n -正合函子诱导的 $(n+2)$ -角函子

周潘岳^{1†}, 张海诚^{2‡*}

1. 清华大学数学科学系, 北京 100084;

2. 清华大学丘成桐数学科学中心, 北京 100084

E-mail: panyuezhou@163.com, zhanghc@nju.edu.cn

收稿日期: 2016-08-30; 接受日期: 2017-10-30; 网络出版日期: 2018-01-31; * 通信作者

摘要 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ 和 $(\mathcal{A}', \mathcal{X}')$ 是两个 Frobenius n -正合范畴, $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 是 n -正合函子. 如果 F 把 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathcal{X}$ -内射对象映为 $\mathcal{A}'$ 中的 $\mathcal{X}'$ -内射对象, 则 F 诱导了稳定范畴间的一个 $(n+2)$ -角函子 $\bar{F}: \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \bar{\mathcal{A}'}$. 此外, 本文将这个主要结果应用到伴随对和 Galois 覆盖函子上.

关键词 Frobenius n -正合范畴 稳定范畴 $(n+2)$ -角函子

MSC (2010) 主题分类 18E99, 18E10, 18E30

1 引言

为了给出环上的模范畴和概型上的层范畴的公理化描述, Grothendieck^[1] 引入了 Abel 范畴的概念. 而为了给出 Abel 范畴的扩张封闭的满子范畴的公理化描述, Quillen^[2] 引入了正合范畴的概念. Happel^[3] 证明了如下的结论: 设 $\mathcal{A}$ 是 Frobenius 范畴, 即 $\mathcal{A}$ 是一个有足够多的投射对象和足够多的内射对象的正合范畴, 且投射对象和内射对象是相同的, 则 $\mathcal{A}$ 的稳定范畴 $\bar{\mathcal{A}} := \mathcal{A}/\mathcal{I}$ 是三角范畴, 其中 $\mathcal{I}$ 是由内射对象构成的满子范畴.

给定正整数 n , Geiß 等^[4] 引入了 $(n+2)$ -角范畴的概念, 它可以看作三角范畴的高维版本. 而且, 他们证明了三角范畴中的满足一定条件的 n -丛倾斜子范畴是 $(n+2)$ -角范畴. 后来, Jasso^[5] 从高维同调的角度引入了 n -Abel 范畴和 n -正合范畴, 它们可分别看作 Abel 范畴和正合范畴的自然推广. 此外, 类似于 Happel 的经典结果, 他证明了 Frobenius n -正合范畴 $\mathcal{A}$ 的稳定范畴 $\bar{\mathcal{A}}$ 是 Geiß 等意义下的 $(n+2)$ -角范畴.

首先给出 n -正合函子和 $(n+2)$ -角函子的定义. 在本文中, 所有的函子都假设是共变函子.

定义 1.1 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 是两个 Frobenius n -正合范畴. 一个加法函子 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 称为 n -正合的,

†当前地址: 湖南理工学院数学学院, 岳阳 414006.

‡当前地址: 南京师范大学数学科学学院, 南京 210023.

如果它把 $\mathcal{A}$ 中的允许 n -正合列映为 $\mathcal{A}'$ 中的允许 n -正合列.

定义 1.2^[6] 设 $(\mathcal{A}, \Sigma)$ 和 $(\mathcal{A}', \Sigma')$ 是两个 $(n+2)$ -角范畴. 一个加法函子 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 称为 $(n+2)$ -角的, 如果它满足如下的性质:

- (1) 存在一个自然同构 $\phi: F \circ \Sigma \rightarrow \Sigma' \circ F$;
- (2) F 保持 $(n+2)$ -角, 也就是说, 如果

$$X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \Sigma X^0$$

是 $\mathcal{A}$ 中的一个 $(n+2)$ -角, 则

$$FX^0 \xrightarrow{F(d^0)} FX^1 \xrightarrow{F(d^1)} FX^2 \xrightarrow{F(d^2)} \cdots \xrightarrow{F(d^n)} FX^{n+1} \xrightarrow{\phi_{X^0} \circ F(d^{n+1})} \Sigma' FX^0$$

是 $\mathcal{A}'$ 中的一个 $(n+2)$ -角.

下面的定理 (细节见定理 3.1) 是本文的主要结果, 它可以看作文献 [3, 引理 2.8] 的推广.

定理 1.3 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ 和 $(\mathcal{A}', \mathcal{X}')$ 是两个 Frobenius n -正合范畴, $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 是 n -正合函子. 如果 F 把 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathcal{X}$ -内射对象映为 $\mathcal{A}'$ 中的 $\mathcal{X}'$ -内射对象, 则 F 诱导了一个 $(n+2)$ -角函子 $\bar{F}: \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}'$, 其中 $\bar{\mathcal{A}}$ 和 $\bar{\mathcal{A}}'$ 分别是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 的稳定范畴.

本文的结构如下: 第 2 节回顾 Frobenius n -正合范畴以及其稳定范畴的定义, 同时给出稳定范畴中 $(n+2)$ -角的等价定义. 第 3 节证明本文的主要结果, 给出一些推论作为它的应用. 第 4 节引入 n -正合范畴和 $(n+2)$ -角范畴中的覆盖函子的概念, 给出主要结果在 Frobenius n -正合范畴的 Galois 覆盖函子上的应用.

2 预备知识

2.1 Frobenius n -正合范畴和稳定范畴

有关 n -角范畴以及 n -正合范畴的概念和性质, 参见文献 [4, 5, 7].

设 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ 是 n -正合范畴. 一个对象 $I \in \mathcal{A}$ 称为 $\mathcal{X}$ -内射的, 如果对任意的允许单态射 $f: M \rightarrow N$, 序列 $\mathcal{A}(N, I) \xrightarrow{f^*} \mathcal{A}(M, I) \rightarrow 0$ 是正合的. 根据文献 [5], 称 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ 有足够多的 $\mathcal{X}$ -内射对象, 如果对每一个对象 $M \in \mathcal{A}$, 存在 $\mathcal{X}$ -内射对象 $I^1, \dots, I^n$ 以及允许 n -正合列

$$M \rightarrow I^1 \rightarrow \cdots \rightarrow I^n \rightarrow N.$$

对偶地, 可定义 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ 有足够多的 $\mathcal{X}$ -投射对象.

