$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -量子群的 Gröbner-Shirshov 基

孔军士, 阿布都卡的·吾甫*

新疆大学数学与系统科学学院, 乌鲁木齐 830046

E-mail: kongjunshi@126.com, abdu@vip.sina.com

收稿日期: 2009-07-06; 接受日期: 2010-02-08; * 通信作者

新疆维吾尔自治区高校科研计划科学研究重点项目基金 (项目编号: XJEDU2009I06) 资助课题

摘要 通过计算合成, 我们证明了 Yamane 给出的关系是 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -量子群的一个 Gröbner-Shirshov 基.

关键词 Gröbner-Shirshov 基 合成引理 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -量子群

MSC (2000) 主题分类 16S15, 13P10, 17B37

1 引言

交换代数的 Gröbner 基理论是由 Buchberger 在文献 [1] 中介绍的, 此理论提供了交换代数约化问题的一个解决方法. 这个方法给出了一种算法去计算交换环给定理想的生成元集合, 人们可以用此算法来确定对于由理想给出的关系的不可约元素. 在 [2] 中, Bergman 通过给出钻石引理将 Gröbner 基理论推广到结合代数上.

Lie 代数的 Gröbner 基理论是由 Shirshov^[3] 发展的. 该理论的主要内容是合成引理, 它刻画了给定理想元素的首项. 在文献 [4] 中, Bokut 注意到 Shirshov 的方法对结合代数也适用. 因此, Shirshov 对 Lie 代数及其包络代数的 Gröbner 基理论称为 Gröbner-Shirshov 基理论.

在文献 [5] 中, Bokut 和 Malcolmson 发展了量子包络代数或者所谓的量子群的 Gröbner-Shirshov 基理论, 并且具体地构造了 A_n 型量子群 ($q^8 \neq 1$) 的 Gröbner-Shirshov 基. Gröbner-Shirshov 基是很有价值的, 因为如果定义关系的集合是有限的 (或者更一般地讲, 对任意给定单项式, 只有有限多个元素的首项小于它), 则对于任何一个多项式 φ , 我们可以通过只检查首项的有限序列来判定 φ 是否属于定义关系生成的理想.

在文献 [6] 中, Yamane 引入了一个新的量子群, 它可以看成是一个量子超代数的 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -分次形式 (参看文献 [6] 中的注 3). 这种新的量子群不同构于任何量子代数和量子超代数 (参看文献 [6] 中的注 7). 本文应用 Yamane 在文献 [6] 中构造的关系, 我们给出这个新量子群的一个 Gröbner-Shirshov 基.

2 预备知识

在这一节, 我们分别从文献 [5, 6] 中回忆一些关于量子群的 Gröbner-Shirshov 基理论和 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -量子群的基本概念.

首先, 我们回忆关于 Gröbner-Shirshov 基理论的基本概念. 设 k 是一个域, X 是由一些字母组成的非空集合, 其指标集为正整数集. $\langle X \rangle$ 和 $k\langle X \rangle$ 分别是由 X 生成的半群和自由代数. 为了确定每个

元素 $f \in k\langle X \rangle$ 的首项 $\bar{f}$, 我们选取自由代数 $k\langle X \rangle$ 中单项式的一个序 “ $<$ ”. 如果一个元素 $f \in k\langle X \rangle$ 的首项系数为 $1 \in k$, 则称 f 为首一元素. 设 f 与 g 是 $k\langle X \rangle$ 中的两个首一元素, 其首项分别为 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$. 如果存在 $a, b \in \langle X \rangle$, 使得 $\bar{f}a = b\bar{g} = \omega$ 且 $\bar{f}$ 的长度大于 b 的长度, 则我们说对 f, g 有交叉合成, 并记为 $(f, g)_\omega = fa - bg$, 此处注意 $\overline{(f, g)_\omega} < \omega$. 如果存在 $a, b \in \langle X \rangle$, 使得 $\bar{f} = a\bar{g}b = \omega$, 则说对 f, g 有包含合成, 并记为 $(f, g)_\omega = f - agb$, 同样注意 $\overline{(f, g)_\omega} < \omega$.

