Gauss 过程的增量与轨道性质

林正炎 张立新

(浙江大学西溪校区数学与信息科学系, 杭州 310028)

摘要 介绍 Gauss 过程的增量理论和样本轨道性质这一研究领域的最新成果, 其中大部分是我们的结果.

关键词 Gauss 过程 轨道性质 连续模 增量

1 引言

设 $\{W(t); t \geq 0\}$ 为一 Wiener 过程, 下述重对数律和 Chung 重对数律是我们所熟知的:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{|W(T)|}{\sqrt{2T \log \log T}} = 1 \quad \text{a. s.},$$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{8 \log \log T}{\pi^2 T} \right|^{1/2} \sup_{0 \leq t \leq T} |W(t)| = 1 \quad \text{a. s.},$$

增量理论就是这些结果的进一步推广. 对过程 $\{X(t); t \geq 0\}$, 考察增量 $X(t+s) - X(t)$, 研究当 s 和 t 在一定的范围内变化时, $X(t+s) - X(t)$ 的变化情况(即其振动性质), 它刻画了过程 $\{X(t); t \geq 0\}$ 的轨道性质.

2 过程增量的上极限

2.1 Wiener 过程 $\{W(t); t \geq 0\}$

2.1.1 连续模 $(s \rightarrow 0)$ ($L \cdot v^{[1]}$)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T-h} \sup_{0 \leq s \leq h} \frac{|W(t+s) - W(t)|}{\sqrt{2h \log h^{-1}}} = 1 \quad \text{a. s.} \quad (2.1)$$

2.1.2 大增量 $(s \rightarrow \infty)$

$CsL_{rg} \cdot R \cdot v \cdot sz$ 型增量. 对不减的 $a_t, 0 < a_t \leq t$,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T-a_T} \sup_{0 \leq s \leq a_T} \left| \frac{|W(t+s) - W(t)|}{2a_T \left| \log \frac{T}{a_T} + \log \log T \right|} \right|^{1/2} = 1 \quad \text{a. s.} \quad (2.2)$$

($CsL_{rg} \cdot$ 和 $R \cdot v \cdot sz^{[2]}$ 得到这一结论时, 还需加“ T/a_T ”不减这一条件, 后来林正炎、邵启满减除了这一条件^[3]). 当 a_T 满足 $\lim_{T \rightarrow \infty} (\log T/a_T)/\log \log T = \infty$ 时, “ $\limsup$ ”可改为“ $\lim$ ”. 当 a_T 更大时, 正则化因子需改变, 且上、下极限可能不等(下极限较上极限复杂, 下面将讨论).

滞后型增量. 滞后型增量是 Hanson 和 Russo^[4] 提出并开始研究的, 目前最好的结果是陈桂景、孔繁超和林正炎^[5] 得到的

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{|W(T) - W(T-t)|}{2t \left| \log \frac{T}{t} + \log \log t \right|} \right|^{1/2} = 1 \quad \text{a. s.},$$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{t \leq s \leq T} \left| \frac{|W(s) - W(s-t)|}{2t \left| \log \frac{T}{t} + \log \log t \right|} \right|^{1/2} = 1 \quad \text{a. s.} \quad (2.3)$$

邵启满^[3]综合上述2种类型,给出了一般形式的增量结果.

上述类型的结果可推广到多参数情形,但论证更复杂,对两参数 Wiener 过程, $CsL_{rg}^\bullet$ 和 $R \bullet v \bullet sz$ ^[2]证明了如下的结果:

$$\limsup_T \sup_{R \in L_T} |W(R)| \left/ \left| 2a_T \left| \log \frac{T}{a_T} + \log \left| 1 + \log \frac{b_T}{\sqrt{a_T}} \right| + \log \log T \right| \right|^{1/2} = 1 \quad \text{a. s.}, \quad (2.4)$$

其中 $L_T = \{R \subset D_T, \lambda(R) \leq a_T\}$, $D_T = \{(x, y); xy \leq T, 0 \leq x, y \leq b_T\}$, b_T 是非降函数, R 表示平面矩形. 当 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log |T/a_T| + \log |1 + \log |b_T/\sqrt{a_T}||}{\log \log T} = \infty$ 时, “lim sup”可改为“lim”. 陆传荣^[6,7]讨论了其滞后型增量. 林正炎和陆传荣^[8]研究了增量的一般形式.

