多峰映射的 Collet-Eckmann 条件和向后 Collet-Eckmann 条件

献给张芷芬教授 90 华诞

王兰宇

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: lanyu@amss.ac.cn

收稿日期: 2016-07-01; 接受日期: 2016-08-05; 网络出版日期: 2016-09-22

国家自然科学基金 (批准号: 11371346) 资助项目

摘要 本文利用临界点的自然分划给出多峰映射的组合结构, 通过定义符号路径和分离时间, 引入弱的拓扑条件, 证明在该条件下, 一维多峰映射的 Collet-Eckmann (CE) 条件与向后 Collet-Eckmann (BCE) 条件是等价的.

关键词 多峰映射 Collet-Eckmann 条件 向后 Collet-Eckmann 条件

MSC (2010) 主题分类 37E05, 37D25

1 引言

在一维动力系统特别是有关非一致双曲问题的研究中, Collet-Eckmann (CE) 条件和向后 Collet-Eckmann (BCE) 条件起着非常重要的作用.

1983 年 Collet 和 Eckmann^[1] 首次引入了 Collet-Eckmann 条件和向后 Collet-Eckmann 条件并证明了满足上述条件的映射具有绝对连续的不变概率测度, 从而开启了利用临界点研究非双曲系统的先河. Collet-Eckmann 条件是针对临界点提出的, 揭示了临界点在非双曲动力系统研究中的关键作用. 正是基于这一点, Benedicks 和 Carleson^[2,3] 利用临界点的回复性质和排除法获得了参数空间著名的丰富性定理. 文献 [4–6] 利用 Collet-Eckmann 条件进一步改进和优化了丰富性定理.

许多学者还就 Collet-Eckmann 条件本身进行了深入研究. 对于单峰映射, Nowicki^[7,8] 证明了 Collet-Eckmann 条件蕴含向后 Collet-Eckmann 条件; Nowicki 和 Sands^[9] 进一步证明了这两个条件与其他非一致双曲条件的等价性; Nowicki 和 Przytycki^[10] 证明了单峰映射 Collet-Eckmann 条件的拓扑共轭不变性. Przytycki 等^[11] 还研究了有理映射并证明了与 Collet-Eckmann 条件相关的一些非一致双曲条件的等价性.

单峰 Collet-Eckmann 映射的结果有些可以推广到多峰映射, 但有些结果在多峰情形不成立. 不同于单峰映射, 存在反例说明系统含有多个临界点时, Collet-Eckmann 条件和向后 Collet-Eckmann 条件

英文引用格式: Wang L Y. Collet-Eckmann condition and backward Collet-Eckmann condition for multi-modal maps (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 199–204, doi: 10.1360/N012016-00132

不等价 (参见文献 [11]). 本文将利用临界点的自然分划, 定义不同点在迭代下的分离时间并引进一个弱的拓扑条件 (T), 从而给出本文的主要定理如下:

定理 1 (主要定理) 若多峰映射 f 满足拓扑条件 (T), 则 f 满足 Collet-Eckmann 条件当且仅当 f 满足向后 Collet-Eckmann 条件.

第 2 节给出基本定义和多峰映射的组合描述, 并明确阐述拓扑条件 (T)、Collet-Eckmann 条件和向后 Collet-Eckmann 条件; 第 3 和 4 节证明主要定理的必要性和充分性部分.

2 基本定义

设 $f: I \rightarrow I$ 是 C^3 映射, 其中 $I \subset \mathbb{R}$ 为闭区间. 不失一般性, 设 $I = [0, 1]$. 称 $c \in I$ 是 f 的临界点, 如果 $Df(c) = 0$. 记 $\mathcal{C}$ 为 f 的所有临界点组成的集合.