设 S 是 $k\langle X \rangle$ 中的一些关系的集合 (我们假设 S 由首一元素组成). 用 (S) 表示由 S 在 $k\langle X \rangle$ 中生成的理想. 设 $p, q \in k\langle X \rangle, \omega \in \langle X \rangle$. 我们定义 $k\langle X \rangle$ 上的等价关系如下: $p \equiv q \pmod{(S; \omega)}$ 当且仅当 $p - q = \sum \alpha_i a_i s_i b_i$, 其中 $\alpha_i \in k; a_i, b_i \in \langle X \rangle; s_i \in S; \overline{a_i s_i b_i} < \omega$. 如果对于任意 $f, g \in S$, 只要合成 $(f, g)_\omega$ 有定义, 就有 $(f, g)_\omega \equiv 0 \pmod{(S; \omega)}$, 则称 S 对合成封闭. 在这种情形下, 称合成 $(f, g)_\omega$ 对 S 是平凡的. 如果 S 对合成不封闭, 则我们通过纳入所有对 S 非平凡的合成来扩张 S 得到 S^c , 即所谓的 S 的完备化. 如果 $S = S^c$ (即对合成封闭), 则称 S 是完备的. 如果 S 是完备的, 则根据 Shirshov 的引理 (参见文献 [3]), 任意首一元素 $f \in (S)$ 有可约的首项 $\bar{f} = a\bar{s}b$, 其中 $s \in S, a, b \in \langle X \rangle$. 该引理还说商代数 $k\langle X \rangle / (S)$ (作为 k 上的向量空间) 的线性基可以通过取 $\langle X \rangle$ 中 S -不可约单项式的集合得到. 这时, 集合 S 称为理想 (S) 的一个 Gröbner-Shirshov 基, 在不造成定义混乱的情况下我们也可称它为商代数 $k\langle X \rangle / (S)$ 的一个 Gröbner-Shirshov 基. 如果对任意 $f \in S, S - \{f\}$ 不再是 Gröbner-Shirshov 基, 则称 S 是一个极小 Gröbner-Shirshov 基.

其次, 我们回忆关于 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -量子群的基本概念. 设 $k = \mathbb{C}$ 是复数域, $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$, 那么 $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cap \{0\}$. 设 $\mathbb{K} = \mathbb{C}(q^{\frac{1}{2}})$ 是以 $q^{\frac{1}{2}}$ 为不定元的有理函数域. 设 $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \in \mathbb{K}^\times$, 即 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, 而且 ω 是三次单位根. 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

令 $p(1) = 1, p(2) = 0$.

我们设 $U = U_q$ 是一个由生成元

$$E_1, E_2, \sigma, K_1^{\pm 1}, K_2^{\pm 1}, F_1, F_2 \quad (2.1)$$

及以下关系定义的 $\mathbb{K}$ -代数

$$\sigma^3 = 1, \quad K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1, \quad K_i K_j = K_j K_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (2.2)$$

$$\sigma K_i \sigma^{-1} = K_i, \quad \sigma E_i \sigma^{-1} = \omega^{p(i)} E_i, \quad \sigma F_i \sigma^{-1} = \omega^{-p(i)} F_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (2.3)$$

$$K_i E_j K_i^{-1} = q^{a_{ij}} E_j, \quad K_i F_j K_i^{-1} = q^{-a_{ij}} F_j, \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad (2.4)$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij}(-L_i + L_i^{-1}), \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad (2.5)$$

$$E_1^3 = 0, \quad E_2^2 E_1 - (q + q^{-1}) E_2 E_1 E_2 + E_1 E_2^2 = 0, \quad (2.6)$$

$$F_1^3 = 0, \quad F_2^2 F_1 - (q + q^{-1}) F_2 F_1 F_2 + F_1 F_2^2 = 0, \quad (2.7)$$

其中 $L_i = K_i \sigma^{p(i)}$.

设 U^0 是由 $\sigma, K_1^{\pm 1}$ 和 $K_2^{\pm 1}$ 生成的 U 的子代数. 设 U^+ (或者 U^-) 是由 E_1 和 E_2 (或者 F_1 和 F_2) 生成的 U 的子代数. 我们有 U 的如下三角分解 (参见文献 [6, 引理 1.1])

$$U \cong U^+ \otimes U^0 \otimes U^-.$$

3 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -量子群的 Gröbner-Shirshov 基

设

$$X = \{E_1, E_2, E_{12}, E_{112}, \sigma, K_1^{\pm 1}, K_2^{\pm 1}, F_1, F_2, F_{12}, F_{112}\},$$

且 $\mathbb{K}\langle X \rangle$ 是由集合 X 生成的自由代数. 设 I 是由关系 (2.2)–(2.7) 和以下关系生成的 $\mathbb{K}\langle X \rangle$ 的双边理想

$$E_{12} = E_1 E_2 - q E_2 E_1, \quad E_{112} = E_1 E_{12} - \omega^2 q E_{12} E_1, \quad (3.1)$$

$$F_{12} = \frac{1}{q^2 - 1}(F_1 F_2 - q F_2 F_1), \quad F_{112} = -\frac{1}{q^2 - \omega}(F_1 F_{12} - \omega^2 q F_{12} F_1) \quad (3.2)$$