Ortega^[9]将 $CsL_{rg}^\bullet - R \bullet v \bullet sz$ 增量推广到分数 Wiener 过程, 陆传荣^[10]、洪圣岩^[11]等做了进一步的推广.

2.2 特殊的或较一般的 Gauss 过程

除了分数 Wiener 过程外,讨论得最多的 Gauss 过程是 Ornstein-Uhlenbeck (O-U) 过程,即零均值 Gauss 过程 $\{X(t); t \geq 0\}$, 其协方差函数为

$$EX(t)X(s) = \frac{\lambda}{\lambda} e^{-\lambda|t-s|}. \quad (2.5)$$

这是一个平稳、平稳增量过程,它有重要的实际背景,是一类随机微分方程

$$dX(t) = -\lambda X(t)dt + (2\lambda)^{1/2}dW(t) \quad (2.6)$$

的解. 80年代末,对无穷维的 Ornstein-Uhlenbeck 过程 $\{X_k(t); t \geq 0\}_{k=1}^\infty$, Iscoe 等人^[12], Marcus^[13], Fernique^[14]和 Schmuland^[15]等先后解决了它的 l^2 a. s. 连续问题,也就是从那时开始,林正炎, $CsL_{rg}^\bullet$ 继而有邵启满等人^[16~22]系统地研究了它的增量问题(开始时主要集中于建立连续模结果),在此基础上(有时是同时的)又把绝大部分结果推广到较一般的具有平稳增量的 Gauss 过程上,而且还讨论了某些 Gauss 过程的大增量问题. 以下列出的是最近的结果.

设 $\{Y(t); t \geq 0\} = \{X_k(t); t \geq 0\}_{k=1}^\infty$ 是一列独立的 Gauss 过程, $EX_k(t) = 0$, $\sigma_k^2(h) = E(X_k(t+h) - X_k(t))^2$. 假定 $\sigma_k^2(h)$ 是不减的. 记

$$\begin{aligned} \sigma(p, h) &= \left| \sum_{k=1}^\infty \sigma_k^2(h) \right|^{1/p}, \quad p \geq 1, \quad \sigma^*(h) = \max_{k \geq 1} \sigma_k(h), \\ \sigma(p, h) &= \begin{cases} \left| \frac{2p}{2-p}, h \right|, & 1 \leq p < 2, \\ \sigma^*(h), & 2 \leq p < \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$CsL_{rg}^\bullet$ 和 Shao^[23]得到了下述关于 l^p 值 ($1 \leq p < \infty$) Gauss 过程的连续模和大增量的结果.

定理 2.1 假设对某 $\alpha > 0$, 在 $(0, 1)$ 上 $\sigma(p, h)/h^\alpha$ 和 $\sigma(p, h)/h^\alpha$ 是拟增的, 且

$$\sigma(p, h) = o(\sigma(p, h) (\log h^{-1})^{1/2}), \quad h \rightarrow 0, \quad (*)$$

对任意的 k 和充分大的 j ,

$$E(X_k(h) - X_k(0))(X_k(jh) - X_k((j-1)h)) \leq 0. \quad (**)$$

则

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1} \sup_{0 \leq s \leq h} \frac{\|Y(t+s) - Y(t)\|_{l^p}}{\sigma(p, h) (2 \log h^{-1})^{1/2}} = 1 \quad \text{a. s.} \quad (2.8)$$

假设 $a_t > 0$ ($t > 0$) 连续, 上述拟增性在 $(0, \sup_{t>0} a_t)$ 上成立, 且

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left| \log \frac{T}{a_T} \right| / \log \log T = \infty,$$

式(*) 换做

$$\sigma(p, a_T) = o \left(\left| \sigma(p, a_T) \right| \left| \log \frac{T}{a_T} \right|^{1/2} \right), \quad T \rightarrow \infty, \quad (*')$$

则

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{0 \leq s \leq a_T} \frac{\|Y(t+s) - Y(t)\|_p}{\left| \sigma(p, a_T) \right| \left| 2 \log \frac{T}{a_T} \right|^{1/2}} = 1 \quad \text{a. s.} \quad (2.9)$$

由上述定理可见, 正则化因子中有 $\sigma(p, h)$, 说明正则化因子与 p 有关, 当 $p \geq 2$ 时, 正则化因子只与其中的主项有关.