设 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ 是 n -正合范畴. 对两个对象 $M, N \in \mathcal{A}$, 记 $I(M, N)$ 是 $\mathcal{A}(M, N)$ 中的通过 $\mathcal{X}$ -内射对象分解的态射构成的子群. 记 $\mathcal{A}$ 的 $\mathcal{X}$ -内射稳定范畴为 $\bar{\mathcal{A}}$, 则 $\bar{\mathcal{A}}$ 的对象与 $\mathcal{A}$ 中的相同, 态射的定义如下:

$$\bar{\mathcal{A}}(M, N) := \frac{\mathcal{A}(M, N)}{I(M, N)}.$$

如果 $\alpha: M \rightarrow N$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个态射, 记 $\bar{\alpha}$ 是 α 在 $\bar{\mathcal{A}}(M, N)$ 中的等价类. 易知 $\bar{\mathcal{A}}$ 是加法范畴. 对偶地, 可定义 $\mathcal{A}$ 的 $\mathcal{X}$ -投射稳定范畴, 记为 $\underline{\mathcal{A}}$. 称 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ 是 Frobenius n -正合范畴, 如果它有足够多的 $\mathcal{X}$ -内射对象以及足够多的 $\mathcal{X}$ -投射对象, 且 $\mathcal{X}$ -内射对象和 $\mathcal{X}$ -投射对象是相同的. 在这种情形下, 显然 $\bar{\mathcal{A}} = \underline{\mathcal{A}}$, 我们称这个范畴为 $\mathcal{A}$ 的稳定范畴.

2.2 $(n+2)$ -角

设 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ 是 Frobenius n -正合范畴. 对任意的对象 $X \in \mathcal{A}$, 存在如下允许 n -正合列:

$$X \xrightarrow{d_X^0} I^1(X) \xrightarrow{d_X^1} I^2(X) \xrightarrow{d_X^2} \cdots \xrightarrow{d_X^{n-1}} I^n(X) \xrightarrow{d_X^n} \Sigma_{\mathcal{A}} X,$$

其中 $I^i(X)$ 是 $\mathcal{X}$ -内射对象. 对任意的态射 $f \in \mathcal{A}(X, Y)$, 有如下允许 n -正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} X & \xrightarrow{d_X^0} & I^1(X) & \xrightarrow{d_X^1} & I^2(X) & \xrightarrow{d_X^2} & \cdots & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & I^n(X) & \xrightarrow{d_X^n} & \Sigma_{\mathcal{A}} X \\ \downarrow f & & \downarrow I^1(f) & & \downarrow I^2(f) & & & & \downarrow I^n(f) & & \downarrow \Sigma(f) \\ Y & \xrightarrow{d_Y^0} & I^1(Y) & \xrightarrow{d_Y^1} & I^2(Y) & \xrightarrow{d_Y^2} & \cdots & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & I^n(Y) & \xrightarrow{d_Y^n} & \Sigma_{\mathcal{A}} Y. \end{array}$$

由文献 [5, 命题 5.7 和 5.8] 知, 可定义函子 $\Sigma_{\mathcal{A}}: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$, 满足

$$\Sigma_{\mathcal{A}}(X) = \Sigma_{\mathcal{A}} X, \quad \Sigma_{\mathcal{A}}(\overline{f}) = \overline{\Sigma(f)}.$$

而且 $\Sigma_{\mathcal{A}}$ 是一个自等价函子.

设 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ 是 Frobenius n -正合范畴. 根据文献 [5, 第 5 节], 定义一个由 $(n+2)$ - $\Sigma_{\mathcal{A}}$ -序列构成的类 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{X})$. 给定 $\mathcal{A}$ 的一个态射 $f^0: X^0 \rightarrow X^1$, 存在如下允许 n -正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} X^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1(X^0) & \xrightarrow{d^1} & I^2(X^0) & \xrightarrow{d^2} & \cdots & \xrightarrow{d^{n-1}} & I^n(X^0) & \xrightarrow{d^n} & \Sigma_{\mathcal{A}} X^0 \\ \downarrow f^0 & & \downarrow \varphi^1 & & \downarrow \varphi^2 & & & & \downarrow \varphi^n & & \parallel \\ X^1 & \xrightarrow{f^1} & X^2 & \xrightarrow{f^2} & X^3 & \xrightarrow{f^3} & \cdots & \xrightarrow{f^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{f^{n+1}} & \Sigma_{\mathcal{A}} X^0. \end{array}$$

称序列

$$X^0 \xrightarrow{\overline{f^0}} X^1 \xrightarrow{\overline{f^1}} \cdots \xrightarrow{\overline{f^{n-1}}} X^n \xrightarrow{\overline{f^n}} X^{n+1} \xrightarrow{\overline{f^{n+1}}} \Sigma_{\mathcal{A}} X^0 \quad (2.1)$$

为稳定范畴 $\overline{\mathcal{A}}$ 中的标准 $(n+2)$ -角. $\overline{\mathcal{A}}$ 中的 $(n+2)$ - $\Sigma_{\mathcal{A}}$ -序列属于 $\mathcal{S}$ 当且仅当它同构于一个标准 $(n+2)$ -角.

对于 $\mathcal{A}$ 中的允许 n -正合列:

$$X^0 \xrightarrow{f^0} X^1 \xrightarrow{f^1} X^2 \xrightarrow{f^2} \cdots \xrightarrow{f^{n-1}} X^n \xrightarrow{f^n} X^{n+1},$$

存在如下允许 n -正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} X^0 & \xrightarrow{f^0} & X^1 & \xrightarrow{f^1} & X^2 & \xrightarrow{f^2} & \cdots & \xrightarrow{f^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{f^n} & X^{n+1} \\ \parallel & & \downarrow \varphi^1 & & \downarrow \varphi^2 & & & & \downarrow \varphi^n & & \downarrow \varphi^{n+1} \\ X^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 & \xrightarrow{d^1} & I^2 & \xrightarrow{d^2} & \cdots & \xrightarrow{d^{n-1}} & I^n & \xrightarrow{d^n} & \Sigma_{\mathcal{A}} X^0, \end{array}$$

其中 I^i 是 $\mathcal{X}$ -内射对象, 于是有 $\overline{\mathcal{A}}$ 中的 $(n+2)$ - $\Sigma_{\mathcal{A}}$ -序列:

$$X^0 \xrightarrow{\overline{f^0}} X^1 \xrightarrow{\overline{f^1}} \cdots \xrightarrow{\overline{f^{n-1}}} X^n \xrightarrow{\overline{f^n}} X^{n+1} \xrightarrow{(-1)^n \overline{f^{n+1}}} \Sigma_{\mathcal{A}} X^0. \quad (2.2)$$

定义稳定范畴 $\overline{\mathcal{A}}$ 中的 $(n+2)$ - $\Sigma_{\mathcal{A}}$ -序列是诱导 $(n+2)$ -角, 如果它同构于形如 (2.2) 的序列.