那么 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -量子群 U 就是商代数 $\mathbb{K}\langle X \rangle/I$. 根据文献 [6], 在 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -量子群 U 中我们有以下关系:

$$E_{12} E_2 = q^{-1} E_2 E_{12}, \quad F_{12} F_2 = q^{-1} F_2 F_{12}, \quad (3.3)$$

$$E_1 E_{112} = \omega q E_{112} E_1, \quad F_1 F_{112} = \omega q F_{112} F_1, \quad (3.4)$$

$$E_{112} E_2 - E_2 E_{112} = -q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) E_{12}^2, \quad F_{112} F_2 - F_2 F_{112} = q^{-1} \omega^2 (q^2 - 1) F_{12}^2, \quad (3.5)$$

$$E_{112} E_{12} = \omega q E_{12} E_{112}, \quad F_{112} F_{12} = \omega q F_{12} F_{112}, \quad (3.6)$$

$$E_{12}^3 = 0, \quad F_{12}^3 = 0. \quad (3.7)$$

对于元素 $E_1, E_2, E_{12}, E_{112}, \sigma, K_1, K_1^{-1}, K_2, K_2^{-1}, F_1, F_2, F_{12}, F_{112}$, 我们设定以下序:

$$E_1 > E_{112} > E_{12} > E_2 > K_1 > K_1^{-1} > K_2 > K_2^{-1} > \sigma > F_1 > F_{112} > F_{12} > F_2.$$

这个序导出了这些元素的单项式上的字典序. 根据文献 [5], 设

$$S^+ = \{E_1^3, E_2^2 E_1 - (q + q^{-1}) E_2 E_1 E_2 + E_1 E_2^2\},$$

$$S^- = \{F_1^3, F_2^2 F_1 - (q + q^{-1}) F_2 F_1 F_2 + F_1 F_2^2\},$$

$$K = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9\},$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\},$$

其中对所有的 $i, j \in \{1, 2\}$,

$$g_1 = \sigma^3 - 1,$$

$$g_2 = K_i K_i^{-1} - 1,$$

$$g_3 = K_i^{-1} K_i - 1,$$

$$g_4 = K_1 K_2 - K_2 K_1,$$

$$g_5 = K_i \sigma - \sigma K_i,$$

$$g_6 = E_i \sigma - \omega^{-p(i)} \sigma E_i,$$

$$g_7 = \sigma F_i - \omega^{-p(i)} F_i \sigma,$$

$$g_8 = E_j K_i^{\pm 1} - q^{\mp a_{ij}} K_i^{\pm 1} E_j,$$

$$g_9 = K_i^{\pm 1} F_j - q^{\mp a_{ij}} F_j K_i^{\pm 1},$$

$$t_1 = E_1 F_1 - F_1 E_1 + K_1 \sigma - \sigma^{-1} K_1^{-1},$$

$$t_2 = E_1 F_2 - F_2 E_1,$$

$$t_3 = E_2 F_1 - F_1 E_2,$$

$$t_4 = E_2 F_2 - F_2 E_2 + K_2 - K_2^{-1}.$$

为方便后面计算, 我们设

$$S^{+c} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\},$$

其中

$$\begin{aligned} e_1 &= E_1 E_2 - q E_2 E_1 - E_{12}, & e_2 &= E_1 E_{12} - \omega^2 q E_{12} E_1 - E_{112}, \\ e_3 &= E_{12} E_2 - q^{-1} E_2 E_{12}, & e_4 &= E_1 E_{112} - \omega q E_{112} E_2, \\ e_5 &= E_{112} E_2 + q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) E_{12}^2 - E_2 E_{112}, & e_6 &= E_{112} E_{12} - \omega q E_{12} E_{112}, \\ e_7 &= E_1^3, & e_8 &= E_{12}^3. \end{aligned}$$

显然有 $S^{+c} \supset S^+$. 我们的第一个结论是:

命题 1 集合 S^{+c} 对合成封闭, 即 S^{+c} 是代数 U^+ 的一个 Gröbner-Shirshov 基.

