j + \tilde{\varphi}_n \tilde{\varepsilon}_0, \quad n \geq 1,$$

其中,

$$\tilde{\varphi}_0 = 1, \quad \tilde{\varphi}_n = (a_1 + a_2) a_1^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad \tilde{\varepsilon}_0 = \frac{a_1 X_0 + a_2 \varepsilon_0}{a_1 + a_2}.$$

显然, $\{X_n, n \geq 1\}$ 具有单边线性形式 (1.1), 并且注意到 $0 \leq a_1 < 1$, 因而假定 (A) 成立.

注 2 上述关于随机对 (ε, θ) 满足的假定 (B1)、(B2) 和 (C) 可通过 copulas 进行验证. 有关 copulas 的更多细节, 参见文献 [28, 29]. 准确来讲, 函数 $h(\cdot)$ 和渐近关系 (1.2) 在有限时间域和无限时间域内的一致性可由生存 copula 来刻画. 为简单起见, 假定随机向量 (ε, θ) 的联合分布 H 具有连续的边缘分布 F 和 G . 从而, 由 Sklar 定理知, 存在唯一 copula $C(u, v) : [0, 1]^2 \mapsto [0, 1]$ 满足

$$H(x, t) = C(F(x), G(t)).$$

定义对应的生存 copula 为

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2,$$

故

$$\bar{H}(x, t) = \mathbb{P}(\varepsilon > x, \theta > t) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(t)).$$

假定 $C(u, v)$ 为绝对连续, 则 $\hat{C}(u, v)$ 同样为绝对连续. 因而, (1.2) 中的函数 $h(\cdot)$ 具有形式

$$h(t) = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\frac{\partial}{\partial v} \hat{C}(u, v)}{u} \bigg|_{v=\bar{G}(t)}, \quad t > 0. \quad (2.8)$$

假定 (B1) 中渐近关系 (1.2) 的局部一致性可由生存 copula $\hat{C}(u, v)$ 表示如下:

$$\lim_{u \rightarrow 0+} \sup_{v \in [\delta, 1]} \left| \frac{\frac{\partial}{\partial v} \hat{C}(u, v)}{u h(t)} - 1 \right| = 0, \quad \delta \in (0, 1); \quad (2.9)$$

而假定 (B2) 中渐近关系 (1.2) 的全局一致性可由生存 copula $\hat{C}(u, v)$ 表示如下:

$$\lim_{u \rightarrow 0+} \sup_{v \in (0, 1]} \left| \frac{\frac{\partial}{\partial v} \hat{C}(u, v)}{u h(t)} - 1 \right| = 0. \quad (2.10)$$

因此, 对一些著名的 copulas 结构, 如 Ali-Mikhail-Haq, Farlie-Gumbel-Morgenstern 和 Frank 等, 假定 (B1)、(B2) 和 (C) 可通过 (2.8)–(2.10) 进行等价验证. 我们首先考虑 Ali-Mikhail-Haq 的情形, 其 copula 函数具有形式

$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \varrho(1-u)(1-v)}, \quad \varrho \in [-1, 1].$$

简单计算可得

$$\frac{\partial \hat{C}(u, v)}{\partial v} = \frac{u + \varrho u(1 - 2v) - \varrho u^2(1 - \varrho v^2)}{(1 - \varrho uv)^2},$$

$$h(t) = 1 + \varrho(1 - 2v), \quad v = \overline{G}(t).$$

因此,

$$\inf_{t \geq 0} h(t) = \begin{cases} 1 - \varrho, & \varrho \in [0, 1), \\ 1 + \varrho, & \varrho \in (-1, 0). \end{cases} \quad (2.11)$$

从而, 当 $\varrho \in (-1, 1)$ 时, 假定 (C) 成立. 进一步,

$$\left| \frac{\frac{\partial \hat{C}(u, v)}{\partial v}}{uh(t)} - 1 \right| = \frac{|v(2 - \varrho uv)(1 + \varrho(1 - 2v)) - 1 + \varrho v^2|}{(1 - \varrho uv)^2(1 + \varrho(1 - 2v))} |\varrho|u.$$

因此, 当 $\varrho \in [-1, 1)$ 时, 渐近关系 (2.9) 和假定 (B1) 成立; 当 $\varrho \in (-1, 1)$ 时, 渐近关系 (2.10) 和假定 (B2) 成立.

下面考虑 Farlie-Gumbel-Morgenstern 的情形, 其 copula 函数具有形式

$$C(u, v) = uv + \varrho uv(1 - u)(1 - v), \quad \varrho \in [-1, 1].$$

显然,

$$\frac{\partial \hat{G}(u, v)}{\partial v} = u + \varrho u(1 - u)(1 - 2v),$$

并且

$$h(t) = 1 + \varrho(1 - 2v), \quad v = \overline{G}(t).$$

自然地, (2.11) 成立. 因而, 当 $\varrho \in (-1, 1)$ 时, 假定 (C) 成立. 进一步,

$$\left| \frac{\frac{\partial \hat{C}(u, v)}{\partial v}}{uh(t)} - 1 \right| = \frac{|1 - 2v|}{1 + \varrho(1 - 2v)} |\varrho|u.$$

因此, 当 $\varrho \in [-1, 1)$ 时, 渐近关系 (2.9) 和假定 (B1) 成立; 而当 $\varrho \in (-1, 1)$ 时, 渐近关系 (2.10) 和假定 (B2) 成立.

最后考虑 Frank 的情形, 其 copula 函数具有形式

$$C(u, v) = -\frac{1}{\varrho} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\varrho u} - 1)(e^{-\varrho v} - 1)}{e^{-\varrho} - 1} \right), \quad \varrho \neq 0.$$

经过复杂的计算可得

$$\frac{\partial \hat{C}(u, v)}{\partial v} = \frac{e^{\varrho}(1 - e^{\varrho u})}{e^{\varrho}(1 - e^{\varrho}) + (e^{\varrho u} - e^{\varrho})(e^{\varrho v} - e^{\varrho})},$$

并且

$$h(t) = \frac{\varrho e^{\varrho(1-v)}}{e^{\varrho} - 1}, \quad v = \overline{G}(t),$$

故

$$\inf_{t \geq 0} h(t) = \begin{cases} \frac{\varrho}{e^{\varrho} - 1}, & \varrho > 0, \\ \frac{\varrho e^{\varrho}}{e^{\varrho} - 1}, & \varrho < 0. \end{cases}$$

因此, 当 $\varrho \neq 0$ 时, 假定 (C) 成立. 注意到

$$\left| \frac{\frac{\partial \hat{C}(u, v)}{\partial v}}{uh(t)} - 1 \right| = \frac{|\varrho u(e^{\varrho(1-v)}(e^{\varrho u} - 1) + (e^{\varrho} - e^{\varrho u})) - (e^{\varrho u} - 1)(e^{\varrho} - 1)|}{\varrho u(e^{\varrho(1-v)}(e^{\varrho u} - 1) + (e^{\varrho} - e^{\varrho u}))}.$$

因此, 当 $\varrho \neq 0$ 时, 渐近关系 (2.9) 和 (2.10) 成立, 进而假定 (B1) 和 (B2) 成立. 值得指出的是, 如上考虑的三类 copulas 类型已在文献 [10, 15] 中考虑过.

注 3 针对一些常见情形, 本文中关于 Lévy 过程 $\{\xi_t, t \geq 0\}$ Laplace 指数的假定很容易验证. 考虑保险盈余投资的情形. 假定投资组合由一种无风险资产和一种风险资产组成, 并且这两种资产的价格过程为

$$V_t^{(0)} = e^{rt}, \quad V_t^{(1)} = e^{L_t}, \quad t \geq 0,$$

其中, $r > 0$ 为无风险利率, $\{L_t, t \geq 0\}$ 为 Lévy 过程. 现运用常数策略将保险盈余在无风险资产和风险资产的份额进行分配, 即在任意固定的时刻 $t \geq 0$, 保险盈余中 $\pi \in [0, 1]$ 的固定份额投资到风险资产, 剩余份额投资到无风险资产. 在这种常数分配策略 $\pi \in (0, 1)$ 下, 该投资组合的价格过程可由随机微分方程来刻画,

$$dV_t^{(\pi)} = V_{t-}^{(\pi)}(1 - \pi)rdt + V_{t-}^{(\pi)}\pi d\tilde{L}_t, \quad t \geq 0,$$

其中, $\tilde{L}_t$ 满足 $dV_t^{(1)} = V_{t-}^{(1)} d\tilde{L}_t$. 对任意 $t \geq 0$, 定义 $\tilde{L}_t^{(\pi)} = (1 - \pi)rt + \pi\tilde{L}_t$. 该随机微分方程的解就是著名的关于随机过程 $\{\tilde{L}_t^{(\pi)}, t \geq 0\}$ 的 Doléans-Dade 指数:

$$V_t^{(\pi)} = e^{L_t^{(\pi)}}, \quad t \geq 0,$$

参见文献 [30] 中第 2 章的定理 37.

设 $(\gamma_L, \sigma_L^2, \nu_L)$ 为随机过程 $\{L_t, t \geq 0\}$ 的特征三元组. 由文献 [31, 引理 2.5] 知, $\{L_t^{(\pi)}, t \geq 0\}$ 也是 Lévy 过程, 并且其特征三元组可由 $(\gamma_L, \sigma_L^2, \nu_L)$ 决定. 定义 Lévy 过程 $\{L_t^{(\pi)}, t \geq 0\}$ 的 Laplace 指数为

$$\phi_{\pi}(v) = \log \mathbb{E}[e^{-vL_1^{(\pi)}}], \quad v \in \mathbb{R}.$$

由文献 [32, 引理 4.1] 的证明知, 对任意 $v \geq 0$, $\phi_{\pi}(v)$ 均有限. 进一步, 如果

$$0 < \mathbb{E}L_1 < \infty, \quad \sigma > 0 \quad \text{或} \quad \nu((-\infty, 0)) > 0, \quad (2.12)$$

则由文献 [32, 引理 4.1 和 A.1] 知, 存在唯一常数 $\kappa_{\pi} > 0$ 使得 $\phi_{\pi}(\kappa_{\pi}) = 0$.

在这种常数投资策略下, 假定 (D1) 自然满足, 因而可从定理 1 中移除; 当条件 (2.12) 满足并且 $\kappa_{\pi} > 1$ 时, 假定 (D2) 成立. 需要指出的是, 条件 (2.12) 允许风险资产的对数投资收益出现负值但具有正的期望对数投资收益, 这与金融资产价格的实证研究结果相吻合.

3 定理 1 的证明

在下面的证明中, 符号 C 表示与 x 和 t 无关的正常数并且在不同的地方表示不同的数值. 为了证明定理 1, 我们需要建立一系列重要的引理. 首先回顾文献中关于重尾分布的一些经典结果. 由文献 [26, 命题 2.2.1] 知, 对任意分布 $F \in \mathcal{D}$ 和常数 $p > \mathbb{J}_F^+$, 存在正常数 C_p 和 D_p 使得

$$\frac{\overline{F}(y)}{\overline{F}(x)} \leq C_p \left(\frac{x}{y}\right)^p \quad (3.1)$$

对所有 $x \geq y \geq D_p$ 一致成立. 在 (3.1) 中固定变量 y 可得

$$x^{-p} = o(\overline{F}(x)), \quad \text{对任意 } p > \mathbb{J}_F^+. \quad (3.2)$$

由文献 [26, 定理 1.5.2] 知, 对任意分布 $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ ($0 < \alpha < \infty$) 和实数 $\delta > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{y \in [\delta, \infty)} \left| \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} - y^{-\alpha} \right| = 0. \quad (3.3)$$

下面给出三个有关两个独立非负随机变量乘积的重要结果. 设 X 和 Y 为两个独立非负随机变量, 并记 X 的分布为 F .