定理 2.1 ^[5] 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ 是 Frobenius n - 正合范畴, 则 $(\overline{\mathcal{A}}, \Sigma_{\mathcal{A}}, \mathcal{S}(\mathcal{X}))$ 是 $(n+2)$ - 角范畴.

下面的命题证明了标准 $(n+2)$ - 角和诱导 $(n+2)$ - 角是一致的.

命题 2.2 在稳定范畴 $\overline{\mathcal{A}}$ 中, 每一个标准 $(n+2)$ - 角都同构于某个诱导 $(n+2)$ - 角, 每一个诱导 $(n+2)$ - 角都同构于某个标准 $(n+2)$ - 角.

证明 给定 $\overline{\mathcal{A}}$ 中的一个态射 $f^0: X^0 \rightarrow X^1$, 我们有标准 $(n+2)$ - 角:

$$X^0 \xrightarrow{\overline{f^0}} X^1 \xrightarrow{\overline{f^1}} \dots \xrightarrow{\overline{f^{n-1}}} X^n \xrightarrow{\overline{f^n}} X^{n+1} \xrightarrow{\overline{f^{n+1}}} \Sigma_{\mathcal{A}} X^0,$$

它是由如下允许 n - 正合列的交换图给出的:

$$\begin{array}{ccccccc} X^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 & \xrightarrow{d^1} & I^2 & \xrightarrow{d^2} & \dots \xrightarrow{d^{n-1}} I^n \xrightarrow{d^n} \Sigma_{\mathcal{A}} X^0 \\ \downarrow f^0 & & \downarrow \varphi^1 & & \downarrow \varphi^2 & & \downarrow \varphi^n \\ X^1 & \xrightarrow{f^1} & X^2 & \xrightarrow{f^2} & X^3 & \xrightarrow{f^3} & \dots \xrightarrow{f^n} X^{n+1} \xrightarrow{f^{n+1}} \Sigma_{\mathcal{A}} X^0. \end{array}$$

由文献 [5, 命题 4.8], 可得到

$$X^0 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -d^0 \\ f^0 \end{bmatrix}} I^1 \oplus X^1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -d^1 & 0 \\ \varphi^1 & f^1 \end{bmatrix}} I^2 \oplus X^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -d^2 & 0 \\ \varphi^2 & f^2 \end{bmatrix}} \dots \xrightarrow{\begin{bmatrix} -d^{n-1} & 0 \\ \varphi^{n-1} & f^{n-1} \end{bmatrix}} I^n \oplus X^n \xrightarrow{[\varphi^n \ f^n]} X^{n+1}$$

是 $\mathcal{A}$ 中的允许 n - 正合列. 于是有如下允许 n - 正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} X^0 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -d^0 \\ f^0 \end{bmatrix}} & I^1 \oplus X^1 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -d^1 & 0 \\ \varphi^1 & f^1 \end{bmatrix}} & I^2 \oplus X^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -d^2 & 0 \\ \varphi^2 & f^2 \end{bmatrix}} & \dots \xrightarrow{\begin{bmatrix} -d^{n-1} & 0 \\ \varphi^{n-1} & f^{n-1} \end{bmatrix}} I^n \oplus X^n \xrightarrow{[\varphi^n \ f^n]} X^{n+1} \\ \parallel & & \downarrow [-1 \ 0] & & \downarrow [1 \ 0] & & \downarrow [(-1)^n \ 0] \\ X^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 & \xrightarrow{d^1} & I^2 & \xrightarrow{d^2} & \dots \xrightarrow{d^{n-1}} I^n \xrightarrow{d^n} \Sigma_{\mathcal{A}} X^0. \end{array}$$

因此,

$$X^0 \xrightarrow{\overline{f^0}} X^1 \xrightarrow{\overline{f^1}} \dots \xrightarrow{\overline{f^{n-1}}} X^n \xrightarrow{\overline{f^n}} X^{n+1} \xrightarrow{\overline{f^{n+1}}} \Sigma_{\mathcal{A}} X^0$$

是一个诱导 $(n+2)$ - 角, 因为 $\mathcal{A}$ 中的每个内射对象在 $\overline{\mathcal{A}}$ 中均为零.

反过来, 给定一个诱导 $(n+2)$ - 角:

$$X^0 \xrightarrow{\overline{f^0}} X^1 \xrightarrow{\overline{f^1}} \dots \xrightarrow{\overline{f^{n-1}}} X^n \xrightarrow{\overline{f^n}} X^{n+1} \xrightarrow{(-1)^n \overline{\varphi^{n+1}}} \Sigma_{\mathcal{A}} X^0, \quad (2.3)$$

也就是说, 我们有如下允许 n - 正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} X^0 & \xrightarrow{f^0} & X^1 & \xrightarrow{f^1} & X^2 & \xrightarrow{f^2} & \dots \xrightarrow{f^{n-1}} X^n \xrightarrow{f^n} X^{n+1} \\ \parallel & & \downarrow \varphi^1 & & \downarrow \varphi^2 & & \downarrow \varphi^n \\ X^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 & \xrightarrow{d^1} & I^2 & \xrightarrow{d^2} & \dots \xrightarrow{d^{n-1}} I^n \xrightarrow{d^n} \Sigma_{\mathcal{A}} X^0. \end{array}$$

由文献 [5, 命题 4.8] 的对偶, 可得到

$$X^1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -f^1 \\ \varphi^1 \end{bmatrix}} X^2 \oplus I^1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -f^2 & 0 \\ \varphi^2 & d^1 \end{bmatrix}} X^3 \oplus I^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -f^3 & 0 \\ \varphi^3 & d^2 \end{bmatrix}} \dots \xrightarrow{\begin{bmatrix} -f^n & 0 \\ \varphi^n & d^{n-1} \end{bmatrix}} X^{n+1} \oplus I^n \xrightarrow{[\varphi^{n+1} \ d^n]} \Sigma_{\mathcal{A}} X^0$$

是 $\mathcal{A}$ 中的允许 n -正合列. 考虑如下允许 n -正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} X^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 & \xrightarrow{d^1} & I^2 & \xrightarrow{d^2} & \cdots & \xrightarrow{d^{n-1}} & I^n & \xrightarrow{d^n} & \Sigma_{\mathcal{A}} X^0 \\ \downarrow f^0 & & \downarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & & \downarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & & & & \downarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & & \parallel \\ X^1 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -f^1 \\ \varphi^1 \end{bmatrix}} & X^2 \oplus I^1 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -f^2 & 0 \\ \varphi^2 & d^1 \end{bmatrix}} & X^3 \oplus I^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -f^3 & 0 \\ \varphi^3 & d^2 \end{bmatrix}} & \cdots & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -f^n & 0 \\ \varphi^n & d^{n-1} \end{bmatrix}} & X^{n+1} \oplus I^n & \xrightarrow{\begin{bmatrix} \varphi^{n+1} & d^n \end{bmatrix}} & \Sigma_{\mathcal{A}} X^0, \end{array}$$