证明 容易看出在 S^{+c} 的元素之间共有 10 个合成:

$$\begin{aligned} (e_3, e_2)_{E_1 E_{12} E_2}, & (e_5, e_4)_{E_1 E_{112} E_2}, & (e_7, e_2)_{E_1^3 E_{12}}, & (e_7, e_4)_{E_1^3 E_{112}}, & (e_8, e_2)_{E_1 E_{12}^3}, \\ (e_6, e_3)_{E_{112} E_{12} E_2}, & (e_6, e_4)_{E_1 E_{112} E_{12}}, & (e_7, e_1)_{E_1^3 E_2}, & (e_8, e_3)_{E_{12}^3 E_2}, & (e_8, e_6)_{E_{112} E_{12}^3}. \end{aligned}$$

我们只证明其中的 $(e_3, e_2)_{E_1 E_{12} E_2}$ 和 $(e_5, e_4)_{E_1 E_{112} E_2}$ 对 S^{+c} 的平凡性, 其它的证明类似.

$$\begin{aligned} (e_3, e_2)_{E_1 E_{12} E_2} &= E_1 e_3 - e_2 E_2 \\ &= E_1 E_{12} E_2 - q^{-1} E_1 E_2 E_{12} - E_1 E_{12} E_2 + E_{112} E_2 + \omega^2 q E_{12} E_1 E_2 \\ &= -q^{-1} E_1 E_2 E_{12} + E_{112} E_2 + \omega^2 q E_{12} E_1 E_2 \\ &\equiv -q^{-1} (E_{12} + q E_2 E_1) E_{12} + E_2 E_{112} - q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) E_{12}^2 \\ &\quad + \omega^2 q E_{12} (E_{12} + q E_2 E_1) \pmod{S^{+c}; E_1 E_{12} E_2} \\ &\equiv -E_2 E_1 E_{12} + E_2 E_{112} + \omega^2 q^2 E_{12} E_2 E_1 \pmod{S^{+c}; E_1 E_{12} E_2} \\ &\equiv -E_2 (E_{112} + \omega^2 q E_{12} E_1) + E_2 E_{112} \\ &\quad + \omega^2 q E_2 E_{12} E_1 \pmod{S^{+c}; E_1 E_{12} E_2} \\ &\equiv 0 \pmod{S^{+c}; E_1 E_{12} E_2}, \\ (e_5, e_4)_{E_1 E_{112} E_2} &= E_1 e_5 - e_4 E_2 \\ &= E_1 E_{112} E_2 + q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) E_1 E_{12}^2 - E_1 E_2 E_{112} \\ &\quad - E_1 E_{112} E_2 + \omega q E_{112} E_1 E_2 \\ &\equiv q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) (E_{112} + \omega^2 q E_{12} E_1) E_{12} - (E_{12} + q E_2 E_1) E_{112} \\ &\quad + \omega q E_{112} (E_{12} + q E_2 E_1) \pmod{S^{+c}; E_1 E_{112} E_2} \\ &\equiv (q^2 - \omega) E_{12} E_{112} + \omega (q^2 - \omega) E_{12} (E_{112} + \omega^2 q E_{12} E_1) - E_{12} E_{112} \\ &\quad - \omega q^2 E_2 E_{112} E_1 + \omega^2 q^2 E_{12} E_{112} \\ &\quad + \omega q^2 (E_2 E_{112} - q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) E_{12}^2) E_1 \pmod{S^{+c}; E_1 E_{112} E_2} \\ &\equiv [(q^2 - \omega) + \omega (q^2 - \omega) + \omega^2 (q^2 - \omega)] E_{12} E_{112} \pmod{S^{+c}; E_1 E_{112} E_2} \\ &\equiv 0 \pmod{S^{+c}; E_1 E_{112} E_2}. \end{aligned}$$

注意, 此处我们用到了条件 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. 所以集合 S^{+c} 合成封闭, 证毕.

同样, 设

$$S^{-c} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\},$$

其中

$$\begin{aligned} f_1 &= F_1 F_2 - q F_2 F_1 - (q^2 - 1) F_{12}, & f_2 &= F_1 F_{12} - \omega^2 q F_{12} F_1 + (q^2 - \omega) F_{112}, \\ f_3 &= F_{12} F_2 - q^{-1} F_2 F_{12}, & f_4 &= F_1 F_{112} - \omega q F_{112} F_2, \\ f_5 &= F_{112} F_2 - q^{-1} \omega^2 (q^2 - 1) F_{12}^2 - F_2 F_{112}, & f_6 &= F_{112} F_{12} - \omega q F_{12} F_{112}, \\ f_7 &= F_1^3, & f_8 &= F_{12}^3. \end{aligned}$$

显然 S^{-c} 包含 S^{-} . 因为 S^{+c} 和 S^{-c} 中的公式是对称的 (除系数外), 因此我们对 S^{-c} 有类似与命题 1 的结论, 而且证明类似. 所以我们有:

命题 2 集合 S^{-c} 对合成封闭, 即 S^{-c} 是代数 U^{-} 的一个 Gröbner-Shirshov 基.