(a) 如果 $F \in \mathcal{D}$, 则对任意固定的 $v > 0$ 和 $p > \mathbb{J}_F^+$, 存在某个与 Y 和 v 无关的正常数 C 使得对所有充分大的 x ,

$$\mathbb{P}(XY > vx \mid Y) \leq C \overline{F}(x) \{v^{-p} Y^p + \mathbf{1}_{(Y < v)}\}. \quad (3.4)$$

(b) 如果 $F \in \mathcal{D}$ 并且 $\mathbb{J}_F^- > 0$, 则对任意固定的 $v > 0$ 和 $0 < p_1 < \mathbb{J}_F^- \leq \mathbb{J}_F^+ < p_2 < \infty$, 存在一个与 Y 和 v 无关的正常数 C 使得对所有充分大的 x ,

$$\mathbb{P}(XY > vx \mid Y) \leq C \overline{F}(x) (v^{-p_1} Y^{p_1} + v^{-p_2} Y^{p_2}). \quad (3.5)$$

(c) 如果 $F \in \mathcal{D}$, 而 Y 为在零点非退化的随机变量, 并且对某个 $p > \mathbb{J}_F^+$, $\mathbb{E}Y^p < \infty$, 则

$$\mathbb{P}(XY > x) \asymp \overline{F}(x). \quad (3.6)$$

结果 (a) 为文献 [33, 引理 3.2]; 结果 (b) 为文献 [34, 引理 4.1.5] 的适当变形; 结果 (c) 为文献 [35, 定理 3.3(iv)].

3.1 引理

下面的引理给出长尾分布的一个基本结果, 该结果将在引理 2 的证明中用到.

引理 1 对任意分布 $F \in \mathcal{L}$, 存在函数 $l(\cdot) : (0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ 满足

(a) 对所有 $x > 0$, $l(x) < x/2$;

(b) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $l(x) \rightarrow \infty$;

(c) $l(x)$ 在无穷远处是缓慢变化的, 即对所有 $y > 0$, $l(xy) \sim l(x)$,

则对任意 $c_0, c_1 \geq 0$ 和任意固定的 $0 < a < b < \infty$,

$$\overline{F}(xy \pm c_0 l(x)y \pm c_1 y) \sim \overline{F}(xy)$$

对所有 $y \in [a, b]$ 一致成立.

证明 由文献 [10, 引理 4.1] 知, 存在某个缓慢变化的函数 $l(\cdot) : (0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ 满足 (a)–(c) 使得对每个 $d_0, d_1 \geq 0$,

$$\bar{F}(x \pm d_0 l(x) \pm d_1) \sim \bar{F}(x \pm d_0 l(x)) \sim \bar{F}(x),$$

其中, 第一步运用了长尾分布 $\mathcal{L}$ 的定义 (2.1). 由于 $l(\cdot)$ 在无穷远处缓慢变化, 由文献 [26, 定理 1.2.1] 知, 对任意固定的 $0 < a \leq b < \infty$, 渐近关系

$$l(xy) \sim l(x)$$

对所有 $y \in [a, b]$ 一致成立. 因此, 一方面, 对任意固定的 $\delta > 0$, 由上面两个渐近关系知, 不等式

$$\bar{F}(xy \pm c_0 l(x)y \pm c_1 y) \leq \bar{F}(xy - c_0 l(x)b - c_1 b) \leq \bar{F}(xy - c_0 b(1 + \delta)l(xy) - c_1 b) \leq (1 + \delta)\bar{F}(xy)$$

对所有 $y \in [a, b]$ 和充分大的 x 成立. 另一方面, 由上面两个渐近关系知, 不等式

$$\bar{F}(xy \pm c_0 l(x)y \pm c_1 y) \geq \bar{F}(xy + c_0 b l(x) + c_1 b) \geq \bar{F}(xy + c_0 b(1 + \delta)l(xy) + c_1 b) \geq (1 - \delta)\bar{F}(xy)$$

对所有 $y \in [a, b]$ 和充分大的 x 成立. 由 $\delta > 0$ 的任意性, 引理证毕. $\square$

为证明定理 1, 我们需要将 (1.4) 中的随机积分表示成随机权和. 事实上, 对任意 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{0-}^t e^{-\xi_s} dR_s &= c \int_0^t e^{-\xi_s} ds - \sum_{n=1}^{\infty} X_n e^{-\xi_{\tau_n}} \mathbf{1}_{(\tau_n \leq t)} \\ &= c \int_0^t e^{-\xi_s} ds - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\xi_{\tau_n}} \mathbf{1}_{(\tau_n \leq t)} \sum_{j=1}^n \varphi_{n-j} \varepsilon_j - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\xi_{\tau_n}} \mathbf{1}_{(\tau_n \leq t)} \varphi_n \varepsilon_0 \\ &= c \int_0^t e^{-\xi_s} ds - \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \sum_{n=j}^{\infty} \varphi_{n-j} e^{-\xi_{\tau_n}} \mathbf{1}_{(\tau_n \leq t)} - \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\xi_{\tau_n}} \mathbf{1}_{(\tau_n \leq t)} \\ &= cZ_t - \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中

$$Z_t = \int_0^t e^{-\xi_s} ds, \quad W_j(t) = \sum_{n=1 \vee j}^{\infty} \varphi_{n-j} e^{-\xi_{\tau_n}} \mathbf{1}_{(\tau_n \leq t)}, \quad j \geq 0. \quad (3.8)$$

下面引入几个常用记号. 对每个 $k = 1, 2, \dots$, 记随机向量 $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ 和任意的非负实向量 $(s_1, \dots, s_k)$ 分别为 $\vec{\theta}_k$ 和 $\vec{s}_k$. 设 $t_k = \sum_{i=1}^k s_i$, 并且对所有 $t \in \Lambda$, 定义 $\Omega_{k,t} = \{\vec{s}_k \in \Lambda \times \dots \times \Lambda : t_k \leq t\}$. 对任意 $\vec{s}_k \in \Omega_{k,t}$, 定义

$$w_{j,k} := \sum_{n=1 \vee j}^k \varphi_{n-j} e^{-\xi_{\tau_n}}, \quad 0 \leq j \leq k. \quad (3.9)$$

由假定 (A) 易知, 对任意 $1 \leq j \leq k < \infty$,

$$0 < w_t^- := \varphi_0 e^{-\sup_{0 \leq s \leq t} \xi_s} \leq w_{j,k} \leq \bar{\varphi} e^{-\inf_{0 \leq s \leq t} \xi_s} =: w_t^+. \quad (3.10)$$

下面的引理将建立由随机变量 $\{\varepsilon_j, j \geq 0\}$ 及其随机权重 $\{W_j(t), j \geq 0\}$ 构成的随机权和的尾部在有限时间域内的一致渐近估计. 该结果是定理 1 和 2 证明的主要组成部分.

引理 2 在定理 1 的条件下, 当 $\{W_j(t), j \geq 0\}$ 和 Z_t 由 (3.8) 定义时, 对任意固定的 $T \in \Lambda$, $c \geq 0$ 和整数 $k \geq 1$, 渐近关系

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(t) - cZ_t > x, N_t = k\right) \sim \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k) \quad (3.11)$$

对所有 $t \in \Lambda_T$ 一致成立. 进一步, 在定理 2 的条件下, 渐近关系

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(t) - cZ_t > x, N_t = k\right) \sim \bar{F}(x) \sum_{j=1}^k \mathbb{E}\{W_j^\alpha(t) h(\theta_j) \mathbf{1}_{(N_t=k)}\} \quad (3.12)$$

对所有 $t \in \Lambda_T$ 一致成立.

证明 我们只在 $k \geq 2$ 的情形下证明 (3.11) 和 (3.12) 在 Λ_T 上的一致渐近性; 而在 $k = 1$ 的情形下, 渐近关系 (3.11) 和 (3.12) 在 Λ_T 上的一致渐近性可类似证明.

我们首先证明关系 (3.11) 的一致渐近上界. 由 (3.8) 中关于 $\{W_j(t), j \geq 0\}$ 的定义知, 对任意 $t \in \Lambda_T$ 和 $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(t) - cZ_t > x, N_t = k\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^k \varepsilon_j W_j(t) - cZ_t > x, N_t = k\right) \\ &= \int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^k \varepsilon_j w_{j,k} - cZ_t > x \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right) \bar{G}(t - t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i), \end{aligned} \quad (3.13)$$

其中, $\{w_{j,k}, 0 \leq j \leq k\}$ 的定义由 (3.9) 给出. 由文献 [36, 引理] 知, 对所有 $T > 0$ 和 $u > u_0 > 0$,

$$\mathbb{P}\left(-\inf_{s \in [0, T]} \xi_s > u\right) \mathbb{P}\left(-\sup_{s \in [0, T]} \xi_s > -u_0\right) \leq \mathbb{P}(-\xi_T > u - u_0).$$

由假定 (D1) 知, $\mathbb{E}e^{-\eta \xi_T} = e^{T\phi(\eta)} < \infty$. 因此, $\mathbb{E}(w_T^\pm)^\eta < \infty$. 显然, 当 $a \rightarrow 0$ 时,

$$\mathbb{P}(w_T^- < a) = \mathbb{P}(\varphi_0 e^{-\sup_{s \in [0, T]} \xi_s} < a) \rightarrow 0.$$

从而, 对任意固定 $\delta \in (0, 1)$, 可选取 $a \in (0, 1)$ 和 $b \in (1, \infty)$ 使得

$$\mathbb{E}\{(w_T^+)^{\eta} \mathbf{1}_{(w_T^+ > b)} + \mathbf{1}_{(w_T^+ > b)} + \mathbf{1}_{(w_T^- < a)}\} < \delta. \quad (3.14)$$

对这两个固定的 a 和 b , 引入集合

$$E_1 = \bigcap_{i=1}^k \{a \leq w_{i,k} \leq b\}, \quad E_2 = \bigcup_{i=1}^k \{w_{i,k} < a\}, \quad E_3 = \bigcup_{i=1}^k \{w_{i,k} > b\}. \quad (3.15)$$

按照这个固定的 b 和记号 $E_i, i = 1, 2, 3$, 我们将 (3.13) 中的条件概率按如下方式分成四个部分:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^k \varepsilon_j w_{j,k} - cZ_t > x \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k \varepsilon_j w_{j,k} > x - \varepsilon_0 b \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^k \varepsilon_j w_{j,k} > x, w_{0,k} > b \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right) \\
&\leq \sum_{m=1}^3 \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k \varepsilon_j w_{j,k} > x - \varepsilon_0 b, E_m \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^k \varepsilon_j w_{j,k} > x, w_{0,k} > b \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right) \\
&=: \sum_{m=1}^3 I_m(x, \vec{s}_k) + I_4(x, \vec{s}_k).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

考虑引理 1 中的函数 $l(\cdot)$, 并记 $x' = x - \varepsilon_0 b$. 进一步将 $I_1(x, \vec{s}_k)$ 分割为下面两部分:

$$\begin{aligned}
I_1(x, \vec{s}_k) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k \{\varepsilon_i w_{i,k} > x' - l(x)\}, E_1 \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k \varepsilon_j w_{j,k} > x', \bigcap_{i=1}^k \{\varepsilon_i w_{i,k} \leq x' - l(x)\}, E_1 \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right) \\
&=: I_{11}(x, \vec{s}_k) + I_{12}(x, \vec{s}_k).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

由假定 (B1) 和引理 1 知, 渐近关系

$$\begin{aligned}
I_{11}(x, \vec{s}_k) &\leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_i w_{i,k} > x' - l(x), a \leq w_{i,k} \leq b \mid \theta_i = s_i) \\
&\sim \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_i w_{i,k} > x, a \leq w_{i,k} \leq b) h(s_i) \\
&\sim \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_i w_{i,k} > x, a \leq w_{i,k} \leq b \mid \theta_i = s_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_i w_{i,k} > x \mid \theta_i = s_i)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