定理 2.2 如果上面定理中的式(*) (或(*')) 改为

$$\sigma(p, h) (\log h^{-1})^{1/2} = o(\sigma(p, h)) \quad \left| \text{或: } \left| \sigma(p, a_T) \right| \left| \log \frac{T}{a_T} \right|^{1/2} = o(\sigma(p, a_T)) \right|,$$

这时不必假设式(**), 有

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1} \sup_{0 \leq s \leq h} \frac{\|Y(t+s) - Y(t)\|_p}{\delta_p \sigma(p, h)} = 1 \quad \text{a. s.} \\ \left| \text{或} \limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{0 \leq s \leq a_T} \frac{\|Y(t+s) - Y(t)\|_p}{\delta_p \sigma(p, a_T)} = 1 \quad \text{a. s.} \right|, \quad (2.10)$$

其中 $\delta_p = E|N(0, 1)|^p$.

由此可见, 在不同条件下, 正则化因子很不相同.

如果只需得到上界, 即“ $\leq$ ”成立, 则上述结论对更一般的过程(可以不是 Gauss 的, 还可取值于某一可分 Banach 空间) 也成立.

当 $p = \infty$ 时, 情况有很大不同. 记 y_h 是下列方程的解

$$\sum_{k=1}^{\infty} (hy_k)^{\sigma^*(h)/\sigma_k^2(h)} = h.$$

定理 2.3 如果存在正数 A 和 h_0 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^A(h_0) < \infty,$$

且对任意的 $k = 1, 2, \dots$ 和 $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ 有

$$E(X_k(t_2) - X_k(t_1))(X_k(t_4) - X_k(t_3)) \leq 0,$$

则

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1} \sup_{0 \leq s \leq h} \sup_{k \geq 1} \frac{|X_k(t+s) - X_k(t)|}{\sigma^*(h) (2 \log(hy_n))^{1/2}} = 1 \quad \text{a. s.} \quad (2.11)$$

(参见文献[24]).

作为上述结果的推论, 可以给出无穷维分数 Wiener 过程的连续模和大增量性质以及无穷维 Ornstein-Uhlenbeck 过程的连续模(都是在 l^p , $1 \leq p \leq \infty$ 意义下). 然而, 对后者而言, $\sigma(p,$

$h)$ 和 $\sigma(p, h)$ 都是有界的, 所以, 在大增量(此时 $a_T \rightarrow \infty$) 时的拟增性(在 $(0, \infty)$ 上) 不满足, 它的大增量如何呢? 较一般的结果是由林正炎建立的:

定理 2.4^[25] 设 $a_T > 0$ 是 T 的连续拟增函数, 当 $T \rightarrow \infty$ 时 $a_T \rightarrow \infty$, 且

$$\sigma(p, T) \rightarrow \sigma_p < \infty, \quad \sigma(p, T) = o((\log T/a_T)^{1/2}),$$

$$\int_1^\infty \sigma(p, 2^{-x}) dx < \infty, \quad \int_1^\infty \sigma(p, 2^{-x})/x dx < \infty.$$

又假设存在 $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ 和正整数 m , 使得

$$a_T \leq T \left| 2^{-\frac{m}{2(\log \dots \log T)^{1/2+\delta}}} \right|^{-1}, \quad (2.12)$$

则

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{0 \leq s \leq a_T} \frac{\|Y(t+s) - Y(t)\|_{\ell^p}}{\sigma_p \left| 2 \log \frac{T}{a_T} \right|^{1/2}} = 1 \quad \text{a. s.} \quad (2.13)$$

作为推论可以给出无穷维分数 O-U 过程的大增量结果.

注 1 当 $m=1$ 时, $a_T \leq T^{1-(\log T)^{-\frac{1}{2}+\delta}}$. 只要 m 足够大, 就可使 a_T 充分接近于 T .