关于代数 U^0 我们有以下的结论:

命题 3 集合 $K \cup T$ 对合成封闭, 即 $K \cup T$ 是代数 U^0 的一个 Gröbner-Shirshov 基.

证明 首先, 我们证明集合 K 是合成封闭的. 通过惯常的检验方法我们看到集合 K 的元素之间有以下合成

$$\begin{aligned} &(g_5, g_1)_{K_i \sigma^3}, & (g_6, g_1)_{E_1 \sigma^3}, & (g_1, g_7)_{\sigma^3 F_i}, \\ &(g_2, g_3)_{K_i K_i^{-1} K_i}, & (g_4, g_2)_{K_1 K_2 K_2^{-1}}, & (g_8, g_2)_{E_j K_i K_i^{-1}}, & (g_2, g_9)_{K_i K_i^{-1} F_j}, \\ &(g_3, g_4)_{K_1^{-1} K_1 K_2}, & (g_3, g_5)_{K_i^{-1} K_i \sigma}, & (g_3, g_9)_{K_i^{-1} K_i F_j}, & (g_8, g_3)_{E_j K_i^{-1} K_i}, \\ &(g_4, g_5)_{K_1 K_2 \sigma}, & (g_8, g_4)_{E_j K_1 K_2}, & (g_4, g_9)_{K_1 K_2 F_i}, \\ &(g_5, g_7)_{K_i \sigma F_j}, & (g_8, g_5)_{E_j K_i \sigma}, & (g_6, g_7)_{E_i \sigma F_j}, & (g_8, g_9)_{E_i K_j^{\pm 1} F_s}, \end{aligned}$$

其中 $i, j, s \in \{1, 2\}$. 在这些合成之中我们只证明 $(g_4, g_5)_{K_1 K_2 \sigma}$ 和 $(g_5, g_7)_{K_i \sigma F_j}$ 对集合 K 的平凡性, 其他的可通过同样的方法证得.

$$\begin{aligned} (g_4, g_5)_{K_1 K_2 \sigma} &= K_1 K_2 \sigma - K_2 K_1 \sigma - K_1 K_2 \sigma + K_1 \sigma K_2 \\ &= K_1 \sigma K_2 - K_2 K_1 \sigma \\ &\equiv \sigma K_1 K_2 - \sigma K_2 K_1 \pmod{(K; K_1 K_2 \sigma)} \\ &\equiv 0 \pmod{(K; K_1 K_2 \sigma)}, \\ (g_5, g_7)_{K_i \sigma F_j} &= K_i \sigma F_j - \sigma K_i F_j - K_i \sigma F_j + \omega^{-p(j)} K_i F_j \sigma \\ &= \omega^{-p(j)} K_i F_j \sigma - \sigma K_i F_j \\ &\equiv \omega^{-p(j)} q^{-a_{ij}} F_j K_i \sigma - q^{-a_{ij}} \sigma F_j K_i \sigma \pmod{(K; K_i \sigma F_j)} \\ &\equiv \omega^{-p(j)} q^{-a_{ij}} F_j \sigma K_i - q^{-a_{ij}} \omega^{-p(j)} F_j \sigma K_i \pmod{(K; K_i \sigma F_j)} \\ &\equiv 0 \pmod{(K; K_i \sigma F_j)}. \end{aligned}$$

所以 K 是合成封闭的.

其次, 通过简单的观察我们会发现集合 T 以及集合 $K \cup T$ 的元素之间没有合成, 所以集合 $K \cup T$ 是合成封闭的, 即集合 $K \cup T$ 是集合 U^0 的一个 Gröbner-Shirshov 基, 证毕.

为了证明我们的主要结论, 首先引入以下两个引理.

引理 1 设 $[X, Y] = XY - YX$, 那么我们有:

$$[E_1, F_{12}] = -q^{-1} F_2 L_1, \quad [F_1, E_{12}] = -q^{-1} (q^2 - 1) E_2 L_1, \quad (3.9)$$

$$[E_1, F_{112}] = -\omega q^{-1} F_{12} L_1^{-1}, \quad [F_1, E_{112}] = \omega q^{-1} (q^2 - \omega) E_{12} L_1, \quad (3.10)$$

$$[E_2, F_{12}] = F_1 L_2, \quad [F_2, E_{12}] = (q^2 - 1) E_1 L_2^{-1}, \quad (3.11)$$

$$[E_2, F_{112}] = \omega^2 F_1^2 L_2, \quad [F_2, E_{112}] = -\omega^2 (q^2 - 1) (q^2 - \omega) E_1^2 L_2^{-1}, \quad (3.12)$$

$$[E_{12}, F_{12}] = -L_1 L_2 + L_1^{-1} L_2^{-1}, \quad (3.13)$$

$$[E_{12}, F_{112}] = F_1 L_1 L_2, \quad [F_{12}, E_{112}] = -(q^2 - \omega) E_1 L_1^{-1} L_2^{-1}, \quad (3.14)$$

$$[E_{112}, F_{112}] = -L_1^2 L_2 + L_1^{-2} L_2^{-1}. \quad (3.15)$$

证明 参见文献 [6] 中的第 2 节.