对所有 $\vec{s}_k \in \Omega_{k,T}$ 一致成立. 由假定 (B1) 知, 不等式

$$\begin{aligned}
I_{12}(x, \vec{s}_k) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k \varepsilon_j w_{j,k} > x', \frac{x'}{k} \leq \max_{1 \leq i \leq k} \{\varepsilon_i w_{i,k}\} \leq x' - l(x), E_1 \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right) \\
&\leq \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} \mathbb{P}\left(\varepsilon_i w_{i,k} > \frac{x'}{k}, \varepsilon_j w_{j,k} > \frac{l(x)}{k-1}, E_1 \mid \theta_i = s_i, \theta_j = s_j\right) \\
&\leq \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} \mathbb{P}\left(\varepsilon_i w_{i,k} > \frac{x'}{k}, a \leq w_{i,k} \leq b \mid \theta_i = s_i\right) \mathbb{P}\left(\varepsilon_j > \frac{l(x)}{b(k-1)} \mid \theta_j = s_j\right) \\
&\sim \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} \mathbb{P}\left(\varepsilon_i w_{i,k} > \frac{x'}{k}, a \leq w_{i,k} \leq b\right) \mathbb{P}\left(\varepsilon_j > \frac{l(x)}{b(k-1)}\right) h(s_i) h(s_j)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

对所有 $\vec{s}_k \in \Omega_{k,T}$ 一致成立. 由不等式 (3.1) 和引理 1, 渐近关系

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\varepsilon_i w_{i,k} > k^{-1} x', a \leq w_{i,k} \leq b) &= \int_a^b \bar{F}\left(k^{-1} \frac{x - \varepsilon_0 b}{y}\right) \mathbb{P}(w_{i,k} \in dy) \\
&\asymp \int_a^b \bar{F}\left(\frac{x}{y}\right) \mathbb{P}(w_{i,k} \in dy)
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}(\varepsilon_i w_{i,k} > x, a \leq w_{i,k} \leq b) \quad (3.20)$$

对所有 $\vec{s}_k \in \Omega_{k,T}$ 一致成立. 而由不等式 (3.1) 可得到

$$\mathbb{P}(\varepsilon_j > (b(k-1))^{-1}l(x)) \asymp \mathbb{P}(\varepsilon_j > l(x)) = \bar{F}(l(x)).$$

由于分布 F 具有最终的尾部, 故总是存在一个正的、扩散到 ∞ 的缓慢变化函数 $l^*(x)$ 使得

$$\bar{F}(l(x)) = o(1)\bar{F}(l^*(x)) = o(1)\mathbb{P}(\varepsilon_j > l^*(x)).$$

因此, 由假定 (B1) 知, 对所有 $\vec{s}_k \in \Omega_{k,T}$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} I_{12}(x, \vec{s}_k) &\leq C\delta \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} \mathbb{P}(\varepsilon_i w_{i,k} > x, a \leq w_{i,k} \leq b) \mathbb{P}(\varepsilon_j > l^*(x)) h(s_i) h(s_j) \\ &\sim C\delta \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} \mathbb{P}(\varepsilon_i w_{i,k} > x, a \leq w_{i,k} \leq b \mid \theta_i = s_i) \mathbb{P}(\varepsilon_j > l^*(x) \mid \theta_j = s_j) \\ &\leq C\delta(k-1) \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_i w_{i,k} > x, a \leq w_{i,k} \leq b \mid \theta_i = s_i) \\ &\leq C\delta \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_i w_{i,k} > x \mid \theta_i = s_i), \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中, 第三步运用了任意条件概率均小于等于 1 的显著事实. 由 (3.17)、(3.18) 和 (3.21) 知, 对所有 $t \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} &\int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} I_1(x, \vec{s}_k) \bar{G}(t - t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i) \\ &\leq (1 + C\delta) \sum_{j=1}^k \int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x \mid \theta_j = s_j) \bar{G}(t - t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i) \\ &= (1 + C\delta) \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k). \end{aligned} \quad (3.22)$$

现在处理 (3.16) 中的 $I_2(x, \vec{s}_k)$. 由不等式 (3.10) 知, 对所有 $\vec{s}_k \in \Omega_{k,T}$,

$$\begin{aligned} I_2(x, \vec{s}_k) &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq k} \mathbb{P}\left(\varepsilon_j w_{j,k} > \frac{x'}{k}, w_{i,k} < a \mid \theta_j = s_j\right) \\ &\leq k \sum_{j=1}^k \mathbb{P}\left(\varepsilon_j w_T^+ > \frac{x'}{k}, w_T^- < a \mid \theta_j = s_j\right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

设 $z \in (0, 1)$ 为满足 $\eta z > \mathbb{J}_F^+$ 的常数. 根据 (3.14) 给出的 b 和常数 z , 我们可将 (3.23) 中的通项划分为如下三部分:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varepsilon_j w_T^+ > k^{-1}x', w_T^- < a \mid \theta_j = s_j) &= \mathbb{P}(\varepsilon_j w_T^+ > k^{-1}x', w_T^+ \leq b, w_T^- < a \mid \theta_j = s_j) \\ &\quad + \mathbb{P}(\varepsilon_j w_T^+ > k^{-1}x', b < w_T^+ \leq x^z, w_T^- < a \mid \theta_j = s_j) \\ &\quad + \mathbb{P}(\varepsilon_j w_T^+ > k^{-1}x', w_T^+ > x^z, w_T^- < a \mid \theta_j = s_j) \end{aligned}$$

$$=: I_{21}(x, T) + I_{22}(x, T) + I_{23}(x, T). \quad (3.24)$$

由假定 (B1) 可得, 对所有 $s_j \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} I_{21}(x, T) &\leq \mathbb{P}\left(\varepsilon_j > \frac{x'}{kb} \mid \theta_j = s_j\right) \mathbb{P}(w_T^- < a) \\ &\sim \mathbb{P}\left(\varepsilon_j > \frac{x'}{kb}\right) h(s_j) \mathbb{P}(w_T^- < a) \\ &\leq C_\eta (kb)^\eta \delta \bar{F}(x) h(s_j), \end{aligned} \quad (3.25)$$

其中, 最后一步运用了重尾分布簇 $\mathcal{L}$ 的定义 (2.1) 和 (3.1) 以及 (3.14) 中的不等式. 由假定 (B1) 和结果 (3.4) 可得, 对所有 $s_j \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} I_{22}(x, T) &\leq \mathbb{P}(\varepsilon_j w_T^+ > k^{-1} x', b < w_T^+ \leq x^z \mid \theta_j = s_j) \\ &\sim \mathbb{P}(\varepsilon_j w_T^+ > k^{-1} x', b < w_T^+ \leq x^z) h(s_j) \\ &\leq C \bar{F}(x') \mathbb{E}\{k^\eta (w_T^+)^{\eta} \mathbf{1}_{(w_T^+ > b)} + \mathbf{1}_{(w_T^+ > b)}\} h(s_j) \\ &\leq C \delta \bar{F}(x) h(s_j), \end{aligned} \quad (3.26)$$

其中, 最后一步运用了重尾分布簇 $\mathcal{L}$ 的定义 (2.1) 和不等式 (3.14). 由 Chebyshev 不等式和渐近关系 (3.2) 可得, 对所有 $s_j \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$I_{23}(x, T) \leq \mathbb{P}(w_T^+ > x^z) \leq x^{-\eta z} \mathbb{E}(w_T^+)^{\eta} \leq \delta \bar{F}(x) \mathbb{E}(w_T^+)^{\eta} \leq C \delta \bar{F}(x). \quad (3.27)$$

因此, 由 (3.23)–(3.27) 知, 对所有 $\vec{s}_k \in \Omega_{k,T}$ 和充分大的 x ,

$$I_2(x, \vec{s}_k) \leq C \delta \bar{F}(x) \left(\sum_{j=1}^k h(s_j) + k \right). \quad (3.28)$$

采用类似于 (3.23)–(3.28) 中的方法, 我们可以得到, 对所有 $\vec{s}_k \in \Omega_{k,T}$ 和充分大的 x ,

$$I_3(x, \vec{s}_k) \leq C \delta \bar{F}(x) \left(\sum_{j=1}^k h(s_j) + k \right). \quad (3.29)$$

由于不等式 $w_{j,k} \leq w_T^+$ 对所有 $0 \leq j \leq k$ 成立, 由不等式 (3.10) 和 Chebyshev 不等式, 我们可以得到, 对所有 $\vec{s}_k \in \Omega_{k,t}$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} I_4(x, \vec{s}_k) &\leq \sum_{j=1}^k \mathbb{P}\left(\varepsilon_j w_T > \frac{x}{k+1}, w_T > b \mid \theta_j = s_j\right) + \mathbb{P}\left(\varepsilon_0 w_T > \frac{x}{k+1}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^k \mathbb{P}\left(\varepsilon_j w_T^+ > \frac{x}{k+1}, w_T^+ > b \mid \theta_j = s_j\right) + C x^{-\eta} \mathbb{E}(w_T^+)^{\eta} \\ &\leq C \delta \bar{F}(x) \left(\sum_{j=1}^k h(s_j) + k + 1 \right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

其中, 最后一步运用了类似于 (3.24)–(3.27) 中的推导方法和渐近关系 (3.2). 注意到 $\tilde{t} = \sup\{t \geq 0 : \bar{G}(t) > 0\}$. 针对 $\tilde{t} = \infty$ 的情形, 由假定 (C)(i) 知, 存在常数 $t^* \in \Lambda$ 满足 $\inf_{0 \leq s \leq t^*} h(s) > 0$. 因此, 对所

有 $t \in \Lambda_T$,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} \bar{G}(t-t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i)}{\int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} h(s_k) \bar{G}(t-t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i)} \\
 & \leq \frac{\bar{G}(0)}{\bar{G}(T)} \frac{\int_{0-}^t \mathbb{P}(\tau_{k-1} \leq t-s_k) dG(s_k)}{\int_{0-}^t h(s_k) \mathbb{P}(\tau_{k-1} \leq t-s_k) dG(s_k)} \\
 & \leq \frac{\bar{G}(0)}{\bar{G}(T)} \frac{\int_{0-}^{t \wedge t^*} \mathbb{P}(\tau_{k-1} \leq t-s_k) dG(s_k) + \int_{t \wedge t^*}^t \mathbb{P}(\tau_{k-1} \leq t-s_k) dG(s_k) \mathbf{1}_{(t > t^*)}}{\int_{0-}^{t \wedge t^*} h(s_k) \mathbb{P}(\tau_{k-1} \leq t-s_k) dG(s_k)} \\
 & \leq \frac{\bar{G}(0)}{\bar{G}(T)} \left\{ \left(\inf_{s_k \in [0, t^*]} h(s_k) \right)^{-1} + \frac{\bar{G}(t^*)}{\int_{0-}^{t^*} h(s_k) dG(s_k)} \right\} < \infty.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

针对 $\tilde{t} < \infty$ 的情形, 由假定 (C)(ii) 知, $\inf_{0 \leq t \leq T} h(t) > 0$ 对任意固定的 $T \in \Lambda$ 成立. 从而, 对所有 $t \in \Lambda_T$,

$$\frac{\int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} \bar{G}(t-t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i)}{\int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} h(s_k) \bar{G}(t-t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i)} \leq \left(\inf_{0 \leq t \leq T} h(t) \right)^{-1} < \infty. \tag{3.32}$$

因此, 针对假定 (C) 中的两种情形均可得到, 对所有 $t \in \Lambda_T$,

$$\int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} \bar{G}(t-t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i) \leq C \int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} h(s_k) \bar{G}(t-t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i). \tag{3.33}$$

由于 $a \in (0, 1)$, 运用 (3.1)、(3.10) 和 (3.14) 可得, 对充分大的 x 和所有 $1 \leq j \leq k$,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x, a \leq w_{j,k} \leq b) & \geq \mathbb{P}(\varepsilon_j a > x) \mathbb{P}(a \leq w_{j,k} \leq b) \\
 & \geq C_\eta^{-1} a^\eta \bar{F}(x) \{1 - \mathbb{P}(w_T^- < a) - \mathbb{P}(w_T^+ > b)\} \\
 & \geq (1 - \delta) C_\eta^{-1} a^\eta \bar{F}(x).
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

因此, 由 (3.28)–(3.30)、(3.33)、(3.34) 和假定 (B1) 知, 对所有 $t \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned}
 & \int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} \{I_2(x, \vec{s}_k) + I_3(x, \vec{s}_k) + I_4(x, \vec{s}_k)\} \bar{G}(t-t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i) \\
 & \leq C\delta \int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} \bar{F}(x) \left(\sum_{j=1}^k h(s_j) + k \right) \bar{G}(t-t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i) \\
 & \leq C\delta \sum_{j=1}^k \int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} \bar{F}(x) h(s_j) \bar{G}(t-t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i) \\
 & \leq C\delta \sum_{j=1}^k \int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x, a \leq w_{j,k} \leq b) h(s_j) \bar{G}(t-t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i) \\
 & \sim C\delta \sum_{j=1}^k \int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x, a \leq w_{j,k} \leq b \mid \theta_j = s_j) \bar{G}(t-t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i) \\
 & \leq C\delta \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k).
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

根据 (3.13)、(3.16)、(3.22) 和 (3.35) 中的推导和 δ 的任意性, 我们得到渐近关系 (3.11) 在集合 Λ_T 上的一致上界.