我们称 f 具有有限个 (q 个) 非平临界点, 如果 f 的临界点 $0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_q < 1$, $c_i \in \mathcal{C}$, 并且存在 $L_i > 1$, $l_i > 1$ 以及 c_i 的邻域 $V(c_i)$ 使得

$$\frac{|x - c_i|^{l_i-1}}{L_i} \leq |Df(x)| \leq L_i |x - c_i|^{l_i-1} \quad (2.1)$$

对于任何 $x \in V(c_i)$ 和 $1 \leq i \leq q$ 都成立.

f 具有负 Schwarz 导数, 如果对于任意的 $x \in (0, 1) \setminus \mathcal{C}$, 都有

$$S(f)(x) = \frac{D^3 f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2 f(x)}{Df(x)} \right)^2 < 0.$$

利用交比和 Kozlovski [12] 的结果可以去掉负 Schwarz 导数和 C^3 光滑性条件, 本文结论对于非平的 C^2 映射仍然成立. 为了叙述简洁, 以下将研究区间 I 上具有负 Schwarz 导数和有限个非平临界点的 C^3 映射的动力行为. 记全体这样的映射组成的集合为 $\mathcal{S}$.

我们记 $c_i^n = f^n(c_i)$, $i = 1, 2, \dots, q$, 有时省略标号 i , c 表示某个任意或相关的临界点.

2.1 自然分划

本节介绍多峰映射的组合结构. Milnor 和 Thurston [13] 研究了单峰映射的符号动力学, 引入了 Kneading 不变量; 其后, 文献 [14–16] 进一步分析 Kneading 不变量, 提出了 Kneading 映射的概念; Sands [17] 在他的论文中系统阐述并完善了单峰映射的上述研究. Luzzatto 和 Wang [6] 利用临界点的自然分划, 通过定义分离时间和跟踪时间推广了 Kneading 映射并给出了多峰映射完整的符号动力学描述. 有关单峰映射的组合结构参见文献 [14–17], 下文叙述的多峰映射的相关结果参见文献 [6].

f 的临界点 $\{c_1, \dots, c_q\}$ 定义了 $I = [0, 1]$ 的含有 $q+1$ 个区间的自然分划 $\mathcal{P}$: $\mathcal{I} = \{I_0, \dots, I_q\}$. 除去临界点的原像集, 区间中的每个点都存在一个符号路径: $\underline{a}(x) = a_0 a_1 a_2 \cdots$, 当 $f^i(x) \in I_k$ ($i \geq 0$) 时, $a_i = k$. 方便起见, 安排每个临界点两个符号路径, 它们除第一项外完全相同, 于是, 我们可以认为分划区间是闭区间并且每个临界点都属于相邻的两个区间.

2.2 分离时间

为深入讨论符号路径, 只需 $\underline{a}(x)$ 和 $\underline{a}(y)$ 有意义, 定义两个点的分离时间:

$$s(x, y) = \min\{k \geq 0 : a_k(x) \neq a_k(y)\}.$$

若 $y = c$ 为临界点而 x 属于相邻的分划元素, 我们考虑 c 的使得 $s(x, y) = s(x, c) \geq 1$ 的符号路径. 特别地, 定义 x 与临界集 $\mathcal{C}$ 的分离时间为

$$s(x) = s(x, \mathcal{C}) = \max\{s(x, c) : c \in \mathcal{C}\}.$$

当 $d(x, \mathcal{C}) \rightarrow 0$ 时, $s(x) \rightarrow +\infty$. 分离时间 $s(x, y)$ 反映了不同点 x 和 y 在迭代的作用下与分划元素之间的位置关系, 而 $s(x)$ 则反映了点 x 与和它最接近的临界点在迭代下的位置关系. 由符号路径与分离时间的定义立得下面的引理:

引理 1 当 $0 \leq i < s(x, y)$ 时, 区间 $f^i((x, y))$ 不包含临界点, 而 $f^{s(x, y)}((x, y))$ 至少包含一个临界点.

2.3 Collet-Eckmann 条件、向后 Collet-Eckmann 条件和拓扑条件 (T)

下面阐述本文用到的几个重要条件.

如果对任意的临界点 $c \in \mathcal{C}$, 都有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s(c^n)}{n} = 0$, 那么称 f 满足条件 (T).

显然, (T) 是拓扑条件, 它反映了临界点在迭代下与临界集的接近程度, 与 Tsujii [5] 的正规条件有密切的联系. 另外, (T) 蕴含系统没有吸引周期轨.