引理 2 我们有以下等式:

$$\begin{aligned} E_{12}\sigma &= \omega^{-1}\sigma E_{12}, & E_{12}K_1^{\pm 1} &= q^{\pm 1}K_1^{\pm 1}E_{12}, & E_{12}K_2^{\pm 1} &= q^{\mp 1}K_2^{\pm 1}E_{12}, \\ E_{112}\sigma &= \omega^{-2}\sigma E_{112}, & E_{112}K_1^{\pm 1} &= q^{\pm 1}K_1^{\pm 1}E_{112}, & E_{112}K_2^{\pm 1} &= K_2^{\pm 1}E_{112}. \end{aligned}$$

引理 2 可以应用 (2.3), (2.4), (3.1) 和 (3.2) 通过惯常的方法证明, 此处我们省略证明过程. 下面我们来证明本文的主要结论.

定理 1 集合 $S^{+c} \cup K \cup T \cup S^{-c}$ 是集合 U 的一个 Gröbner-Shirshov 基.

证明 显然集合 S^{+c} 的元素与集合 S^{-c} 的元素之间没有合成, 但是集合 S^{+c} 的元素与集合 $K \cup T$ 的元素之间以及集合 $K \cup T$ 的元素与集合 S^{-c} 的元素之间存在合成, 我们将证明集合 S^{+c} 的元素与集合 $K \cup T$ 的元素之间合成的平凡性, 另一半的证明是类似的. 此证明可以分为两步:

第一步 集合 S^{+c} 的元素与集合 K 的元素之间有以下合成:

$$\begin{aligned} (g_6, e_1)_{E_1 E_2 \sigma}, & \quad (g_6, e_3)_{E_{12} E_2 \sigma}, \quad (g_6, e_5)_{E_{112} E_2 \sigma}, \quad (g_6, e_7)_{E_1^3 \sigma}, \\ (g_8, e_5)_{E_{112} E_2 K_i^{\pm 1}}, & \quad (g_8, e_7)_{E_1^3 K_i^{\pm 1}}, \quad (g_8, e_1)_{E_1 E_2 K_i^{\pm 1}}, \quad (g_8, e_3)_{E_{12} E_2 K_i^{\pm 1}}, \end{aligned}$$

其中 $i \in \{1, 2\}$, 我们只证明 $(g_6, e_3)_{E_{12} E_2 \sigma}$ 和 $(g_8, e_5)_{E_{112} E_2 K_i^{\pm 1}}$ 对 $S^{+c} \cup K$ 的平凡性, 其余的可类似证得.

$$\begin{aligned} (g_6, e_3)_{E_{12} E_2 \sigma} &= E_{12} g_6 - e_3 \sigma \\ &= E_{12} E_2 \sigma - E_{12} \sigma E_2 - E_{12} E_2 \sigma + q^{-1} E_2 E_{12} \sigma \\ &= -E_{12} \sigma E_2 + q^{-1} E_2 E_{12} \sigma \\ &\equiv -\omega^{-1} \sigma E_{12} E_2 + q^{-1} \omega^{-1} E_2 \sigma E_{12} \pmod{(S^{+c} \cup K; E_{12} E_2 \sigma)} \\ &\equiv -q^{-1} \omega^{-1} \sigma E_2 E_{12} + q^{-1} \omega^{-1} \sigma E_2 E_{12} \pmod{(S^{+c} \cup K; E_{12} E_2 \sigma)} \\ &\equiv 0 \pmod{(S^{+c} \cup K; E_{12} E_2 \sigma)}. \end{aligned}$$

对于 $(g_8, e_5)_{E_{112} E_2 K_i^{\pm 1}}$, $i = 1$ 或 2 , 我们只证明 $i = 2$ 的情形, $i = 1$ 时证明类似.