下面证明渐近关系 (3.11) 在集合 Λ_T 上的一致下界. 对任意固定的 $T \in \Lambda$, 由假定 (D1) 和 Hölder 不等式得

$$\mathbb{E}Z_T^\eta = \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-\xi_s} ds\right)^\eta \leq T^{\eta-1} \int_0^T \mathbb{E}e^{-\eta\xi_s} ds = T^{\eta-1} \int_0^T e^{s\phi(\eta)} ds < \infty.$$

因此, 对任意固定的 $\delta \in (0, 1)$, 可选取某个常数 $D > 0$ 满足

$$\mathbb{P}(Z_T > D) < \delta. \quad (3.36)$$

根据常数 D 和 (3.15) 中的记号 E_1 , 可将 (3.13) 中的条件概率划分为如下两个部分:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^k \varepsilon_j w_{j,k} - cZ_t > x \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right) &\geq \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k \varepsilon_j w_{j,k} > x + cD, E_1, Z_t \leq D \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k \varepsilon_j w_{j,k} > x + cD, E_1 \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right) \\ &\quad - \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k \varepsilon_j w_{j,k} > x, E_1, Z_t > D \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right) \\ &=: I'_1(x, \vec{s}_k) - I'_2(x, \vec{s}_k). \end{aligned} \quad (3.37)$$

进一步将 $I'_1(x, \vec{s}_k)$ 划分为如下两部分:

$$\begin{aligned} I'_1(x, \vec{s}_k) &\geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^k \{\varepsilon_j w_{j,k} > x + cD\}, E_1 \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right) \\ &\geq \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x + cD, E_1 \mid \theta_j = s_j) \\ &\quad - \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x, \varepsilon_i w_{i,k} > x, E_1 \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k) \\ &=: I'_{11}(x, \vec{s}_k) - I'_{12}(x, \vec{s}_k). \end{aligned} \quad (3.38)$$

对于 $I'_{11}(x, \vec{s}_k)$, 由假定 (B1) 和引理 1, 渐近关系

$$\begin{aligned} I'_{11}(x, \vec{s}_k) &\sim \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x, E_1) h(s_j) \sim \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x, E_1 \mid \theta_j = s_j) \\ &\geq \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x \mid \theta_j = s_j) - \sum_{m=2}^3 \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x, E_m \mid \theta_j = s_j) \end{aligned} \quad (3.39)$$

对所有 $\vec{s}_k \in \Omega_{k,T}$ 一致成立, 而记号 E_2 和 E_3 的具体定义见 (3.15). 运用类似于 (3.23)–(3.29) 和 (3.31)–(3.35) 的推导可得, 对所有 $t \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\sum_{m=2}^3 \sum_{j=1}^k \int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x, E_m \mid \theta_j = s_j) \bar{G}(t - t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i)$$

$$\leq C\delta \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k). \quad (3.40)$$

而采用类似于 (3.19)–(3.21) 中的方法可得到, 对所有 $\vec{s}_k \in \Omega_{k,T}$ 和充分大的 x ,

$$I'_{12}(x, \vec{s}_k) \leq C\delta \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x \mid \theta_j = s_j). \quad (3.41)$$

由 (3.38)–(3.41) 知, 对所有 $t \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} I'_1(x, \vec{s}_k) \bar{G}(t - t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i) \geq (1 - C\delta) \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k). \quad (3.42)$$

现在处理 (3.37) 中的 $I'_2(x, \vec{s}_k)$. 由假定 (B1) 知, 对所有 $\vec{s}_k \in \Omega_{k,T}$, $t \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} I'_2(x, \vec{s}_k) &\leq \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k \varepsilon_j > \frac{x}{b}, Z_T > D \mid \vec{\theta}_k = \vec{s}_k\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^k \mathbb{P}\left(\varepsilon_j > \frac{x}{bk} \mid \theta_j = s_j\right) \mathbb{P}(Z_T > D) \\ &\sim \sum_{j=1}^k \mathbb{P}\left(\varepsilon_j > \frac{x}{bk}\right) h(s_j) \mathbb{P}(Z_T > D) \\ &\leq C\delta \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x, a \leq w_{j,k} \leq b) h(s_j) \\ &\sim C\delta \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x, a \leq w_{j,k} \leq b \mid \theta_j = s_j) \\ &\leq C\delta \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j w_{j,k} > x \mid \theta_j = s_j), \end{aligned}$$

其中, 第四步运用了 (3.1)、(3.34) 和 (3.36). 因此, 对所有 $t \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} I'_2(x, \vec{s}_k) \bar{G}(t - t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i) \leq C\delta \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k). \quad (3.43)$$

由 (3.13)、(3.37)、(3.42)、(3.43) 中的推导和 δ 的任意性, 我们得到渐近关系 (3.11) 在集合 Λ_T 上的一致下界.

现只需在定理 2 的条件下证明渐近关系 (3.12) 的局部一致性. 取 $\max\{\alpha, 1\} < p < \kappa$. 由假定 (D2) 知, $\{\xi_t, t \geq 0\}$ 的 Laplace 指数 $\phi(\cdot)$ 在 p 点小于零, 即 $\phi(p) \in (-\infty, 0)$. 因此, 对任意固定的 $T \in \Lambda$, 由 Hölder 不等式知,

$$\mathbb{E} Z_T^p = \mathbb{E} \left(\int_0^T e^{-\xi_s} ds \right)^p \leq T^{p-1} \int_0^T \mathbb{E} e^{-p\xi_s} ds = T^{p-1} \int_0^T e^{s\phi(p)} ds \leq T^p < \infty.$$

采用证明渐近关系 (3.11) 的局部一致性的方法, 但运用假定 (D2) 代替 (D1), 并在 (3.18) 和 (3.39) 中进一步运用渐近关系 (3.3), 我们可以得到渐近关系 (3.11) 在集合 Λ_T 上的局部一致性. 证毕. $\square$

下面为了方便起见, 引入记号

$$\Delta_{j,s,t} := \sum_{n=j}^{\infty} \varphi_{n-j} e^{-\xi_s + \tau_n - \tau_j} \mathbf{1}_{(s+\tau_n - \tau_j \leq t)}, \quad j \geq 1, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (3.44)$$

由假定 (A) 可看出, 对每一个 $j = 1, 2, \dots$,

$$w_t^- = \varphi_0 e^{-\sup_{s \in [0,t]} \xi_s} \leq \Delta_{j,s,t} \leq \bar{\varphi} e^{-\inf_{s \in [0,t]} \xi_s} = w_t^+, \quad (3.45)$$

其中, 记号 w_t^- 和 w_t^+ 的定义见 (3.10).

下面两个引理在定理 1 和 2 的证明中起到关键作用.

引理 3 在定理 1 的条件下, 假定 $\{W_j(t), j \geq 0\}$ 如 (3.8) 中定义, 对任意固定 $T \in \Lambda$,

$$\limsup_{M \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow \infty} \sup_{t \in \Lambda_T} \frac{\sum_{k=M}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k)}{\mathbb{P}(\varepsilon_1 W_1(t) > x, \tau_1 \leq t)} = 0. \quad (3.46)$$

进一步, 在定理 2 的假定下, 对任意固定的 $T \in \Lambda$,

$$\limsup_{M \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow \infty} \sup_{t \in \Lambda_T} \frac{\sum_{k=M}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k)}{\bar{F}(x) \mathbb{E}\{W_1^\alpha(t) h(\theta_1) \mathbf{1}_{(\tau_1 \leq t)}\}} = 0. \quad (3.47)$$

证明 我们首先证明 (3.46). 由 (3.8) 中 $\{W_j(t), j \geq 0\}$ 的定义易知, 给定 $N_t = k$,

$$W_j(t) = \sum_{n=1 \vee j}^k \varphi_{n-j} e^{-\xi_{\tau_n}} \leq \bar{\varphi} e^{-\inf_{s \in [0,t]} \xi_s} = w_t^+, \quad 0 \leq j \leq k;$$

而对所有 $j > k$, $W_j(t) \equiv 0$. 由 Chebyshev 不等式知, 对所有 $t \in \Lambda_T$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^k \varepsilon_j w_t^+ > x, N_t = k\right) \leq \sum_{j=1}^k \mathbb{P}\left(\varepsilon_j w_T^+ > \frac{x}{k+1}, N_t = k\right) + \mathbb{P}\left(\varepsilon_0 w_T^+ > \frac{x}{k+1}, N_t = k\right) \\ & \leq \int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} \left\{ \sum_{j=1}^k \mathbb{P}\left(\varepsilon_j w_T^+ > \frac{x}{k+1} \mid \theta_j = s_j\right) + C k^\eta x^{-\eta} \mathbb{E}(w_T^+)^{\eta} \right\} \bar{G}(t - t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i). \end{aligned}$$

注意到假定 (D1) 蕴含 $\mathbb{E}(w_T^+)^{\eta} < \infty$. 取定 $z \in (0, 1)$ 使得 $\eta z > \mathbb{J}_F^+$. 对任意固定 $\delta \in (0, 1)$, 由假定 (B1) 和 Chebyshev 不等式知, 对所有 $s_j \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\varepsilon_j w_T^+ > \frac{x}{k+1} \mid \theta_j = s_j\right) & \leq \mathbb{P}\left(\varepsilon_j w_T^+ > \frac{x}{k+1}, w_T^+ \leq x^z \mid \theta_j = s_j\right) + \mathbb{P}(w_T^+ > x^z) \\ & \lesssim \mathbb{P}\left(\varepsilon_j w_T^+ > \frac{x}{k+1}\right) h(s_j) + x^{-\eta z} \mathbb{E}(w_T^+)^{\eta} \\ & \leq C \bar{F}\left(\frac{x}{k+1}\right) \{\mathbb{E}(w_T^+)^{\eta} + \mathbb{E} \mathbf{1}_{(w_T^+ < 1)}\} h(s_j) + C \delta \bar{F}(x) \\ & \leq C k^\eta \bar{F}(x) h(s_j) + C \delta \bar{F}(x), \end{aligned}$$

其中, 第三步运用了 (3.2) 和 (3.4), 而最后一步中运用了 (3.1). 任取 $0 < a < 1 < b < \infty$ 使得 $\mathbb{P}(w_T^- < a) + \mathbb{P}(w_T^+ > b) \leq 1/2$. 由 (3.1) 和 (3.45) 知, 对所有 $s \in [0, t]$, $t \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,s,t} > x) &\geq \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,s,t} > x, a \leq \Delta_{j,s,t} \leq b) \geq \mathbb{P}(a\varepsilon_j > x) \mathbb{P}(a \leq \Delta_{j,s,t} \leq b) \\ &\geq C_\eta^{-1} a^\eta \bar{F}(x) [1 - \mathbb{P}(w_T^- < a) - \mathbb{P}(w_T^+ > b)] \geq (2C_\eta)^{-1} a^\eta \bar{F}(x). \end{aligned} \quad (3.48)$$