可得

$$X^0 \xrightarrow{\overline{f^0}} X^1 \xrightarrow{-\overline{f^1}} \cdots \xrightarrow{-\overline{f^{n-1}}} X^n \xrightarrow{-\overline{f^n}} X^{n+1} \xrightarrow{\overline{\varphi^{n+1}}} \Sigma_{\mathcal{A}} X^0 \quad (2.4)$$

是一个标准 $(n+2)$ -角, 因为 $\mathcal{A}$ 中的每个内射对象在 $\overline{\mathcal{A}}$ 中均为零. 注意到下面的交换图给出了序列 (2.3) 与 (2.4) 之间的同构

$$\begin{array}{ccccccccccc} X^0 & \xrightarrow{\overline{f^0}} & X^1 & \xrightarrow{\overline{f^1}} & X^2 & \xrightarrow{\overline{f^2}} & \cdots & \xrightarrow{\overline{f^{n-1}}} & X^n & \xrightarrow{\overline{f^n}} & X^{n+1} & \xrightarrow{(-1)^n \overline{\varphi^{n+1}}} & \Sigma_{\mathcal{A}} X^0 \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow -1 & & & & \downarrow (-1)^{n-1} & & \downarrow (-1)^n & & \parallel \\ X^0 & \xrightarrow{\overline{f^0}} & X^1 & \xrightarrow{-\overline{f^1}} & X^2 & \xrightarrow{-\overline{f^2}} & \cdots & \xrightarrow{-\overline{f^{n-1}}} & X^n & \xrightarrow{-\overline{f^n}} & X^{n+1} & \xrightarrow{\overline{\varphi^{n+1}}} & \Sigma_{\mathcal{A}} X^0. \end{array}$$

所以, $(n+2)$ - $\Sigma_{\mathcal{A}}$ -序列 (2.3) 是一个标准 $(n+2)$ -角. $\square$

3 主要结果的证明

定理 3.1 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ 和 $(\mathcal{A}', \mathcal{X}')$ 是两个 Frobenius n -正合范畴, $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 是 n -正合函子. 如果 F 把 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathcal{X}$ -内射对象映为 $\mathcal{A}'$ 中的 $\mathcal{X}'$ -内射对象, 则 F 诱导了一个 $(n+2)$ -角函子

$$\overline{F}: (\overline{\mathcal{A}}, \Sigma_{\mathcal{A}}, \mathcal{S}(\mathcal{X})) \rightarrow (\overline{\mathcal{A}'}, \Sigma_{\mathcal{A}'}, \mathcal{S}(\mathcal{X}')).$$

证明 对 $\mathcal{A}$ 中任意的对象 X 和态射 f , 定义 $\overline{F}(X) := \overline{F(X)}$, $\overline{F}(f) := \overline{F(f)}$. 因为 F 是加法函子, 易知 $\overline{F}$ 也是加法函子.

第 1 步 我们证明存在一个自然同构 $\beta: \overline{F} \circ \Sigma_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} \Sigma_{\mathcal{A}'} \circ \overline{F}$.

对任意的对象 $X \in \mathcal{A}$, 存在 $\mathcal{A}$ 中的允许 n -正合列:

$$X \xrightarrow{d^0} I^1(X) \xrightarrow{d^1} I^2(X) \xrightarrow{d^2} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} I^n(X) \xrightarrow{d^n} \Sigma_{\mathcal{A}} X,$$

其中 $I^i(X)$ 是 $\mathcal{X}$ -内射对象. 类似地, 我们有 $\mathcal{A}'$ 中的允许 n -正合列:

$$F(X) \xrightarrow{c^0} I^1(F(X)) \xrightarrow{c^1} I^2(F(X)) \xrightarrow{c^2} \cdots \xrightarrow{c^{n-1}} I^n(F(X)) \xrightarrow{c^n} \Sigma_{\mathcal{A}'} F(X),$$

其中 $I^i(F(X))$ 是 $\mathcal{X}'$ -内射对象. 因为 F 是 n -正合函子, 并且 $F(I^1(X))$ 和 $I^1(F(X))$ 是 $\mathcal{A}'$ 中的 $\mathcal{X}'$ -内射对象, 所以有如下允许 n -正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} F(X) & \xrightarrow{F(d^0)} & F(I^1(X)) & \xrightarrow{F(d^1)} & F(I^2(X)) & \xrightarrow{F(d^2)} & \cdots & \xrightarrow{F(d^{n-1})} & F(I^n(X)) & \xrightarrow{F(d^n)} & F(\Sigma_{\mathcal{A}} X) \\ \parallel & & \downarrow \beta^1 & & \downarrow \beta^2 & & & & \downarrow \beta^n & & \downarrow \beta_X \\ F(X) & \xrightarrow{c^0} & I^1(F(X)) & \xrightarrow{c^1} & I^2(F(X)) & \xrightarrow{c^2} & \cdots & \xrightarrow{c^{n-1}} & I^n(F(X)) & \xrightarrow{c^n} & \Sigma_{\mathcal{A}'} F(X) \\ \parallel & & \downarrow \alpha^1 & & \downarrow \alpha^2 & & & & \downarrow \alpha^n & & \downarrow \alpha_X \\ F(X) & \xrightarrow{F(d^0)} & F(I^1(X)) & \xrightarrow{F(d^1)} & F(I^2(X)) & \xrightarrow{F(d^2)} & \cdots & \xrightarrow{F(d^{n-1})} & F(I^n(X)) & \xrightarrow{F(d^n)} & F(\Sigma_{\mathcal{A}} X). \end{array}$$

注意到 $(\alpha^1\beta^1 - 1) \circ F(d^0) = \alpha^1c^0 - F(d^0) = 0$, 因为 $F(d^1)$ 是 $F(d^0)$ 的一个弱上核, 则存在态射 $s^2: F(I^2(X)) \rightarrow F(I^1(X))$, 使得 $\alpha^1\beta^1 - 1 = s^2 \circ F(d^1)$. 于是,

$$(\alpha^2\beta^2 - F(d^1)s^2 - 1) \circ F(d^1) = \alpha^2\beta^2 \circ F(d^1) - F(d^1) \circ \alpha^1\beta^1 = 0.$$