$$\begin{aligned} (g_8, e_5)_{E_{112} E_2 K_2^{\pm 1}} &= E_{112} g_8 - e_5 K_2^{\pm 1} \\ &= E_{112} E_2 K_2^{\pm 1} - q^{\mp 2} E_{112} K_2^{\pm 1} E_2 - E_{112} E_2 K_2^{\pm 1} \\ &\quad - q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) E_{12}^2 K_2^{\pm 1} + E_2 E_{112} K_2^{\pm 1} \\ &= -q^{\mp 2} E_{112} K_2^{\pm 1} E_2 - q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) E_{12}^2 K_2^{\pm 1} + E_2 E_{112} K_2^{\pm 1} \\ &\equiv -q^{\mp 2} K_2^{\pm 1} E_{112} E_2 - q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) q^{\mp 2} K_2^{\pm 1} E_{12}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q^{\mp 2} K_2^{\pm 1} E_2 E_{112} \pmod{(S^{+c} \cup K; E_{112} E_2 K_2^{\pm 1})} \\
& \equiv -q^{\mp 2} K_2^{\pm 1} [E_2 E_{112} - q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) E_{12}^2] - q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) q^{\mp 2} K_2^{\pm 1} E_{12}^2 \\
& \quad + q^{\mp 2} K_2^{\pm 1} E_2 E_{112} \pmod{(S^{+c} \cup K; E_{112} E_2 K_2^{\pm 1})} \\
& \equiv 0 \pmod{(S^{+c} \cup K; E_{112} E_2 K_2^{\pm 1})}.
\end{aligned}$$

第二步 集合 S^{+c} 的元素和集合 T 的元素之间有以下 8 个合成:

$$\begin{aligned}
& (t_1, e_7)_{E_1^3 F_1}, \quad (t_2, e_7)_{E_1^3 F_2}, \quad (t_3, e_1)_{E_1 E_2 F_1}, \quad (t_3, e_3)_{E_{112} E_2 F_1}, \\
& (t_3, e_5)_{E_{112} E_2 F_1}, \quad (t_4, e_1)_{E_1 E_2 F_2}, \quad (t_4, e_3)_{E_{112} E_2 F_2}, \quad (t_4, e_5)_{E_{112} E_2 F_2}.
\end{aligned}$$

我们只证明 $(t_3, e_1)_{E_1 E_2 F_1}$ 和 $(t_4, e_5)_{E_{112} E_2 F_2}$ 对 $S^{+c} \cup T$ 的平凡性, 其余的证明类似.