注意到假定 (C) 蕴含着: 对所有 $t \in \Lambda_T$, (3.33) 成立. 因此, 由在 $j = 1$ 情形下的渐近关系 (3.48) 和假定 (B1) 可得, 对所有 $t \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=M}^{\infty} k \mathbb{P} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k \right) \\ &\leq C \sum_{k=M}^{\infty} k^{\eta+1} \sum_{j=1}^k \int \cdots \int_{\Omega_{k,t}} \bar{F}(x) h(s_j) \bar{G}(t - t_k) \prod_{i=1}^k dG(s_i) \\ &= C \sum_{k=M}^{\infty} k^{\eta+1} \sum_{j=1}^k \int_{0-}^t \bar{F}(x) h(s_j) \mathbb{P}(N_{t-s_j} = k-1) dG(s_j) \\ &\leq C \sum_{k=M}^{\infty} k^{\eta+2} \mathbb{P}(N_T \geq k-1) \int_{0-}^t \mathbb{P}(\varepsilon_1 \Delta_{1,u,t} > x, a \leq \Delta_{1,u,t} \leq b) h(u) dG(u) \\ &\sim C \sum_{k=M}^{\infty} k^{\eta+2} \mathbb{P}(N_T \geq k-1) \int_{0-}^t \mathbb{P}(\varepsilon_1 \Delta_{1,u,t} > x, a \leq \Delta_{1,u,t} \leq b \mid \theta_1 = u) dG(u) \\ &\leq C \mathbb{P}(\varepsilon_1 W_1(t) > x, \tau_1 \leq t) \sum_{k=M}^{\infty} k^{\eta+2} \mathbb{P}(N_T \geq k-1). \end{aligned} \quad (3.49)$$

由文献 [37, 引理 3.2] 知, 存在常数 $h > 0$ 满足 $\mathbb{E}e^{hN_T} < \infty$. 因此, 当 $M \rightarrow \infty$, (3.49) 中最后的求和项趋近于 0. 从而, (3.46) 成立.

下面在定理 2 的条件下证明 (3.47). 事实上, 采用类似于证明 (3.46) 的方法并在推导 (3.49) 的第三步中运用 (3.3), 我们可以得到 (3.47). 证毕. $\square$

引理 4 在定理 1 的条件下, 假定 $\{W_j(t), j \geq 1\}$ 如 (3.8) 中定义, 对任意固定的 $T \in \Lambda$, 渐近关系

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, \tau_j \leq t) \sim \int_{0-}^t \left\{ \mathbb{P}(\varepsilon \Theta_{u,t} > x) + \int_{0-}^{t-u} \mathbb{P}(\varepsilon \Theta_{u+v,t} > x) d\lambda_v \right\} h(u) dG(u) \quad (3.50)$$

对所有 $t \in \Lambda_T$ 一致成立, 其中 $\Theta_{u,t}$ 和 $\Theta_{u+v,t}$ 在 (2.4) 给出. 进一步, 在定理 2 的条件下, 对任意 $\alpha \geq 0$ 和 $0 \leq t \leq \infty$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} W_j^\alpha(t) h(\theta_j) = \int_{0-}^t \left\{ \mathbb{E} \Theta_{u,t}^\alpha + \int_{0-}^{t-u} \mathbb{E} \Theta_{u+v,t}^\alpha d\lambda_v \right\} h(u) dG(u). \quad (3.51)$$

证明 我们首先证明渐近关系 (3.50) 的局部一致性. 注意到 (3.8) 给出的 $\{W_j(t), j \geq 1\}$ 和 (3.44) 中给出的 $\Delta_{j,s,t}$, 对每个 $j \geq 1$,

$$\mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, \tau_j \leq t) = \int_{0-}^t \int_{0-}^{t-u} \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x \mid \theta_j = u) \mathbb{P}(\tau_{j-1} \in dv) dG(u). \quad (3.52)$$

固定常数 $z \in (0, 1)$ 使得 $\eta z > \mathbb{J}_F^+$. 对任意固定的 $\delta \in (0, 1)$, 由假定 (B1) 和 Chebyshev 不等式有, 对所有 $(u, v) \in \Omega_{2,t}$, $t \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x \mid \theta_j = u) &\leq \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x, \Delta_{j,u+v,t} \leq x^z \mid \theta_j = u) + \mathbb{P}(\Delta_{j,u+v,t} > x^z) \\ &\leq (1 + \delta) \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x, \Delta_{j,u+v,t} \leq x^z) h(u) + x^{-\eta z} \mathbb{E} \Delta_{j,u+v,t}^\eta \\ &\leq (1 + \delta) \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x) h(u) + \delta \bar{F}(x) \mathbb{E}(w_T^+)^{\eta}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

其中, 最后一步运用了 (3.2) 和 (3.45). 采用类似于 (3.31)–(3.33) 的推导, 我们得到在假定 (C) 的两种情形下,

$$\sup_{t \in \Lambda_T} \frac{\int_{0-}^t \int_{0-}^{t-u} \mathbb{P}(\tau_{j-1} \in dv) dG(u)}{\int_{0-}^t \int_{0-}^{t-u} h(u) \mathbb{P}(\tau_{j-1} \in dv) dG(u)} = \sup_{t \in \Lambda_T} \frac{\int_{0-}^t \mathbb{P}(\tau_{j-1} \leq t-u) dG(u)}{\int_{0-}^t \mathbb{P}(\tau_{j-1} \leq t-u) h(u) dG(u)} < \infty. \quad (3.54)$$

注意到假定 (D1) 蕴含 $\mathbb{E}(w_T^+)^{\eta} < \infty$. 因此, 由 (3.52)–(3.54) 知, 对所有 $t \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, \tau_j \leq t) &\leq \int_{0-}^t \int_{0-}^{t-u} \{(1 + \delta) \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x) h(u) + C \delta \bar{F}(x)\} \mathbb{P}(\tau_{j-1} \in dv) dG(u) \\ &\leq \int_{0-}^t \int_{0-}^{t-u} \{(1 + \delta) \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x) + C \delta \bar{F}(x)\} h(u) \mathbb{P}(\tau_{j-1} \in dv) dG(u) \\ &\leq (1 + C \delta) \int_{0-}^t \int_{0-}^{t-u} \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x) h(u) \mathbb{P}(\tau_{j-1} \in dv) dG(u), \end{aligned} \quad (3.55)$$

其中, 最后一步运用了 (3.48) ($s = u + v$). 另一方面, 由假定 (B1) 知, 对所有 $(u, v) \in \Omega_{2,t}$, $t \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x \mid \theta_j = u) &\geq \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x, \Delta_{j,u+v,t} \leq x^z \mid \theta_j = u) \\ &\geq (1 - \delta) \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x, \Delta_{j,u+v,t} \leq x^z) h(u) \\ &\geq (1 - \delta) \{\mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x) - \mathbb{P}(\Delta_{j,u+v,t} > x^z)\} h(u) \\ &\geq (1 - \delta) \{\mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x) - x^{-\eta z} \mathbb{E} \Delta_{j,u+v,t}^\eta\} h(u) \\ &\geq (1 - \delta) \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x) h(u) - C \delta \bar{F}(x) \mathbb{E}(w_T^+)^{\eta} h(u), \end{aligned} \quad (3.56)$$

其中, 第四步运用了 Chebyshev 不等式, 最后一步运用了 (3.2) 和 (3.45). 因此, 由 (3.52) 和 (3.56) 知, 对所有 $t \in \Lambda_T$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, \tau_j \leq t) &\geq \int_{0-}^t \int_{0-}^{t-u} \{(1 - \delta) \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x) - C \delta \bar{F}(x)\} h(u) \mathbb{P}(\tau_{j-1} \in dv) dG(u) \\ &\geq (1 - C \delta) \int_{0-}^t \int_{0-}^{t-u} \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x) h(u) \mathbb{P}(\tau_{j-1} \in dv) dG(u), \end{aligned} \quad (3.57)$$

其中, 最后一步运用了 $s = u + v$ 情形下的 (3.48). 从而, 由 (3.55) 和 (3.57), 渐近关系

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, \tau_j \leq t) &\sim \sum_{j=1}^{\infty} \int_{0-}^t \int_{0-}^{t-u} \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u+v,t} > x) h(u) \mathbb{P}(\tau_{j-1} \in dv) dG(u) \\ &= \int_{0-}^t \mathbb{P}\left(\varepsilon_j \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-\xi u + \tau_{k+j} - \tau_j} \mathbf{1}_{(u + \tau_{k+j} - \tau_j \leq t)} > x\right) h(u) dG(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=2}^{\infty} \int_{0-}^t \int_{0-}^{t-u} \mathbb{P} \left(\varepsilon_j \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-\xi_{u+v+\tau_{k+j}-\tau_j}} \mathbf{1}_{(u+v+\tau_{k+j}-\tau_j \leq t)} > x \right) \\
& \times h(u) \mathbb{P}(\tau_{j-1} \in dv) dG(u) \\
& = \int_{0-}^t \mathbb{P} \left(\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-\xi_{u+\tau_k}} \mathbf{1}_{(u+\tau_k \leq t)} > x \right) h(u) dG(u) \\
& + \int_{0-}^t \int_{0-}^{t-u} \mathbb{P} \left(\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-\xi_{u+v+\tau_k}} \mathbf{1}_{(u+v+\tau_k \leq t)} > x \right) d\lambda_v h(u) dG(u) \quad (3.58)
\end{aligned}$$

对所有 $t \in \Lambda_T$ 一致成立. 等式 (3.51) 可采用证明 (3.58) 的类似方法得到. 证毕. $\square$

3.2 定理 1 的证明

定理 1 的证明 注意到 (3.7) 和 (3.8), 我们可将 (1.4) 中的 U_t 表示为

$$U_t = e^{\xi_t} \left(x + \int_{0-}^t e^{-\xi_s} dR_s \right) = e^{\xi_t} \left(x + cZ_t - \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(t) \right), \quad t \geq 0, \quad (3.59)$$

其中, $\{W_j(t), j \geq 0\}$ 和 Z_t 的定义由 (3.8) 给出. 因此, (1.6) 中的破产概率 $\Psi(x, t)$ 和 $\Psi(x)$ 可由 $\{W_j(t), j \geq 0\}$ 和 Z_t 等价表述为

$$\Psi(x, t) = \mathbb{P} \left(\sup_{0 < s \leq t} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(s) - cZ_s \right\} > x \right), \quad (3.60)$$

$$\Psi(x) = \mathbb{P} \left(\sup_{s > 0} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(s) - cZ_s \right\} > x \right). \quad (3.61)$$

我们首先证明渐近关系 (2.3) 的一致上界. 由 (3.60) 知, 对任意固定的整数 $M \geq 1$,

$$\Psi(x, t) \leq \left(\sum_{k=1}^M + \sum_{k=M+1}^{\infty} \right) \mathbb{P} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k \right). \quad (3.62)$$

由引理 2 中渐近关系 (3.11) 的局部一致性知, 渐近关系

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^M \mathbb{P} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k \right) & \sim \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k) \\
& \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k) \\
& = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, \tau_j \leq t) \quad (3.63)
\end{aligned}$$

对所有 $t \in \Lambda_T$ 一致成立. 由 (3.62)、(3.63) 和引理 3 中的 (3.46) 可得, 渐近关系

$$\Psi(x, t) \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, \tau_j \leq t)$$

对所有 $t \in \Lambda_T$ 一致成立. 由上式和引理 4 中渐近关系 (3.50) 的局部一致性可得渐近关系 (2.3) 的局部一致性.