因为 $F(d^2)$ 是 $F(d^1)$ 的一个弱上核, 则存在态射 $s^3: F(I^3(X)) \rightarrow F(I^2(X))$ 使得

$$\alpha^2\beta^2 - F(d^1)s^2 - 1 = s^3 \circ F(d^2).$$

继续这样的过程, 则存在态射 $s^{n+1}: F(\Sigma_{\mathcal{A}}X) \rightarrow F(I^n(X))$, 使得

$$\alpha^n\beta^n - F(d^{n-1})s^n - 1 = s^{n+1} \circ F(d^n).$$

从而, $(\alpha_X\beta_X - 1) \circ F(d^n) = F(d^n) \circ \alpha^n\beta^n - F(d^n) = F(d^n) \circ s^{n+1} \circ F(d^n)$. 因为 $F(d^n)$ 是满态射, 所以有 $\alpha_X\beta_X - 1 = F(d^n) \circ s^{n+1}$. 注意到 $F(I^n(X))$ 是 $\mathcal{A}'$ 中的内射对象, 所以 $\overline{\alpha_X} \circ \overline{\beta_X} = \overline{1}$. 类似地, 可证明 $\overline{\beta_X} \circ \overline{\alpha_X} = \overline{1}$. 因此, $\overline{\beta_X}$ 是 $\overline{\mathcal{A}'}$ 中的一个同构.

对于 $\mathcal{A}$ 中的态射 $\theta: X \rightarrow Y$, 因为 $I^1(Y)$ 、 $I^1(F(Y))$ 和 $I^1(F(X))$ 均是内射对象, 所以有如下允许 n -正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} F(X) & \xrightarrow{F(d^0)} & F(I^1(X)) & \xrightarrow{F(d^1)} & F(I^2(X)) & \xrightarrow{F(d^2)} & \cdots & \xrightarrow{F(d^{n-1})} & F(I^n(X)) & \xrightarrow{F(d^n)} & F(\Sigma_{\mathcal{A}}(X)) \\ \downarrow F(\theta) & & \downarrow F(\theta^1) & & \downarrow F(\theta^2) & & & & \downarrow F(\theta^n) & & \downarrow F(\Sigma_{\mathcal{A}}(\theta)) \\ F(Y) & \xrightarrow{F(a^0)} & F(I^1(Y)) & \xrightarrow{F(a^1)} & F(I^2(Y)) & \xrightarrow{F(a^2)} & \cdots & \xrightarrow{F(a^{n-1})} & F(I^n(Y)) & \xrightarrow{F(a^n)} & F(\Sigma_{\mathcal{A}'}(Y)) \\ \parallel & & \downarrow \eta^1 & & \downarrow \eta^2 & & & & \downarrow \eta^n & & \downarrow \beta_Y \\ F(Y) & \xrightarrow{b^0} & I^1(F(Y)) & \xrightarrow{b^1} & I^2(F(Y)) & \xrightarrow{b^2} & \cdots & \xrightarrow{b^{n-1}} & I^n(F(Y)) & \xrightarrow{b^n} & \Sigma_{\mathcal{A}'}(F(Y)), \\ \\ F(X) & \xrightarrow{F(d^0)} & F(I^1(X)) & \xrightarrow{F(d^1)} & F(I^2(X)) & \xrightarrow{F(d^2)} & \cdots & \xrightarrow{F(d^{n-1})} & F(I^n(X)) & \xrightarrow{F(d^n)} & F(\Sigma_{\mathcal{A}}(X)) \\ \parallel & & \downarrow \beta^1 & & \downarrow \beta^2 & & & & \downarrow \beta^n & & \downarrow \beta_X \\ F(X) & \xrightarrow{c^0} & I^1(F(X)) & \xrightarrow{c^1} & I^2(F(X)) & \xrightarrow{c^2} & \cdots & \xrightarrow{c^{n-1}} & I^n(F(X)) & \xrightarrow{c^n} & \Sigma_{\mathcal{A}'}(F(X)) \\ \downarrow F(\theta) & & \downarrow \psi^1 & & \downarrow \psi^2 & & & & \downarrow \psi^n & & \downarrow \Sigma_{\mathcal{A}'}(F(\theta)) \\ F(Y) & \xrightarrow{b^0} & I^1(F(Y)) & \xrightarrow{b^1} & I^2(F(Y)) & \xrightarrow{b^2} & \cdots & \xrightarrow{b^{n-1}} & I^n(F(Y)) & \xrightarrow{b^n} & \Sigma_{\mathcal{A}'}(F(Y)). \end{array}$$

于是,

$$(\eta^1 \circ F(\theta^1) - \psi^1\beta^1) \circ F(d^0) = \eta^1 \circ F(a^0) \circ F(\theta) - \psi^1c^0 = b^0F(\theta) - \psi^1c^0 = 0.$$

因为 $F(d^1)$ 是 $F(d^0)$ 的一个弱上核, 则存在态射 $\delta^2: F(I^2(X)) \rightarrow I^1(F(Y))$, 使得

$$\eta^1 \circ F(\theta^1) - \psi^1\beta^1 = \delta^2 \circ F(d^1).$$

从而,

$$(b^1\delta^2 - \eta^2 \circ F(\theta^2) + \psi^2\beta^2) \circ F(d^1) = b^1\eta^1 \circ F(\theta^1) - b^1\psi^1\beta^1 - \eta^2 \circ F(a^1) \circ F(\theta^1) + \psi^2c^1\beta^1 = 0.$$

因为 $F(d^2)$ 是 $F(d^1)$ 的一个弱上核, 则存在态射 $\delta^3: F(I^3(X)) \rightarrow I^2(F(Y))$, 使得

$$b^1\delta^2 - \eta^2 \circ F(\theta^2) + \psi^2\beta^2 = \delta^3 \circ F(d^2).$$

继续这样的过程, 则存在态射 $\delta^{n+1}: F(\Sigma_{\mathcal{A}}(X)) \rightarrow I^n(F(Y))$, 使得

$$b^{n-1}\delta^n - \eta^n \circ F(\theta^n) + \psi^n \beta^n = \delta^{n+1} \circ F(d^n).$$

于是, $b^n \delta^{n+1} \circ F(d^n) = \Sigma_{\mathcal{A}'}(F(\theta)) \circ \beta_X \circ F(d^n) - \beta_Y \circ F(\Sigma_{\mathcal{A}}(\theta)) \circ F(d^n)$. 因为 $F(d^n)$ 是满射, 所以有 $b^n \delta^{n+1} = \Sigma_{\mathcal{A}'}(F(\theta)) \circ \beta_X - \beta_Y \circ F(\Sigma_{\mathcal{A}}(\theta))$. 因此,

$$\Sigma_{\mathcal{A}'}(\overline{F}(\overline{\theta})) \circ \overline{\beta}_X = \overline{\beta}_Y \circ \overline{F}(\Sigma_{\mathcal{A}}(\overline{\theta})).$$

对任意的对象 $X \in \mathcal{A}$, 定义 $\beta_{\overline{X}} := \overline{\beta}_X$, 则有自然同构 $\overline{\beta}: \overline{F} \circ \Sigma_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} \Sigma_{\mathcal{A}'} \circ \overline{F}$.