注 2 对 $p=\infty$ 的情形, 林正炎等人^[26] 给出了一个类似于定理 2.3 的结果.

除了将 $Y(t) = \{X_k(t)\}_{k=1}^\infty$ 放在 ℓ^p 空间中去考察外, 我们还研究了由这个无穷维过程产生的无穷级数

$$X(t) = \sum_{k=1}^\infty X_k(t)$$

和 x^2 过程

$$x^2(t) = \sum_{k=1}^\infty X_k^2(t)$$

的连续模和大增量. 对 $\{X(t); t \geq 0\}$, 如果 $\sigma^2(h) = E(X(t+h) - X(t))^2$ 是一个具有正指数的、在零点正则变化的函数, 而且它的增量是非正相关的, 就有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1} \sup_{0 \leq s \leq h} \frac{|X(t+s) - X(t)|}{\sigma(h)(2 \log h^{-1})^{1/2}} = 1 \quad \text{a. s.}$$

(参见文献[27]). 林正炎^[28] 研究了 $\{X(t)\}$ 的大增量, 陆传荣等^[29] 给出了它的局部连续模.

对于 $\{x^2(t); t \geq 0\}$, 假设参数 $(\gamma_k, \lambda_k)_{k=1}^\infty$ 满足 $\sum_{k=1}^\infty \gamma_k/\lambda_k < \infty$, $\sum_{k=1}^\infty \gamma_k^2/\lambda_k < \infty$, 则对连续函数 $T_h \uparrow \infty (h \rightarrow 0)$, 如果它满足 $(\log T_h)/\log h^{-1} \rightarrow \infty (h \rightarrow 0)$, 就有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{|t| \leq T_h} \sup_{0 \leq s \leq T_h} \frac{|x^2(t+s) - x^2(t)|}{(8hM)^{1/2} \log(T_h/h)} = 1 \quad \text{a. s.},$$

其中 $M = \max_{k \geq 1} \gamma_k^2/\lambda_k$ (参见文献[18, 19]), 林正炎^[30] 研究了 x^2 过程的大增量. 由于它已不再是 Gauss 过程了, 所以论证方法上有很大的差异.

上述各种结论论证的关键都在于建立相关的大偏差概率不等式: 对大的 x ($\sigma(h) = o(x)$)

$$P \left| \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{0 \leq s \leq h} \| Y(t+s) - Y(t) \|_{l^p} \geq x \right| = C(T, h) e^{-x^\beta}.$$

CsLrg[•]、林正炎、邵启满等^[31~37]还讨论了多参数 Gauss 过程的连续模与大增量性质.

3 过程增量的下极限

3.1 Wiener 过程

3.1.1 不可微模和增量有多小^[2]

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{0 \leq t \leq T-h} \sup_{0 \leq s \leq h} \left| \frac{8 \log h^{-1}}{\pi^2 h} \right|^{1/2} |W(t+s) - W(t)| = 1 \quad \text{a.s.},$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{0 \leq t \leq T-a_T} \sup_{0 \leq s \leq a_T} \left| \frac{8 \left| \log \frac{T}{a_T} + \log \log T \right|}{\pi^2 a_T} \right|^{1/2} |W(t+s) - W(t)| = 1 \quad \text{a.s.} \quad (3.1)$$

张立新^{[38] 1)}将上述结果推广到 (r, p) -容度意义下并研究了在 (r, p) -容度意义下 Strassen 重对数律的收敛速度.

对于两参数 Wiener 过程有下述 Chung 重对数律(Talagrand^[39]):

$$0 < \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{(\log \log T)^{1/2}}{T(\log \log \log T)^{3/2}} \sup_{0 \leq x, y \leq T} |W(x, y)| < \infty \quad \text{a.s.} \quad (3.2)$$

3.1.2 CR型增量的下极限 当2.1.2中条件 $\lim_{T \rightarrow \infty} \left| \log \frac{T}{a_T} \right| / \log \log T = \infty$ 不满足时, 上下极限可能不等. 邵启满^[40]证明了: 当 $\lim_{T \rightarrow \infty} (T/a_T) / \log \log T = \infty$ 时,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T-a_T} \sup_{0 \leq s \leq a_T} \frac{|W(t+s) - W(t)|}{2a_T \left| \log \frac{T}{a_T} - \log \log \log T \right|}^{1/2} = 1 \quad \text{a.s.}$$