下面证明渐近关系 (2.3) 的一致下界. 对任意固定的整数 $M \geq 1$, 由 (3.60) 和引理 2 中渐近关系 (3.11) 的局部一致性, 渐近关系

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &\geq \sum_{k=1}^M \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(t) - cZ_t > x, N_t = k\right) \\ &\sim \left(\sum_{k=1}^{\infty} - \sum_{k=M+1}^{\infty}\right) \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, \tau_j \leq t) - \sum_{k=M+1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k)\end{aligned}$$

对所有 $t \in \Lambda_T$ 一致成立. 显然,

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k) \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k\right).$$

该式和引理 3 中的 (3.46) 蕴含着

$$\limsup_{M \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow \infty} \sup_{t \in \Lambda_T} \frac{\sum_{k=M+1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, N_t = k)}{\mathbb{P}(\varepsilon_1 W_1(t) > x, \tau_1 \leq t)} = 0.$$

因此, 渐近关系

$$\Psi(x, t) \gtrsim \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j(t) > x, \tau_j \leq t)$$

对所有 $t \in \Lambda_T$ 一致成立. 由该式和引理 4 中渐近关系 (3.50) 的局部一致性可得渐近关系 (2.3) 的局部一致性. 证毕. $\square$

4 定理 2 的证明

为了证明定理 2, 我们需要进一步建立一些重要引理.

4.1 引理

为了符号的方便起见, 定义

$$W_j := \sum_{n=1 \vee j}^{\infty} \varphi_{n-j} e^{-\xi \tau_n} \leq \bar{\varphi} \sum_{n=1 \vee j}^{\infty} e^{-\xi \tau_n} =: \widetilde{W}_j, \quad j \geq 0, \quad (4.1)$$

并且对任一 $j \geq 1, u \geq 0$, 记

$$\Delta_{j,u} := \sum_{n=j}^{\infty} \varphi_{n-j} e^{-\xi \tau_{j-1} + u + \tau_n - \tau_j} \leq \bar{\varphi} \sum_{n=j}^{\infty} e^{-\xi \tau_{j-1} + u + \tau_n - \tau_j} =: \widetilde{\Delta}_{j,u}. \quad (4.2)$$

下面的引理给出 (4.1) 中的随机变量 $\{\widetilde{W}_j, j \geq 0\}$ 和随机变量某阶矩无限和的有限性. 该引理将运用在引理 6 和 7 以及定理 2 的证明中.

引理 5 在定理 2 的条件下, 对任一 $q \geq 0$ 和 $0 < p < \kappa$, 有

$$\mathbb{E}\widetilde{W}_0^p + \sum_{j=1}^{\infty} j^q \{\mathbb{E}\widetilde{W}_j^p + \mathbb{E}\widetilde{W}_j^p h(\theta_j)\} < \infty. \quad (4.3)$$

证明 当 $0 < p \leq 1$ 时, 由 C_r 不等式知, 对每个 $j \geq 0$,

$$\widetilde{W}_j^p = \bar{\varphi}^p \left(\sum_{n=1 \vee j}^{\infty} e^{-\xi_{\tau_n}} \right)^p \leq \bar{\varphi}^p \sum_{n=1 \vee j}^{\infty} e^{-p\xi_{\tau_n}}. \quad (4.4)$$

当 $p > 1$ 时, 由 Hölder 不等式知, 对每个 $j \geq 0$,

$$\widetilde{W}_j^p = \bar{\varphi}^p \left(\sum_{n=1 \vee j}^{\infty} e^{-\xi_{\tau_n}} \right)^p \leq \bar{\varphi}^p \left(\sum_{n=1 \vee j}^{\infty} n^{-2} \right)^{p-1} \sum_{n=1 \vee j}^{\infty} n^{2p-2} e^{-p\xi_{\tau_n}}. \quad (4.5)$$

注意到 Lévy 过程 $\{\xi_t, t \geq 0\}$ 的 Laplace 指数 $\phi(\cdot)$ 为区间 $[0, \infty)$ 上的凸函数, 并且 $\phi(0) = 0$. 因此, 由假定 (D2) 知, 对任意 $0 < p < \kappa$, $\phi(p) \in (-\infty, 0)$. 从而, 由 $j = 0$ 时的 (4.4) 和 (4.5) 可得, 对任意 $0 < p < \kappa$,

$$\mathbb{E}\widetilde{W}_0^p \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{2p} \mathbb{E}e^{-p\xi_{\tau_n}} = C \sum_{n=1}^{\infty} n^{2p} \mathbb{E}e^{\tau_n \phi(p)} = C \sum_{n=1}^{\infty} n^{2p} (\mathbb{E}e^{\theta \phi(p)})^n < \infty; \quad (4.6)$$

而由 $j = 1, 2, \dots$ 时的 (4.4) 和 (4.5) 可得, 对任意 $0 < p < \kappa$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\widetilde{W}_j^p + \mathbb{E}\widetilde{W}_j^p h(\theta_j) &\leq C \sum_{n=j}^{\infty} n^{2p} \{\mathbb{E}e^{-p\xi_{\tau_n}} + \mathbb{E}e^{-p\xi_{\tau_n}} h(\theta_j)\} \\ &= C \sum_{n=j}^{\infty} n^{2p} \left\{ (\mathbb{E}e^{\theta \phi(p)})^n + \int_{\Lambda} \mathbb{E}e^{(\tau_{j-1}+u+\tau_n-\tau_j)\phi(p)} h(u) dG(u) \right\} \\ &= C \sum_{n=j}^{\infty} n^{2p} \{(\mathbb{E}e^{\theta \phi(p)})^n + (\mathbb{E}e^{\theta \phi(p)})^{n-1}\}, \end{aligned}$$

其中, 最后的等式运用了 $\mathbb{E}h(\theta) = 1$. 因此, 对任意 $q \geq 0$ 和 $0 < p < \kappa$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} j^q \{\mathbb{E}\widetilde{W}_j^p + \mathbb{E}\widetilde{W}_j^p h(\theta_j)\} &\leq C \sum_{j=1}^{\infty} j^q \sum_{n=j}^{\infty} n^{2p} \{(\mathbb{E}e^{\theta \phi(p)})^n + (\mathbb{E}e^{\theta \phi(p)})^{n-1}\} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{2p+q+1} \{(\mathbb{E}e^{\theta \phi(p)})^n + (\mathbb{E}e^{\theta \phi(p)})^{n-1}\} < \infty. \end{aligned} \quad (4.7)$$

由 (4.6) 和 (4.7) 知, (4.3) 成立. 证毕. $\square$

下面的引理建立随机变量 ε_j 和 W_j 乘积的尾的渐近性并将在引理 7 的证明中发挥关键作用.

引理 6 在定理 2 的条件下, 假定 $\{W_j, j \geq 0\}$ 如 (4.1) 中定义, 对任意整数 $j \geq 1$, 有

$$\mathbb{P}(\varepsilon_j W_j > x) \sim \bar{F}(x) \mathbb{E}W_j^\alpha h(\theta_j). \quad (4.8)$$

证明 首先证明 (4.8) 的渐近上界. 任意取定 $0 < p_1 < \alpha < p_2 < \kappa$. 由不等式 (4.1) 和引理 5 可得

$$\mathbb{E}[W_j^\alpha h(\theta_j) + W_j^{p_2}] < \infty, \quad (4.9)$$

并且对任意固定的 $\delta > 0$, 我们可选取充分大的 $b > 0$ 使得

$$\mathbb{E}\{[W_j^{p_1} + W_j^\alpha + W_j^{p_2}]h(\theta_j)\mathbf{1}_{(W_j > b)}\} < \delta. \quad (4.10)$$

注意到 (4.2) 中定义的 $\Delta_{j,u}$. 显然,

$$\mathbb{P}(\varepsilon_j W_j > x) = \int_{\Lambda} \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u} > x \mid \theta_j = u) dG(u). \quad (4.11)$$

取定 $z \in (0, 1)$ 使得 $p_2 z > \alpha$. 依据 b 和 z , 我们可将 (4.11) 中的条件概率分为如下三部分:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u} > x \mid \theta_j = u) &= \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u} > x, \Delta_{j,u} \leq b \mid \theta_j = u) \\ &\quad + \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u} > x, b < \Delta_{j,u} \leq x^z \mid \theta_j = u) \\ &\quad + \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u} > x, \Delta_{j,u} > x^z \mid \theta_j = u) \\ &=: I_1(x) + I_2(x) + I_3(x). \end{aligned} \quad (4.12)$$

由假定 (B2) 和关系 (3.3) 可得, 对所有 $u \in \Lambda$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_0^b \mathbb{P}\left(\varepsilon_j > \frac{x}{v} \mid \theta_j = u\right) \mathbb{P}(\Delta_{j,u} \in dv) \\ &\sim \int_0^b \bar{F}\left(\frac{x}{v}\right) h(u) \mathbb{P}(\Delta_{j,u} \in dv) \\ &\leq \int_0^b \bar{F}(x)(v^\alpha + \delta) h(u) \mathbb{P}(\Delta_{j,u} \in dv) \\ &\leq \bar{F}(x) \mathbb{E} \Delta_{j,u}^\alpha h(u) + \delta \bar{F}(x) h(u). \end{aligned} \quad (4.13)$$

由假定 (B2) 和不等式 (3.5) 可得, 对所有 $u \in \Lambda$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} I_2(x) &\sim \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u} > x, b < \Delta_{j,u} \leq x^z) h(u) \leq \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u} > x, \Delta_{j,u} > b) h(u) \\ &\leq C \bar{F}(x) \mathbb{E}\{\Delta_{j,u}^{p_1} \mathbf{1}_{(\Delta_{j,u} > b)} + \Delta_{j,u}^{p_2} \mathbf{1}_{(\Delta_{j,u} > b)}\} h(u). \end{aligned} \quad (4.14)$$

由 Chebyshev 不等式和渐近关系 (3.2) 知, 对所有 $u \in \Lambda$ 和充分大的 x ,

$$I_3(x) \leq \mathbb{P}(\Delta_{j,u} > x^z) \leq x^{-p_2 z} \mathbb{E} \Delta_{j,u}^{p_2} \leq \delta \bar{F}(x) \mathbb{E} \Delta_{j,u}^{p_2}. \quad (4.15)$$

联合 (4.11)–(4.15) 可得, 对充分大的 x ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j > x) &\leq \bar{F}(x) \int_{\Lambda} \{\mathbb{E} \Delta_{j,u}^\alpha + \delta + C \mathbb{E}(\Delta_{j,u}^{p_1} + \Delta_{j,u}^{p_2}) \mathbf{1}_{(\Delta_{j,u} > b)}\} h(u) + \delta \mathbb{E} \Delta_{j,u}^{p_2} dG(u) \\ &= \bar{F}(x) \{\mathbb{E} W_j^\alpha h(\theta_j) + \delta + C \mathbb{E}[(W_j^{p_1} + W_j^{p_2}) h(\theta_j) \mathbf{1}_{(W_j > b)}] + \delta \mathbb{E} W_j^{p_2}\} \\ &\leq \bar{F}(x) \mathbb{E} W_j^\alpha h(\theta_j) + C \delta \bar{F}(x) \\ &\leq (1 + C \delta) \bar{F}(x) \mathbb{E} W_j^\alpha h(\theta_j), \end{aligned}$$

其中, 第二步运用了 $\mathbb{E}h(\theta_j) = 1$, 而第三步运用了 (4.9) 和 (4.10). 由 δ 的任意性可得渐近关系 (4.8) 的渐近上界.