我们称 f 满足 Collet-Eckmann (简称 CE) 条件, 如果存在 $K > 0, \lambda > 0$ 使得对任意的临界点 $c \in \mathcal{C}$, 都有

$$|Df^n(f(c))| \geq Ke^{\lambda n}, \quad \forall n \geq 1. \quad (2.2)$$

称 f 满足向后 Collet-Eckmann (简称 BCE) 条件, 如果存在 $K > 0, \lambda > 0$ 使得对任意的临界点的原像点 $c^{-n}, f^n(c^{-n}) = c$, 都有

$$|Df^n(c^{-n})| \geq Ke^{\lambda n}, \quad \forall n \geq 1. \quad (2.3)$$

3 (T) + CE 蕴含 BCE

我们将证明主要定理的必要性部分. 首先给出有关分离时间与临界值位置的引理:

引理 2 设 $f \in \mathcal{S}$ 满足条件 (T). 存在常数 $\xi > 0$ 使得对于任意的临界点 $c \in \mathcal{C}$ 和 $j \geq 1$, 都有

$$d(c^j) \geq e^{-\xi s(c^j)}. \quad (3.1)$$

文献 [6] 利用引进的拓扑慢返回条件证明了上述引理, 但证明过程本质上仅依赖于条件 (T), 引理证明参见文献 [6], 从略.

设 J 是以 a 和 b 为端点的闭或开区间, 我们用 $|J| = |[a, b]|$ 表示区间的长度, 即 $|J| = |b - a|$.

若 f 满足 CE 条件, Nowicki 和 Przytycki [10] 证明了下面的引理:

引理 3 若 f 满足 CE 条件, 则存在常数 $C, \bar{\xi} > 0$ 使得对于所有满足 $f^i|_J$ 单调的区间 J 和整数 $i \geq 1$ 都有 $|J| \leq Ce^{-i\bar{\xi}}$.

在估计导数的指数增长过程中, 我们还将用到负 Schwarz 导数的重要性质 [18]:

定理 2 (极小值原理) 设 $f \in \mathcal{S}$, $[a, b]$ 为 I 的子区间. 如果 $i \geq 1, f^i|_{[a, b]}$ 是微分同胚, 则对于任意的 $x \in (a, b)$, 有

$$|Df^i(x)| \geq \min\{Df^i(a), Df^i(b)\}.$$

进一步,

$$|Df^i(x)| \geq \min \left\{ \frac{|f^i(b) - f^i(x)|}{|b - x|}, \frac{|f^i(x) - f^i(a)|}{|x - a|} \right\}.$$

定理 1 必要性的证明 设 f 满足 Collet-Eckmann 条件和条件 (T), c^{-n} 是 f 的某个临界点的 n 阶原像点, 我们将证明存在 $K > 0$ 和 $\lambda > 0$ 使得

$$|Df^n(c^{-n})| \geq Ke^{\lambda n}.$$

设 $[a, b]$ 是包含 c^{-n} 并使得 $f^n|_{[a, b]}$ 单调的最大区间. 由于 $Df^n(c^{-n}) \neq 0$, 因此, $[a, b]$ 的端点 a 和 b 只能是 I 的端点 $0, 1$ 或临界点的小于 n 阶的原像点. a 和 b 取 $0, 1$ 是平凡情形, 不影响我们的讨论. 为简便起见, 以下不妨设 a 和 b 都是阶数小于 n 的临界点的原像点 ($Df^n(a) = Df^n(b) = 0$), 即存在 $0 \leq m < n$ 和临界点 c_j 使得 $f^m(a) = c_j$. 由于 $f^n([a, c^{-n}]) = [c_j^{n-m}, c]$, 我们将证明存在 $K > 0$ 和 $\lambda > 0$ 使得 $||[c_j^{n-m}, c]| \geq Ke^{\lambda n}||[a, c^{-n}]|$.