第 2 步 我们证明 $\overline{F}$ 保持 $(n+2)$ -角.

对任意 $\overline{\mathcal{A}'}$ 中的标准 $(n+2)$ -角:

$$X^0 \xrightarrow{\overline{f^0}} X^1 \xrightarrow{\overline{f^1}} X^2 \xrightarrow{\overline{f^2}} \dots \xrightarrow{\overline{f^n}} X^{n+1} \xrightarrow{\overline{f^{n+1}}} \Sigma_{\mathcal{A}}(X^0).$$

由命题 2.2 知, 存在如下允许 n -正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} X^0 & \xrightarrow{f^0} & X^1 & \xrightarrow{f^1} & X^2 & \xrightarrow{f^2} & \dots & \xrightarrow{f^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{f^n} & X^{n+1} \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \varphi^{n+1} \\ X^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 & \xrightarrow{d^1} & I^2 & \xrightarrow{d^2} & \dots & \xrightarrow{d^{n-1}} & I^n & \xrightarrow{d^n} & \Sigma_{\mathcal{A}}(X^0), \end{array}$$

其中 $\overline{\varphi^{n+1}} = (-1)^n \overline{f^{n+1}}$. 因为 F 是 n -正合函子, 所以有如下允许 n -正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} F(X^0) & \xrightarrow{F(f^0)} & F(X^1) & \xrightarrow{F(f^1)} & F(X^2) & \xrightarrow{F(f^2)} & \dots & \xrightarrow{F(f^{n-1})} & F(X^n) & \xrightarrow{F(f^n)} & F(X^{n+1}) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow F(\varphi^{n+1}) \\ F(X^0) & \xrightarrow{F(d^0)} & F(I^1) & \xrightarrow{F(d^1)} & F(I^2) & \xrightarrow{F(d^2)} & \dots & \xrightarrow{F(d^{n-1})} & F(I^n) & \xrightarrow{F(d^n)} & F(\Sigma_{\mathcal{A}}(X^0)) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \beta_{X^0} \\ F(X^0) & \xrightarrow{c^0} & I^1(F(X^0)) & \xrightarrow{c^1} & I^2(F(X^0)) & \xrightarrow{c^2} & \dots & \xrightarrow{c^{n-1}} & I^n(F(X^0)) & \xrightarrow{c^n} & \Sigma_{\mathcal{A}'}(F(X^0)). \end{array}$$

由此可得

$$F(X^0) \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^0})} F(X^1) \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^1})} F(X^2) \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^2})} \dots \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^n})} F(X^{n+1}) \xrightarrow{(-1)^n \overline{\beta}_{X^0} \circ \overline{F}(\overline{\varphi^{n+1}})} \Sigma_{\mathcal{A}'}(F(X^0))$$

是 $\overline{\mathcal{A}'}$ 中的一个 $(n+2)$ -角. 因为 $(-1)^n \overline{\beta}_{X^0} \circ \overline{F}(\overline{\varphi^{n+1}}) = (-1)^n \overline{\beta}_{X^0} \circ \overline{F}(\overline{\varphi^{n+1}}) = \overline{\beta}_{X^0} \circ \overline{F}(\overline{f^{n+1}})$, 所以有 $\overline{\mathcal{A}'}$ 中的诱导 $(n+2)$ -角:

$$F(X^0) \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^0})} F(X^1) \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^1})} F(X^2) \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^2})} \dots \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^n})} F(X^{n+1}) \xrightarrow{\overline{\beta}_{X^0} \circ \overline{F}(\overline{f^{n+1}})} \Sigma_{\mathcal{A}'}(F(X^0)).$$

注意到下面 $(n+2)$ - $\Sigma_{\mathcal{A}'}$ -序列之间的态射是同构:

$$\begin{array}{ccccccccccc} F(X^0) & \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^0})} & F(X^1) & \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^1})} & F(X^2) & \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^2})} & \dots & \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^n})} & F(X^{n+1}) & \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^{n+1}})} & F(\Sigma_{\mathcal{A}}(X^0)) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \downarrow \beta_{X^0} \\ F(X^0) & \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^0})} & F(X^1) & \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^1})} & F(X^2) & \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^2})} & \dots & \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^n})} & F(X^{n+1}) & \xrightarrow{\overline{\beta}_{X^0} \circ \overline{F}(\overline{f^{n+1}})} & \Sigma_{\mathcal{A}'}(F(X^0)). \end{array}$$

由命题 2.2 知,

$$F(X^0) \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^0})} F(X^1) \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^1})} F(X^2) \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^2})} \cdots \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^n})} F(X^{n+1}) \xrightarrow{\overline{F}(\overline{f^{n+1}})} F(\Sigma_{\mathcal{A}}(X^0))$$

是 $\overline{\mathcal{A}}$ 中的一个标准 $(n+2)$ - 角. □

注 3.2 我们也能够使用文献 [5, 引理 2.1] 中的比较引理来证明定理 3.1 的第 1 步.

推论 3.3 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ 和 $(\mathcal{A}', \mathcal{X}')$ 是两个 Frobenius 范畴, $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 是正合函子. 如果 F 把 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathcal{X}$ - 内射对象映为 $\mathcal{A}'$ 中的 $\mathcal{X}'$ - 内射对象, 则 F 诱导了一个三角函子 $\overline{F}: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \overline{\mathcal{A}'}$.

注 3.4 与文献 [3, 引理 2.8] 相比较, 在定理 3.1 中, 我们不需要假设可逆自然变换 $\beta: \overline{F} \circ \Sigma_{\mathcal{A}} \rightarrow \Sigma_{\mathcal{A}'} \circ \overline{F}$ 存在, 因为我们已构造出一个自然同构 $\beta: \overline{F} \circ \Sigma_{\mathcal{A}} \rightarrow \Sigma_{\mathcal{A}'} \circ \overline{F}$.

推论 3.5 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ 和 $(\mathcal{A}', \mathcal{X}')$ 是两个 Frobenius n - 正合范畴, $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 和 $G: \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ 是两个 n - 正合函子, 满足 F 是 G 的一个右伴随, 则 F 和 G 诱导了两个 $(n+2)$ - 角函子 $\overline{F}: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \overline{\mathcal{A}'}$ 和 $\overline{G}: \overline{\mathcal{A}'} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$, 且 $\overline{F}$ 是 $\overline{G}$ 的一个右伴随.