下面证明 (4.8) 的渐近下界. 由假定 (B2) 和渐近关系 (3.3) 知, 对所有 $u \in \Lambda$ 和充分大的 x ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u} > x \mid \theta_j = u) &\geq \mathbb{P}(\varepsilon_j \Delta_{j,u} > x, \Delta_{j,u} \leq b \mid \theta_j = u) \\ &= \int_0^b \mathbb{P}\left(\varepsilon_j > \frac{x}{v} \mid \theta_j = u\right) \mathbb{P}(\Delta_{j,u} \in dv) \\ &\sim \int_0^b \bar{F}\left(\frac{x}{v}\right) h(u) \mathbb{P}(\Delta_{j,u} \in dv) \\ &\geq \int_0^b \bar{F}(x)(v^\alpha - \delta) h(u) \mathbb{P}(\Delta_{j,u} \in dv) \\ &= \bar{F}(x) \mathbb{E}\{\Delta_{j,u}^\alpha \mathbf{1}_{(\Delta_{j,u} \leq b)} - \delta \mathbf{1}_{(\Delta_{j,u} \leq b)}\} h(u) \\ &\geq \bar{F}(x) \{\mathbb{E}\Delta_{j,u}^\alpha h(u) - \mathbb{E}\Delta_{j,u}^\alpha h(u) \mathbf{1}_{(\Delta_{j,u} > b)} - \delta h(u)\}. \end{aligned}$$

该估计式和等式 (4.11) 给出, 对充分大的 x ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j > x) &\geq \bar{F}(x) \int_\Lambda \{\mathbb{E}\Delta_{j,u}^\alpha h(u) - \mathbb{E}\Delta_{j,u}^\alpha h(u) \mathbf{1}_{(\Delta_{j,u} > b)} - \delta h(u)\} dG(u) \\ &= \bar{F}(x) \{\mathbb{E}W_j^\alpha h(\theta_j) - \mathbb{E}W_j^\alpha h(\theta_j) \mathbf{1}_{(W_j > b)} - \delta\} \\ &\geq \bar{F}(x) \mathbb{E}W_j^\alpha h(\theta_j) - C\delta \bar{F}(x) \\ &\geq (1 - C\delta) \bar{F}(x) \mathbb{E}W_j^\alpha h(\theta_j), \end{aligned}$$

其中的等式运用了 $\mathbb{E}h(\theta) = 1$, 而最后两个不等式运用了 (4.9) 和 (4.10). 由 δ 的任意性, 我们得到 (4.8) 的渐近下界. 证毕. $\square$

下面的引理建立了由随机变量 $\{\varepsilon_j, j \geq 0\}$ 及其权重变量 $\{W_j, j \geq 0\}$ 构成的随机权和的渐近上界. 该引理将在定理 2 的证明中用到.

引理 7 在定理 2 的条件下, 假定 $\{W_j, j \geq 0\}$ 如 (4.1) 中定义, 则有

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j > x\right) \lesssim \bar{F}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}W_j^\alpha h(\theta_j). \quad (4.16)$$

证明 取定 $0 < p_1 < \alpha < p_2 < \kappa$. 对任意固定的 $\delta > 0$, 由不等式 (4.1) 和引理 5, 我们可选取充分大的整数 $k > 1$ 使得

$$\sum_{j=k}^{\infty} j^{-2} < 1, \quad \sum_{j=k}^{\infty} j^{2p_2} \mathbb{E}\{W_j^{p_1} h(\theta_j) + W_j^{p_2} h(\theta_j) + W_j^{p_2}\} < \delta; \quad (4.17)$$

并且对这个固定 k , 我们可进一步选取充分大的 $b > 1$ 使得

$$\sum_{j=1}^k \mathbb{E}\{\widetilde{W}_j^{p_1} h(\theta_j) \mathbf{1}_{(\widetilde{W}_j > b)} + \widetilde{W}_j^{p_2} h(\theta_j) \mathbf{1}_{(\widetilde{W}_j > b)}\} < \delta. \quad (4.18)$$

选取 $v_0, v_1 \in (1/2, 1)$ 满足 $(v_0 v_1)^{-\alpha} \leq 1 + \delta$, 并记 $v'_0 = (1 - v_0)/2 \in (0, 1/2)$. 根据固定的 k 和 v_0 , 我们可以将 (4.16) 中的概率划分为如下三部分:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j > x\right) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k \varepsilon_j W_j > v_0 x\right) + \mathbb{P}(\varepsilon_0 W_0 > v'_0 x) + \mathbb{P}\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \varepsilon_j W_j > v'_0 x\right)$$

$$=: J_1(x) + J_2(x) + J_3(x). \quad (4.19)$$

依据上面的 v_1 , 我们可将 $J_1(x)$ 进一步划分为如下两部分:

$$\begin{aligned} J_1(x) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^k \{\varepsilon_j W_j > v_0 v_1 x\}\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k \varepsilon_j W_j > v_0 x, \bigcap_{i=1}^k \{\varepsilon_i W_i \leq v_0 v_1 x\}\right) \\ &=: J_{11}(x) + J_{12}(x). \end{aligned} \quad (4.20)$$

由引理 6 和 (2.2) 中 $\mathcal{R}_{-\alpha}$ 的定义有, 对充分大的 x ,

$$J_{11}(x) \leq \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j W_j > v_0 v_1 x) \sim (v_0 v_1)^{-\alpha} \bar{F}(x) \sum_{j=1}^k \mathbb{E} W_j^\alpha h(\theta_j) \leq (1 + \delta) \bar{F}(x) \sum_{j=1}^k \mathbb{E} W_j^\alpha h(\theta_j). \quad (4.21)$$

记 $a_0 = v_0(1 - v_1)/(k - 1)$. 由于 $k \geq 2$, $v_1 \in (1/2, 1)$, 故 $0 < a_0 \leq v_0/k < 1/2$. 从而, 由随机函数 $\widetilde{W}$ 的单增性和不等式 (4.1) 可得

$$\begin{aligned} J_{12}(x) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k \varepsilon_j W_j > v_0 x, \bigcup_{i=1}^k \left\{\varepsilon_i W_i > \frac{v_0 x}{k}\right\}, \bigcap_{m=1}^k \{\varepsilon_m W_m < v_0 v_1 x\}\right) \\ &\leq \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} \mathbb{P}\left(\varepsilon_j W_j > \frac{v_0 x(1 - v_1)}{k - 1}, \varepsilon_i W_i > \frac{v_0 x}{k}\right) \\ &\leq \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} \mathbb{P}(\varepsilon_j \widetilde{W}_{i \wedge j} > a_0 x, \varepsilon_i \widetilde{W}_{i \wedge j} > a_0 x, \widetilde{W}_{i \wedge j} \leq b) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} \mathbb{P}(\varepsilon_j \widetilde{W}_{i \wedge j} > a_0 x, \varepsilon_i \widetilde{W}_{i \wedge j} > a_0 x, \widetilde{W}_{i \wedge j} > b) \\ &=: J'_{12}(x, b) + J''_{12}(x, b). \end{aligned}$$

由不等式 (3.1) 有, 对充分大的 x ,

$$J'_{12}(x, b) \leq \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} \mathbb{P}\left(\varepsilon_i > \frac{a_0 x}{b}\right) \mathbb{P}\left(\varepsilon_j > \frac{a_0 x}{b}\right) \leq C(\bar{F}(x))^2.$$

取定 $z \in (0, 1)$ 使得 $p_2 z > \alpha$. 由 (4.2) 中 $\{\widetilde{\Delta}_{j,u}, j \geq 1\}$ 的定义, 假定 (B2) 和 Chebyshev 不等式可得, 对充分大的 x ,

$$\begin{aligned} J''_{12}(x, b) &\leq (k - 1) \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(\varepsilon_j \widetilde{W}_j > a_0 x, \widetilde{W}_j > b) \\ &\leq C \sum_{j=1}^k \int_{\Lambda} \{\mathbb{P}(\varepsilon_j \widetilde{\Delta}_{j,u} > a_0 x, b < \widetilde{\Delta}_{j,u} \leq x^z \mid \theta_j = u) + \mathbb{P}(\widetilde{\Delta}_{j,u} > x^z)\} dG(u) \\ &\lesssim C \sum_{j=1}^k \int_{\Lambda} \{\mathbb{P}(\varepsilon_j \widetilde{\Delta}_{j,u} > a_0 x, b < \widetilde{\Delta}_{j,u} \leq x^z) h(u) + x^{-p_2 z} \mathbb{E} \widetilde{\Delta}_{j,u}^{p_2}\} dG(u) \\ &\leq C \sum_{j=1}^k \int_{\Lambda} \{\bar{F}(a_0 x) \mathbb{E}[(\widetilde{\Delta}_{j,u}^{p_1} + \widetilde{\Delta}_{j,u}^{p_2}) \mathbf{1}_{(\widetilde{\Delta}_{j,u} > b)} h(u)] + \delta \bar{F}(x) \mathbb{E} \widetilde{\Delta}_{j,u}^{p_2}\} dG(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C\bar{F}(a_0x) \sum_{j=1}^k \mathbb{E}\{(\widetilde{W}_j^{p_1} + \widetilde{W}_j^{p_2})h(\theta_j)\mathbf{1}_{(\widetilde{W}_j > b)}\} + \delta\bar{F}(x) \sum_{j=1}^k \mathbb{E}\widetilde{W}_j^{p_2} \\
&\leq C\delta\bar{F}(x),
\end{aligned}$$

其中, 第四步运用了 (3.2) 和 (3.5), 而最后一步运用了 (3.1)、(4.18) 和引理 5. 因此, 对充分大的 x ,

$$J_{12}(x) \leq C\delta\bar{F}(x). \quad (4.22)$$

由 (4.20)–(4.22) 知, 对充分大的 x ,

$$J_1(x) \leq (1 + \delta)\bar{F}(x) \sum_{j=1}^k \mathbb{E}W_j^\alpha h(\theta_j) + C\delta\bar{F}(x). \quad (4.23)$$

我们现在处理 (4.19) 中的 $J_2(x)$. 由 Chebyshev 不等式、(3.2) 和引理 5 可得, 对充分大的 x ,

$$J_2(x) \leq Cx^{-p_2}\mathbb{E}W_0^{p_2} \leq \delta\bar{F}(x). \quad (4.24)$$

注意到 (4.2) 中定义的 $\Delta_{j,u}$. 由假定 (B2) 和 Chebyshev 不等式知, 对充分大的 x ,

$$\begin{aligned}
J_3(x) &\leq \mathbb{P}\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \varepsilon_j W_j > \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{v'_0 x}{j^2}\right) \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\varepsilon_j W_j > \frac{v'_0 x}{j^2}\right) \\
&\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \int_{\Lambda} \left\{ \mathbb{P}\left(\varepsilon_j \Delta_{j,u} > \frac{v'_0 x}{j^2}, j^2 \Delta_{j,u} \leq x^z \mid \theta_j = u\right) + \mathbb{P}(j^2 \Delta_{j,u} > x^z) \right\} dG(u) \\
&\lesssim \sum_{j=k+1}^{\infty} \int_{\Lambda} \left\{ \mathbb{P}\left(\varepsilon_j \Delta_{j,u} > \frac{v'_0 x}{j^2}\right) h(u) + x^{-p_2 z} j^{2p_2} \mathbb{E}\Delta_{j,u}^{p_2} \right\} dG(u) \\
&\leq C\bar{F}(x) \sum_{j=k+1}^{\infty} \int_{\Lambda} \{j^{2p_1} \mathbb{E}\Delta_{j,u}^{p_1} h(u) + j^{2p_2} \mathbb{E}\Delta_{j,u}^{p_2} h(u) + \delta j^{2p_2} \mathbb{E}\Delta_{j,u}^{p_2}\} dG(u) \\
&= C\bar{F}(x) \sum_{j=k+1}^{\infty} \{j^{2p_1} \mathbb{E}W_j^{p_1} h(\theta_j) + j^{2p_2} \mathbb{E}W_j^{p_2} h(\theta_j) + \delta j^{2p_2} \mathbb{E}W_j^{p_2}\} \\
&\leq C\delta\bar{F}(x),
\end{aligned} \quad (4.25)$$

其中, 第五步中运用了 (3.1)、(3.2) 和 (3.5), 最后一步中运用了 (4.17). 将 (4.23)–(4.25) 代入到 (4.19) 并注意到 δ 的任意性, 我们得到渐近关系 (4.16). 证毕. $\square$

4.2 定理 2 的证明

定理 2 的证明 由 (3.8) 中 $\{W_j(t), j \geq 1\}$ 的定义知,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \mathbb{E}[W_j^\alpha(t)h(\theta_j)\mathbf{1}_{(N_t=k)}] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[W_j^\alpha(t)h(\theta_j)\mathbf{1}_{(\tau_j \leq t)}] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}W_j^\alpha(t)h(\theta_j).$$

因此, 对任意固定的 $T \in \Lambda$, 采用类似于证明定理 1 的方法, 但运用 (3.12) 和 (3.47) 代替相应的 (3.11) 和 (3.46), 我们可以得到, 渐近关系

$$\Psi(x, t) \sim \bar{F}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}W_j^\alpha(t)h(\theta_j) \quad (4.26)$$

对所有的 $t \in \Lambda_T$ 一致成立.