首先取 ϵ 充分小使得 $\epsilon\xi < \bar{\xi}/2$. 其次利用条件 (T) 选取 N_0 充分大使得 $s(c^n) \leq \epsilon n$ 对任意的 $c \in \mathcal{C}$ 和 $n > N_0$ 都成立. 最后令 $C_1 = \min_{1 \leq m \leq N_0} \{d(c_i^m, \mathcal{C}) : 1 \leq i \leq q\}$, 取 $K = C_1/C$, $\lambda = \bar{\xi}/2$.

当 $n - m \leq N_0$ 时, 我们得到 $||[c_j^{n-m}, c]| \geq d(c_j^{n-m}, \mathcal{C}) \geq C_1$; 当 $n - m > N_0$ 时, 由 f 满足 (T) 和引理 2, 有

$$|[c_j^{n-m}, c]| \geq d(c_j^{n-m}, \mathcal{C}) \geq e^{-\xi s(c_j^{n-m})}.$$

另一方面, f 满足 Collet-Eckmann 条件, 利用引理 3, 有 $||[a, c^{-n}]| \leq Ce^{-\bar{\xi}n}$. 于是得到

$$\frac{|f^n([a, c^{-n}])|}{|[a, c^{-n}]|} \geq \frac{\min\{C_1, e^{-\xi s(c_j^{n-m})}\}}{Ce^{-\bar{\xi}n}} \geq Ke^{\bar{\xi}n - \epsilon\xi(n-m)} \geq Ke^{\lambda n}.$$

同理可证

$$\frac{|f^n([b, c^{-n}])|}{|[b, c^{-n}]|} \geq Ke^{\lambda n}.$$

应用极小值原理, 可得

$$|Df^n(c^{-n})| \geq \min \left\{ \frac{|f^n(b) - f^n(c^{-n})|}{|b - c^{-n}|}, \frac{|f^n(c^{-n}) - f^n(a)|}{|c^{-n} - a|} \right\} \geq Ke^{\lambda n},$$

从而 f 满足向后 Collet-Eckmann 条件. □

4 (T) + BCE 蕴含 CE

为了证明主要定理的充分性部分, 我们引入点 x 的 (临界点的) 近原像点.

设 $x \in I$, c^{-n} 是临界点 c 的 n 阶原像点, 即 $f^n(c^{-n}) = c$, 这里 c 表示某个临界点. 如果对于任意的 $0 \leq m \leq n$, 在 (x, c^{-n}) 中都不含有临界点的 m 阶原像点, 则称 c^{-n} 为 x 的 (临界点的) n 阶近原像点.

显然, 任何点 x 都有无数个近原像点 (越靠近 x , 近原像点的阶数越高), 这是因为没有吸引周期轨和游荡区间的多峰映射, 任何区间在迭代作用下都会包含临界点. 寻找近原像点非常容易, 只需将考虑的区间进行迭代, 例如, 要在定义中的区间 (x, c^{-n}) 寻找新的近原像点, 只要继续迭代 $f^n(x, c^{-n}) = (f^n(x), c)$, 直到包含新的临界点即可.

Collet-Eckmann 条件需要我们研究临界值 c^1 附近的迭代行为, 从而获得临界值 c^1 处的正指数. 设 c^1 两侧的近原像点依阶数从小到大排列分别为 $\{c_{p_1}^{-n_1^+}, c_{p_2}^{-n_2^+}, \dots\}$ 和 $\{c_{q_1}^{-n_1^-}, c_{q_2}^{-n_2^-}, \dots\}$, 这里 $c_{p_1}, c_{p_2}, \dots$ 和 $c_{q_1}, c_{q_2}, \dots$ 指相应的临界点.

首先证明近原像点阶数与分离时间关系的引理.

引理 4 $n_{i+1}^{\pm} - n_i^{\pm} = s(c^{n_i^{\pm}+1}), \forall i \geq 1$.