证明 首先证明 G 保持内射对象. 设 I 是一个 $\mathcal{X}'$ - 内射对象, 任取一个允许满态射 $f^n: X^n \rightarrow X^{n+1}$, 则存在 $\mathcal{A}$ 中的允许 n - 正合列:

$$X^0 \xrightarrow{f^0} X^1 \xrightarrow{f^1} X^2 \xrightarrow{f^2} \cdots \xrightarrow{f^{n-1}} X^n \xrightarrow{f^n} X^{n+1}.$$

因为 F 是 n - 正合函子, 所以,

$$F(X^0) \xrightarrow{F(f^0)} F(X^1) \xrightarrow{F(f^1)} F(X^2) \xrightarrow{F(f^2)} \cdots \xrightarrow{F(f^{n-1})} F(X^n) \xrightarrow{F(f^n)} F(X^{n+1})$$

是 $\mathcal{A}'$ 中的允许 n - 正合列. 因此, 存在如下正合列之间的同构态射:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(I, F(X^0)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(I, F(X^1)) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(I, F(X^n)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(I, F(X^{n+1})) \rightarrow 0 \\ \downarrow \wr \quad \downarrow \wr \quad \downarrow \wr \quad \downarrow \wr \\ 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(G(I), X^0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(G(I), X^1) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(G(I), X^n) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(G(I), X^{n+1}) \rightarrow 0. \end{array}$$

因为 I 也是一个 $\mathcal{X}'$ - 投射对象且 (G, F) 是一个伴随对, 所以, $G(I)$ 在 $\mathcal{A}$ 中是 $\mathcal{X}$ - 投射的, 当然它也是 $\mathcal{X}$ - 内射的. 类似地, 可证明 F 保持 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathcal{X}$ - 内射对象. 由定理 3.1 知, F 和 G 分别诱导了 $(n+2)$ - 角函子 $\overline{F}: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \overline{\mathcal{A}'}$ 和 $\overline{G}: \overline{\mathcal{A}'} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$.

对任意的对象 $X \in \mathcal{A}'$, 存在 $\mathcal{A}'$ 中的允许 n - 正合列:

$$X \xrightarrow{f} I^1 \xrightarrow{f^1} I^2 \xrightarrow{f^2} \cdots \xrightarrow{f^{n-1}} I^n \xrightarrow{f^n} Z,$$

其中 $I^1, I^2, \dots, I^n$ 是 $\mathcal{X}'$ - 内射对象. 因为 G 是 n - 正合函子, 所以,

$$G(X) \xrightarrow{G(f)} G(I^1) \xrightarrow{G(f^1)} G(I^2) \xrightarrow{G(f^2)} \cdots \xrightarrow{G(f^{n-1})} G(I^n) \xrightarrow{G(f^n)} G(Z)$$

是 $\mathcal{A}$ 中的允许 n - 正合列. 对任意的对象 $Y \in \mathcal{A}$, 有如下正合列之间的同构:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(I^1, F(Y)) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(X, F(Y)) \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ \downarrow \wr \quad \downarrow \wr \quad \downarrow \wr \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(G(I^1), Y) \xrightarrow{G(f)^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(G(X), Y) \longrightarrow N \longrightarrow 0. \end{array}$$

于是有 $M \simeq N$, 也就是说, $\text{Hom}_{\mathcal{A}'}(X, F(Y))/\text{Im } f^* \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(G(X), Y)/\text{Im } G(f)^*$.

我们断言 $\text{Im } f^* = I'(X, F(Y))$, 其中 $I'(X, F(Y))$ 是 $\text{Hom}_{\mathcal{A}'}(X, F(Y))$ 中的通过 $\mathcal{A}'$ 的内射对象分解的态射构成的子群. 事实上, 显然有 $\text{Im } f^* \subseteq I'(X, F(Y))$. 对任意的态射 $a \in I'(X, F(Y))$, 存在态射 $b: X \rightarrow J'$ 和 $c: J' \rightarrow F(Y)$, 其中 J' 是 $\mathcal{X}'$ -内射对象, 使得 $a = cb$. 因为 J' 是 $\mathcal{X}'$ -内射的, 所以存在态射 $d: I^1 \rightarrow J'$, 使得 $df = b$. 于是, $a = cb = cdf$, 因此, $a \in \text{Im } f^*$. 类似地, 可证明 $\text{Im } G(f)^* = I(G(X), Y)$. 所以, $\text{Hom}_{\overline{\mathcal{A}'}}(X, F(Y)) \simeq \text{Hom}_{\overline{\mathcal{A}}}(G(X), Y)$. 这就证明了 $\overline{F}$ 是 $\overline{G}$ 的右伴随. $\square$

4 n -正合范畴和 $(n+2)$ -角范畴中的覆盖函子

在本节, 设 k 是一个域; 所有的范畴 $\mathcal{A}$ 都假设是 k -线性、Hom-集有限且满足 Krull-Schmidt 性质的加法范畴, 也就是说, $\mathcal{A}$ 中的任意对象都能分解成一些不可分解对象的直和且这个分解在同构意义下是唯一的; 所有的函子都假设是 k -线性的. 对任意的范畴 $\mathcal{A}$, 记 $\text{ind } \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 中不可分解对象同构类构成的子范畴. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 是两个 n -正合范畴 (或 $(n+2)$ -角范畴), $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 是 n -正合函子 (或 $(n+2)$ -角函子) 满足对任意的 $X \in \text{ind } \mathcal{A}$, $F(X) \in \text{ind } \mathcal{A}'$, 则 F 诱导了一个从 $\text{ind } \mathcal{A}$ 到 $\text{ind } \mathcal{A}'$ 的函子, 仍记为 F .

定义 4.1 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 是两个 n -正合范畴 (或 $(n+2)$ -角范畴). 一个 n -正合函子 (或 $(n+2)$ -角函子) $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 称为覆盖函子, 如果诱导函子 $F: \text{ind } \mathcal{A} \rightarrow \text{ind } \mathcal{A}'$ 是 Bongartz 和 Gabriel^[8] 意义下的覆盖函子. 也就是说, 对任意的两个对象 $X \in \text{ind } \mathcal{A}$ 和 $Y' \in F(\text{ind } \mathcal{A})$, 由 F 诱导的映射

$$\bigoplus_{F(Y)=Y'} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(F(X), Y') \quad \text{和} \quad \bigoplus_{F(X')=X} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X', Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(X, F(Y))$$

均是双射.