现在将 (4.26) 的一致渐近性扩展到整个区间 Λ . 注意到对任意 $j \geq 1$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $W_j(t)$ 几乎处处增加到 W_j . 对任意固定的 $\delta > 0$, 由不等式 (4.1) 和引理 5 ($p = \alpha, q = 0$), 我们可以选取充分大的 $T_1 \in \Lambda$ 满足 $t = T_1$ 时的 (4.26), 并且

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} W_j^\alpha h(\theta_j) \leq (1 + \delta) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} W_j^\alpha(T_1) h(\theta_j). \quad (4.27)$$

一方面, 由 (3.61) 知,

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &\leq \Psi(x) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j W_j > x\right) \lesssim \bar{F}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} W_j^\alpha h(\theta_j) \\ &\leq \bar{F}(x) \sum_{j=1}^{\infty} [\mathbb{E} W_j^\alpha(t) h(\theta_j) + \mathbb{E} W_j^\alpha h(\theta_j) - \mathbb{E} W_j^\alpha(T_1) h(\theta_j)] \\ &\leq (1 + \delta) \bar{F}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} W_j^\alpha(t) h(\theta_j) \end{aligned}$$

对所有的 $t \in \Lambda \cap (T_1, \infty]$ 一致成立, 其中, 第三步运用了引理 7, 而最后一步运用了 (4.27). 另一方面, 渐近关系

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &\geq \Psi(x, T_1) \sim \bar{F}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} W_j^\alpha(T_1) h(\theta_j) \\ &\geq \bar{F}(x) \sum_{j=1}^{\infty} [\mathbb{E} W_j^\alpha(t) h(\theta_j) - \mathbb{E} W_j^\alpha h(\theta_j) + \mathbb{E} W_j^\alpha(T_1) h(\theta_j)] \\ &\geq (1 - \delta) \bar{F}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} W_j^\alpha(t) h(\theta_j) \end{aligned}$$

对所有的 $t \in \Lambda \cap (T_1, \infty]$ 一致成立, 其中, 第二步运用了 $t = T_1$ 时的渐近关系 (4.26), 而最后一步运用了 (4.27). 因此, 对所有 $t \in \Lambda \cap (T_1, \infty]$ 和充分大的 x , 例如, $x > x_1 > 0$, 有

$$(1 - \delta) \bar{F}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} W_j^\alpha(t) h(\theta_j) \leq \Psi(x, t) \leq (1 + \delta) \bar{F}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} W_j^\alpha(t) h(\theta_j). \quad (4.28)$$

由渐近关系 (4.26), (4.28) 对所有的 $t \in \Lambda \cap [0, T_1]$ 和充分大的 x ($x > x_2 > 0$) 成立. 因此, 不等式 (4.28) 对所有 $t \in \Lambda$ 和所有 $x > \max\{x_1, x_2\}$ 成立. 将引理 4 中的等式 (3.51) 应用到 (4.28) 中并考虑到 δ 的任意性, 渐近关系 (2.5) 对所有的 $t \in \Lambda$ 一致成立.

现证明 (2.6). 对任意 $s \geq 0$, 定义 $\Theta_{s, \infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Theta_{s, t}$, 其中, $\Theta_{s, t}$ 在 (2.4) 中定义. 由 Lévy 过程 $\{\xi_t, t \geq 0\}$ 的强 Markov 性知, 对任意 $s \geq 0$,

$$\mathbb{E} \Theta_{s, \infty}^\alpha = \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-\xi_s + \tau_k} \right)^\alpha = \mathbb{E} e^{-\alpha \xi_s} \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-\xi_s + \tau_k + \xi_s} \right)^\alpha = e^{s\phi(\alpha)} \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-\xi_{\tau_k}} \right)^\alpha.$$

显然有

$$\int_{0-}^{\infty} e^{v\phi(\alpha)} d\lambda_v = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0-}^{\infty} e^{v\phi(\alpha)} \mathbb{P}(\tau_n \in dv) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} e^{\tau_n \phi(\alpha)} = \frac{\mathbb{E} e^{\theta \phi(\alpha)}}{1 - \mathbb{E} e^{\theta \phi(\alpha)}}.$$

因此, 由渐近关系 (2.5) 可得

$$\begin{aligned}\Psi(x) &\sim \bar{F}(x) \int_{0-}^{\infty} \left\{ \mathbb{E}\Theta_{u,\infty}^{\alpha} + \int_{0-}^{\infty} \mathbb{E}\Theta_{u+v,\infty}^{\alpha} d\lambda_v \right\} h(u) dG(u) \\ &= \bar{F}(x) \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-\xi_{\tau_k}} \right)^{\alpha} \int_{0-}^{\infty} e^{u\phi(\alpha)} \left\{ 1 + \int_{0-}^{\infty} e^{v\phi(\alpha)} d\lambda_v \right\} h(u) dG(u) \\ &= \bar{F}(x) \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-\xi_{\tau_k}} \right)^{\alpha} \frac{\mathbb{E}h(\theta) e^{\theta\phi(\alpha)}}{1 - \mathbb{E}e^{\theta\phi(\alpha)}}.\end{aligned}$$

证毕. □

致谢 感谢审稿人对本文的修改建议.

参考文献

- 1 Chen Y, Ng K W. The ruin probability of the renewal model with constant interest force and negatively dependent heavy-tailed claims. *Insurance Math Econom*, 2007, 40: 415–423
- 2 Zhang Y, Shen X, Weng C. Approximation of the tail probability of randomly weighted sums and applications. *Stochastic Process Appl*, 2009, 119: 655–675
- 3 Geluk J, Tang Q. Asymptotic tail probabilities of sums of dependent subexponential random variables. *J Theoret Probab*, 2009, 22: 871–882
- 4 Guo F, Wang D. Finite- and infinite-time ruin probabilities with general stochastic investment return processes and bivariate upper tail independent and heavy-tailed claims. *Adv Appl Probab*, 2013, 45: 241–273
- 5 Gerber H U. Ruin theory in the linear model. *Insurance Math Econom*, 1982, 1: 213–217
- 6 Bowers N L, Gerber H U, Hickman J C, et al. *Actuarial Mathematics*. 2ed ed. Schaumburg: The Society of Actuaries, 1997
- 7 Mikosch T, Samorodnitsky G. The supremum of a negative drift random walk with dependent heavy-tailed steps. *Ann Appl Probab*, 2000, 10: 1025–1064
- 8 Yang H, Zhang L. Martingale method for ruin probability in an autoregressive model with constant interest rate. *Probab Engrg Inform Sci*, 2003, 17: 183–198
- 9 Tang Q, Yuan Z. A hybrid estimate for the finite-time ruin probability in a bivariate autoregressive risk model with application to portfolio optimization. *N Am Actuar J*, 2012, 16: 378–397
- 10 Li J, Tang Q, Wu R. Subexponential tails of discounted aggregate claims in a time-dependent renewal risk model. *Adv Appl Probab*, 2010, 42: 1126–1146
- 11 Albrecher H, Teugels J L. Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. *J Appl Probab*, 2006, 43: 257–273
- 12 Boudreault M, Cossette H, Landriault D, et al. On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. *Scand Actuar J*, 2006, 5: 265–285
- 13 Cossette H, Marceau E, Marri F. On the compound Poisson risk model with dependence based on a generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern copula. *Insurance Math Econom*, 2008, 43: 444–455
- 14 Badescu A L, Cheung E C K, Landriault D. Dependent risk models with bivariate phase-type distributions. *J Appl Probab*, 2009, 46: 113–131
- 15 Asimit A V, Badescu A L. Extremes on the discounted aggregate claims in a time dependent risk model. *Scand Actuar J*, 2010, 2: 93–104
- 16 Paulsen J, Gjessing H K. Ruin theory with stochastic return on investments. *Ann Appl Probab*, 1997, 29: 965–985
- 17 Wang G, Wu R. Distributions for the risk process with a stochastic return on investments. *Stochastic Process Appl*, 2001, 95: 329–341
- 18 Kalashnikov V, Norberg R. Power tailed ruin probabilities in the presence of risky investments. *Stochastic Process Appl*, 2002, 98: 211–228
- 19 Paulsen J. On Cramèr-like asymptotics for risk processes with stochastic return on investments. *Ann Appl Probab*, 2002, 12: 1247–1260
- 20 Paulsen J. Ruin models with investment income. *Probab Surv*, 2008, 5: 416–434

- 21 Yuen K C, Wang G, Ng K W. Ruin probabilities for a risk process with stochastic return on investments. *Stochastic Process Appl*, 2004, 110: 259–274
- 22 Yuen K C, Wang G, Wu R. On the renewal risk process with stochastic interest. *Stochastic Process Appl*, 2006, 116: 1496–1510
- 23 Tang Q, Wang G, Yuen K C. Uniform tail asymptotics for the stochastic present value of aggregate claims in the renewal risk model. *Insurance Math Econom*, 2010, 46: 362–370
- 24 Sato K. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999
- 25 Cont R, Tankov P. *Financial Modelling with Jump Processes*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004
- 26 Bingham N H, Goldie C M, Teugels J L. *Regular Variation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987
- 27 Embrechts P, Klüppelberg C, Mikosch T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. New York: Springer, 1997
- 28 Joe H. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. London: Chapman & Hall, 1997
- 29 Nelsen R B. *An Introduction to Copulas*. 2nd ed. New York: Springer, 2006
- 30 Protter P E. *Stochastic Integration and Differential Equations*. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2004
- 31 Emmer S, Klüppelberg C. Optimal portfolios when stock prices follow an exponential Lévy process. *Finance Stoch*, 2004, 8: 17–44
- 32 Klüppelberg C, Kostadinova R. Integrated insurance risk models with exponential Lévy investment. *Insurance Math Econom*, 2008, 42: 560–577
- 33 Heyde C C, Wang D. Finite-time ruin probability with an Exponential Lévy process investment return and heavy-tailed claims. *Adv Appl Probab*, 2009, 41: 206–224
- 34 Wang D, Tang Q. Tail probabilities of randomly weighted sums of random variables with dominated variation. *Stoch Models*, 2006, 22: 253–272
- 35 Cline D B H, Samorodnitsky G. Subexponentiality of the product of independent random variables. *Stochastic Process Appl*, 1994, 49: 75–98
- 36 Willekens E. On the supremum of an infinitely divisible process. *Stochastic Process Appl*, 1987, 26: 173–175
- 37 Hao X, Tang Q. A uniform asymptotic estimate for discounted aggregate claims with subexponential tails. *Insurance Math Econom*, 2008, 43: 116–120

Ruin probability of renewal risk model with stochastic investment returns and one-sided linear time-dependent claims

GUO FengLong, WANG DingCheng & ZHANG Wei

Abstract This paper considers a time-dependent renewal risk model with stochastic investment returns and dependent claim sizes. In the model, the investment returns are described as a geometric Lévy process, while the claim sizes are modeled by a one-sided linear process with independent and identically distributed innovations. In addition, the innovations and claim inter-arrival times correspondingly form a sequence of independent and identically distributed random pairs, and each pair obeys a dependence structure described via the asymptotic of the conditional tail probability of the innovation given the inter-arrival time. When the innovation distribution is heavy tailed, we derive uniform estimates for ruin probabilities over certain time regions.

Keywords heavy tail, time-dependence, one-sided linear process, investment return process, Lévy process, renewal risk model

MSC(2010) 62E20, 62P05

doi: 10.1360/012016-4