证明 由于 $c_{p_i}^{-n_i^+}$ 和 $c_{p_{i+1}}^{-n_{i+1}^+}$ 是 c^1 一侧的两个相邻的近原像点, $c_{p_{i+1}}^{-n_{i+1}^+} \in (c_{p_i}^{-n_i^+}, c^1)$, 而且

$$f^{n_i^+}((c_{p_i}^{-n_i^+}, c^1)) = (c_{p_i}, c^{n_i^++1}),$$

因此,

$$s(c^{n_i^++1}) = \min\{j : f^j((c_{p_i}, c^{n_i^++1})) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset\} = n_{i+1}^+ - n_i^+.$$

同理可证 $n_{i+1}^- - n_i^- = s(c^{n_i^-+1})$. □

定理 1 充分性的证明 f 满足 BCE, 存在 $K_1 > 0$ 和 $\lambda_1 > 0$ 使得对任意的临界点的 m 阶原像点 c^{-m} , 都有 $|Df^m(c^{-m})| \geq K_1 e^{\lambda_1 m}$. 我们将证明存在 $K > 0$ 和 $\lambda > 0$, 对于任意的临界点 c 和 $n > 0$, 都有 $|Df^n(f(c))| \geq K e^{\lambda n}$. 首先证明对于任意 $i \geq 1$, 有

$$|Df^{n_i^+}(c^1)| \geq K e^{\lambda n_i^+}.$$

选取 n_j^- 使得 $n_{j-1}^- \leq n_i^+ < n_j^-$, 由近原像点的定义, $c^1 \in (c_{p_i}^{-n_i^+}, c_{q_j}^{-n_j^-})$, $f^{n_i^+}([c_{p_i}^{-n_i^+}, c_{q_j}^{-n_j^-}]) = [c_{p_i}, c_{q_j}^{-n_j^-+n_i^+}]$ 是微分同胚. 应用 BCE 条件, 立得

$$|Df^{n_i^+}(c_{p_i}^{-n_i^+})| \geq K_1 e^{\lambda_1 n_i^+}, \quad |Df^{n_j^-}(c_{q_j}^{-n_j^-})| \geq K_1 e^{\lambda_1 n_j^-}.$$

令 $D_1 = \max_{x \in I} |Df(x)| > 1$. 取 $\epsilon_1 > 0$ 充分小使得 $e^{\frac{\lambda_1}{2}} D_1^{-\epsilon_1} > 1$, 进一步利用条件 (T) 选取 $N_1 > 0$ 使得当 $s(c^n) > N_1$ 时, $s(c^n) < \epsilon_1 n$ 对所有的临界点都成立. 由链式法则,

$$|Df^{n_j^-}(c_{q_j}^{-n_j^-})| = |Df^{n_i^+}(c_{q_j}^{-n_j^-})| |Df^{n_j^- - n_i^+}(c_{q_j}^{-n_j^-+n_i^+})|.$$

因此, $|Df^{n_i^+}(c_{q_j}^{-n_j^-})| \geq K_1 e^{\lambda_1 n_j^-} D_1^{-n_j^-+n_i^+}$. 应用引理 4, $s(c^{n_j^-+1}) = n_j^- - n_{j-1}^- \geq n_j^- - n_i^+$, 得到 $D_1^{-n_j^-+n_i^+} \geq D_1^{-s(c^{n_j^-+1})}$, 于是,

$$|Df^{n_i^+}(c_{q_j}^{-n_j^-})| \geq K_1 e^{\lambda_1 n_j^-} D_1^{-s(c^{n_j^-+1})}.$$

当 $s(c^{n_j^-+1}) > N_1$ 时, 令 $K = K_1$, $\lambda = \lambda_1/2$, 我们有

$$|Df^{n_i^+}(c_{q_j}^{-n_j^-})| \geq K_1 e^{\lambda_1 n_j^-} D_1^{-\epsilon_1(n_j^-+1)} > K_1 e^{\lambda_1 n_j^-} D_1^{-\epsilon_1 n_j^-} \geq K_1 e^{\frac{\lambda_1}{2} n_j^-} \geq K e^{n_i^+ \lambda}.$$

当 $s(c^{n_j^-+1}) \leq N_1$ 时, 令 $K = K_1 D_1^{-N_1}$, $\lambda = \lambda_1$, 同样得到 $|Df^{n_i^+}(c_{q_j}^{-n_j^-})| \geq K e^{n_i^+ \lambda}$. 应用极小值原理,

$$|Df^{n_i^+}(c^1)| \geq \min\{|Df^{n_i^+}(c_{p_i}^{-n_i^+})|, |Df^{n_i^+}(c_{q_j}^{-n_j^-})|\} \geq K e^{\lambda n_i^+}.$$