$$\begin{aligned}
(t_3, e_1)_{E_1 E_2 F_1} &= E_1 t_3 - e_1 F_2 \\
&= -E_1 F_1 E_2 + E_{12} F_1 + q E_2 E_1 F_1 \\
&\equiv -(F_1 E_1 - K_1 \sigma + \sigma^{-1} K_1^{-1}) E_2 + F_1 E_{12} + q^{-1} (q^2 - 1) E_2 K_1 \sigma \\
&\quad + q E_2 E_1 F_1 \pmod{(S^{+c} \cup T; E_1 E_2 F_1)} \\
&\equiv -F_1 E_1 E_2 + \sigma K_1 E_2 - \sigma^{-1} K_1^{-1} E_2 + F_1 E_{12} + (q^2 - 1) \sigma K_1 E_2 \\
&\quad + q E_2 (F_1 E_1 - K_1 \sigma + \sigma^{-1} K_1^{-1}) \pmod{(S^{+c} \cup T; E_1 E_2 F_1)} \\
&\equiv -F_1 E_1 E_2 + F_1 E_{12} + q F_1 E_2 E_1 \pmod{(S^{+c} \cup T; E_1 E_2 F_1)} \\
&\equiv -F_1 e_1 \pmod{(S^{+c} \cup T; E_1 E_2 F_1)} \\
&\equiv 0 \pmod{(S^{+c} \cup T; E_1 E_2 F_1)}, \\
(t_4, e_5)_{E_{112} E_2 F_2} &= E_{112} t_4 - e_5 F_2 \\
&= -E_{112} F_2 E_2 + E_{112} K_2 - E_{112} K_2^{-1} - q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) E_{12}^2 F_2 \\
&\quad + E_2 E_{112} F_2 \\
&\equiv -[F_2 E_{112} + \omega^2 (q^2 - 1) (q^2 - \omega) q^{-2} K_2^{-1} E_1^2] E_2 + K_2 E_{112} \\
&\quad - K_2^{-1} E_{112} - q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) E_{12} [F_2 E_{12} - (q^2 - 1) E_1 K_2^{-1}] \\
&\quad + E_2 [F_2 E_{112} + \omega^2 (q^2 - 1) (q^2 - \omega) E_1^2 K_2^{-1}] \pmod{(S^{+c} \cup T; E_{112} E_2 F_2)} \\
&\equiv -F_2 E_{112} E_2 - \omega^2 (q^2 - 1) (q^2 - \omega) q^{-2} K_2^{-1} E_1^2 E_2 + K_2 E_{112} \\
&\quad - K_2^{-1} E_{112} - q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) E_{12} F_2 E_{12} \\
&\quad + q^{-1} \omega^2 (q^2 - 1) (q^2 - \omega) E_{12} E_1 K_2^{-1} + E_2 F_2 E_{112} \\
&\quad + \omega^2 (q^2 - 1) (q^2 - \omega) E_2 E_1^2 K_2^{-1} \pmod{(S^{+c} \cup T; E_{112} E_2 F_2)} \\
&\equiv -F_2 [E_2 E_{112} - q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) E_{12}^2] \\
&\quad - \omega^2 (q^2 - 1) (q^2 - \omega) q^{-2} K_2^{-1} E_1^2 E_2 + K_2 E_{112} - K_2^{-1} E_{112} \\
&\quad - q^{-1} \omega^2 (q^2 - \omega) (F_2 E_{12} - (q^2 - 1) q^{-1} K_2^{-1} E_1) E_{12} \\
&\quad + q^{-1} \omega^2 (q^2 - 1) (q^2 - \omega) K_2^{-1} E_{12} E_1 + (F_2 E_2 - K_2 + K_2^{-1}) E_{112} \\
&\quad + \omega^2 (q^2 - 1) (q^2 - \omega) K_2^{-1} E_2 E_1^2 \pmod{(S^{+c} \cup T; E_{112} E_2 F_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv -\omega^2(q^2-1)(q^2-\omega)q^{-2}K_2^{-1}E_1(E_{12}+qE_2E_1) \\
&\quad + q^{-1}\omega^2(q^2-1)(q^2-\omega)q^{-1}K_2^{-1}E_1E_{12} \\
&\quad + q^{-1}\omega^2(q^2-1)(q^2-\omega)K_2^{-1}E_{12}E_1 \\
&\quad + \omega^2(q^2-1)(q^2-\omega)K_2^{-1}E_2E_1^2 \pmod{(S^{+c} \cup T; E_{112}E_2F_2)} \\
&\equiv -\omega^2(q^2-1)(q^2-\omega)q^{-1}K_2^{-1}e_1E_1 \\
&\equiv 0 \pmod{(S^{+c} \cup T; E_{112}E_2F_2)}.
\end{aligned}$$

所以 $S^{+c} \cup K \cup T \cup S^{-c}$ 对合成封闭, 因此是代数 U 的一个 Gröbner-Shirshov 基. 证毕.

通过对合成的逐一检验我们得到:

定理 2 集合 $S^{+c} \cup K \cup T \cup S^{-c}$ 是代数 U 的一个极小 Gröbner-Shirshov 基.

通过合成引理和 U 的三角分解我们得到:

推论 以下形式的元素

$$E_2^{n(2)} E_{12}^{n(12)} E_{112}^{n(112)} E_1^{n(1)} \sigma^t K_2^{s_2} K_1^{s_1} F_2^{m(2)} F_{12}^{m(12)} F_{112}^{m(112)} F_1^{m(1)},$$

构成代数 U 的一个线性 $\mathbb{K}$ -基, 其中

$$n(112), m(112), n(2), m(2) \in \mathbb{Z}_+, n(1), m(1), n(12), m(12), t \in \{0, 1, 2\}, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}.$$

致谢 我们非常感谢审稿人的建议.

参考文献

- 1 Buchberger B. An algorithm for finding a basis for the residue class ring of a zero-dimensional ideal. PhD Thesis, University of Innsbruck, 1965
- 2 Bergman G M. The diamond lemma for ring theory. Adv Math, 1978, 29: 178–218
- 3 Shirshov A I. Some algorithmic problems for Lie algebras. Siberian Math J, 1962, 3: 292–296
- 4 Bokut L A. Imbeddings into simple associative algebras. Algebra Logic, 1976, 15: 117–142
- 5 Bokut L A, Malcolmson P. Gröbner-Shirshov basis for quantum enveloping algebras. Israel J Math, 1996, 96: 97–113
- 6 Yamane H. Representations of a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -quantum group. Publ Res Inst Math Sci, 2007, 43: 75–93

Gröbner-Shirshov basis of $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -quantum group

KONG JunShi & OBUL Abdukadir

Abstract By using the classical method to the generators and relations given by Yamane (2007), we give a Gröbner-Shirshov basis for $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -quantum groups.

Keywords: Gröbner-Shirshov basis, composition lemma, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ -quantum groups

MSC(2000): 16S15, 13P10, 17B37