设 G 是由 $\mathcal{A}$ 中的 k -线性的自同构构成的群. 假设 G 关于 $\text{ind } \mathcal{A}$ 的作用是自由的 (即对任意的 $a \in \text{ind } \mathcal{A}$ 和 $1 \neq g \in G$, 有 $ga \neq a$) 且局部有界的 (即对任意的 $a, b \in \text{ind } \mathcal{A}$, 仅存在有限多个 $g \in G$, 使得 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, gb) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(g^{-1}a, b) \neq 0$). 由文献 [9] 知, 覆盖函子 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 称为 Galois 覆盖函子, 如果 $F: \text{ind } \mathcal{A} \rightarrow \text{ind } \mathcal{A}'$ 是稠密的, 并且对任意的 $X, Y \in \text{ind } \mathcal{A}$, $F(X) = F(Y)$ 当且仅当存在某个 $g \in G$, 使得 $Y = g \cdot X$. 因此, 对任意的 $X, Y \in \text{ind } \mathcal{A}$, 每一个 Galois 覆盖函子诱导如下两个双射:

$$\bigoplus_{g \in G} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, g \cdot Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(F(X), F(Y)) \quad \text{和} \quad \bigoplus_{g \in G} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(g \cdot X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(F(X), F(Y)).$$

下面的命题是文献 [10, 命题 3.2.1] 的推广.

命题 4.2 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 是两个 Frobenius n -正合范畴, $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 是一个 Galois 覆盖函子且有群 G . 如果 F 保持内射对象且 $\mathcal{A}'$ 中的每个内射对象都是 $\mathcal{A}$ 中的某个内射对象在 F 作用下的像, 则 $\overline{F}: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \overline{\mathcal{A}'}$ 是群 G 的 Galois 覆盖函子.

证明 由定理 3.1 知, $\overline{F}$ 是 $(n+2)$ -角函子. 我们只需要证明, 对任意的 $X, Y \in \text{ind } \mathcal{A}$, $f: X \rightarrow Y$ 能通过 $\mathcal{A}$ 中的内射对象 I 分解当且仅当 $F(f)$ 能通过 $\mathcal{A}'$ 中的内射对象分解.

设 $f: X \rightarrow Y$ 是 $\mathcal{A}$ 中任意的态射. 如果 f 能通过 $\mathcal{A}$ 中的内射对象分解, 则 $F(f)$ 能通过 $\mathcal{A}'$ 中的内射对象分解, 因为 F 是保持内射的. 反过来, 如果 $F(f)$ 能通过 $\mathcal{A}'$ 中的内射对象 I' 分解, 不妨记 $F(f) = \beta\alpha$, 其中 $\alpha: F(X) \rightarrow I'$, $\beta: I' \rightarrow F(Y)$ 是 $\mathcal{A}'$ 中的态射. 由于 $\mathcal{A}'$ 中的每个内射对象都是 $\mathcal{A}$ 中的某个内射对象在 F 作用下的像, 所以可记 $I' = F(I)$, 其中 I 是 $\mathcal{A}$ 中的某个内射对象. 因为 F 是

Galois 覆盖函子, 所以对任意 $a, b \in G$, 存在 $\mathcal{A}$ 中的态射 $\alpha_a: X \rightarrow a \cdot I$, $\beta_b: I \rightarrow b \cdot Y$, 使得

$$\alpha = \sum_{a \in G} F(\alpha_a) \quad \text{和} \quad \beta = \sum_{b \in G} F(\beta_b).$$

于是,

$$F(f) = \beta\alpha = \sum_{a, b \in G} F(a \cdot \beta_b \circ \alpha_a) = \sum_{g \in G} \sum_{a \in G} F(a \cdot \beta_{a^{-1}g} \circ \alpha_a) = \sum_{a \in G} F(a \cdot \beta_{a^{-1}} \circ \alpha_a),$$

这里需注意, 对任意的 $g \neq 1$, 有 $a \cdot \beta_{a^{-1}g} \circ \alpha_a = 0$. 因为 F 是忠实的, 所以 $f = \sum_{a \in G} a \cdot \beta_{a^{-1}} \circ \alpha_a$. 也就是说, 存在有限多个 $a \in G$, 不妨记为 $a_1, \dots, a_n$, 使得 $f = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \beta_{a_i^{-1}} \circ \alpha_{a_i}$. 因此, f 能通过 $\bigoplus_{i=1}^n a_i I$ 分解, 且 $\bigoplus_{i=1}^n a_i I$ 是内射对象, 这是因为每个 a_i 都是 $\mathcal{A}$ 中的自同构. $\square$

致谢 感谢审稿人的仔细审阅.

参考文献

- 1 Grothendieck A. Sur quelques points d'algèbre homologique, I. Tohoku Math J, 1957, 9: 119–221
- 2 Quillen D. Higher algebraic K-theory I. In: Algebraic K-Theory I: Higher K-Theories. Lecture Notes in Mathematics, vol. 341. Berlin: Springer, 1973, 85–147
- 3 Happel D. Triangulated Categories in The Representation Theory of Finite Dimensional Algebras. London Mathematical Society Lecture Note Series 119. Cambridge: Cambridge University Press, 1988
- 4 Geiß C, Keller B, Oppermann S. n -Angulated categories. J Reine Angew Math, 2013, 675: 101–120
- 5 Jasso G. n -Abelian and n -exact categories. Math Z, 2016, 283: 703–759
- 6 Bergh P A, Thaule M. The Grothendieck group of an n -angulated category. J Pure Appl Algebra, 2014, 218: 354–366
- 7 Bergh P A, Thaule M. The axioms for n -angulated categories. Algebr Geom Topol, 2013, 13: 2405–2428
- 8 Bongartz K, Gabriel P. Covering spaces in representation-theory. Invent Math, 1982, 65: 331–378
- 9 Gabriel P. The universal cover of a representation-finite algebra. In: Representations of Algebras. Lecture Notes in Mathematics, vol. 903. Berlin: Springer, 1981, 68–105
- 10 Xiao J, Zhu B. Locally finite triangulated categories. J Algebra, 2005, 290: 473–490

$(n+2)$ -angulated functors induced by n -exact functors

Panyue Zhou & Haicheng Zhang

Abstract Let $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ and $(\mathcal{A}', \mathcal{X}')$ be two Frobenius n -exact categories, and $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ be an n -exact functor. If F sends $\mathcal{X}$ -injective objects in $\mathcal{A}$ to $\mathcal{X}'$ -injective objects in $\mathcal{A}'$, then it induces an $(n+2)$ -angulated functor $\overline{F}: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \overline{\mathcal{A}'}$. Moreover, we give some applications of our main result, such as applications to adjoint pairs and Galois covering functors.

Keywords Frobenius n -exact category, stable category, $(n+2)$ -angulated functor

MSC(2010) 18E99, 18E10, 18E30

doi: 10.1360/SCM-2016-0531