最后对于任意的 $n > 0$, 选取 n_k^+ 使得 $n_{k-1}^+ \leq n < n_k^+$, 因为 $|Df^{n_k^+}(c^1)| \geq K e^{\lambda n_k^+}$, 再次利用条件 (T) 和前述证明中的方法, 重新适当选取 K 和 λ , 就得到 $|Df^n(f(c))| \geq K e^{\lambda n}$, 从而 f 满足 CE 条件. □

致谢 审稿人提出了细致的评审意见与进一步建议, 特此感谢.

参考文献

- 1 Collet P, Eckmann J P. Positive Lyapunov exponent and absolute continuity for maps of the interval. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1983, 3: 13–46
- 2 Benedicks M, Carleson L. On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$. *Ann of Math (2)*, 1985, 122: 1–25
- 3 Benedicks M, Carleson L. The dynamics of the Henon map. *Ann of Math (2)*, 1991, 133: 73–169
- 4 Thieullen P, Tresser C, Young L S. Positive Lyapunov exponents for generic one-parameter families of unimodal maps. *J Anal Math*, 1994, 64: 121–172
- 5 Tsujii M. Positive Lyapunov exponents in families of one dimensional dynamical systems. *Invent Math*, 1993, 111: 113–137
- 6 Luzzatto S, Wang L Y. Topological invariance of generic non-uniformly expanding multimodal maps. *Math Res Lett*, 2006, 13: 343–357
- 7 Nowicki T. Symmetric S -unimodal mappings and positive Lyapunov exponents. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1985, 5: 611–616
- 8 Nowicki T. A positive Lyapunov exponent for the critical value of an S -unimodal map implies uniform hyperbolicity. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1988, 8: 425–435
- 9 Nowicki T, Sands D. Nonuniformly hyperbolicity and universal bounds for S -unimodal maps. *Invent Math*, 1998, 132: 633–680
- 10 Nowicki T, Przytycki F. Topological invariance of the Collet-Eckmann property for S -unimodal maps. *Fund Math*, 1998, 155: 33–43
- 11 Przytycki F, Rivera-Letelier J, Smirnov S. Equivalence and topological invariance of conditions for non-uniform hyperbolicity in the iteration of rational maps. *Invent Math*, 2003, 151: 29–63
- 12 Kozlovski O. Getting rid of the negative Schwarzian derivative condition. *Ann of Math (2)*, 2000, 152: 743–762
- 13 Milnor J, Thurston W. On iterated maps of the interval. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1342. New York: Springer-Verlag, 1988, 465–563
- 14 Hofbauer F. The topological entropy of the transformation $x \mapsto ax(1 - x)$. *Monatsh Math*, 1980, 90: 117–141
- 15 Hofbauer F, Keller G. Quadratic maps without asymptotic measure. *Comm Math Phys*, 1990, 127: 319–337
- 16 Bruin H. Combinatorics of the Kneading map. *Internat J Bifur Chaos*, 1995, 5: 1339–1349
- 17 Sands D. Topological conditions for positive Lyapunov exponents in unimodal maps. PhD Thesis. Cambridge: University of Cambridge, 1993
- 18 de Melo W, van Strien S. *One Dimensional Dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1993

Collet-Eckmann condition and backward Collet-Eckmann condition for multi-modal maps

WANG LanYu

Abstract In this paper, by using the natural partition generated by the critical points, we describe the combinatorial structure for multi-modal maps. Defining the symbolic itinerary and separating time, we introduce a weak topological condition, and prove that Collet-Eckmann condition and backward Collet-Eckmann condition are equivalent for multi-modal maps assuming the topological condition.

Keywords multi-modal map, Collet-Eckmann condition, backward Collet-Eckmann condition

MSC(2010) 37E05, 37D25

doi: 10.1360/N012016-00132