对于两参数情形, 林正炎^[41]在条件

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\log(T/a_T) + \log(1 + \log(b_T/\sqrt{a_T}))}{\log \log \log T} = \infty$$

下, 建立了如下的下极限:

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \sup_{R \in L_T} |W(R)| \left/ \left| 2a_T \left| \log \frac{T}{a_T} + \log \left| 1 + \log \frac{b_T}{\sqrt{a_T}} \right| \right| \right|^{1/2} = 1 \quad \text{a.s.}$$

作为特例可推出 Lacey^[42]重对数律

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s, t \leq T, s \neq t} \frac{|W(s, t)|}{\sqrt{2T \log \log T}} = 1 \quad \text{a.s.} \quad (3.3)$$

张立新^[43]进一步推广了上述结果, 在条件

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\log(T/a_T) + \log(1 + \log(b_T/\sqrt{a_T}))}{\log \log \log T} > 1$$

之下, 有

1) Zhang L X. Almost Sure Limiting Behaviors of Stochastic Processes. Ph D Dissertation, Fudan University, Shanghai, China, 1995

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \sup_{R \in L_T} |W(R)| \left| \left| 2a_T \log \frac{T}{a_T} + \log \left| 1 + \log \frac{b_T}{\sqrt{a_T}} \right| - \log \log \log T \right| \right|^{1/2} = 1 \quad \text{a. s. .}$$

张立新^[44]还建立起了 Lacey 重对数律和 Chung 重对数律之间的联系:

定理 3.1 令 a_T, b_T 等如 2.1 节所示. 记

$$\alpha_T = \{2T(\log(\log b_T T^{-1/2} + 1) - \log \log \log T)\}^{-1/2},$$

$$\beta_T = T^{-1/2} \left| \frac{\log \log T}{\log b_T T^{-1/2}} \right|^{1/2} \left| \log \frac{\log \log T}{\log b_T T^{-1/2}} \right|^{-3/2}.$$

如果

$$\log b_T T^{-1/2} / \log \log T \rightarrow \infty \quad (T \rightarrow \infty),$$

则有

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \alpha_T \sup_{(x,y) \in D_T} |W(x,y)| = 1 \quad \text{a. s. .} \quad (3.4)$$

如果

$$\log b_T T^{-1/2} / \log \log T \rightarrow 0, \quad (T \rightarrow \infty),$$

则存在 2 个绝对常数 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$C_1 \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \beta_T \sup_{(x,y) \in D_T} |W(x,y)| \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \beta_T \sup_{R \in D_T} |W(R)| \leq C_2 \quad \text{a. s. .} \quad (3.5)$$

在上述定理中, 取 $b_T = T$, 得 Lacey 重对数律; 取 $b_T = T^{1/2}$, 则得 Talagrand 所证的 Chung 重对数律.

3.2 特殊的或较一般的 Gauss 过程

3.2.1 小球概率估计与 Chung 重对数律 为求有关 Wiener 过程的 Chung 重对数律, 不可微模等, 关键是利用下列不等式

$$\exp \left| -\frac{\pi^2}{8x^2} \right| \leq P \left| \sup_{0 \leq t \leq 1} |W(t)| \leq x \right| \leq 2 \exp \left| -\frac{\pi^2}{8x^2} \right|.$$

对其他类型的 Gauss 过程, 有否相应的结果呢? 对 α ($0 < \alpha < 2$) 阶分数 Wiener 过程 $\{X(t); t \geq 0\}$ 有^[45]

$$\exp \left| -\frac{C_2}{x} \right| \leq P \left| \sup_{0 \leq t \leq 1} |X(t)| \leq x^{\alpha/2} \right| \leq 2 \exp \left| -\frac{C_1}{x} \right|.$$

更一般地, 如果 $\sigma^2(h) = E(X(t+h) - X(t))^2$ 是凹函数, 且对某个 $\alpha > 0$, $\sigma(h)/h^\alpha \uparrow$, 那么上式也成立 (但以 $\sigma(x)$ 代 $x^{\alpha/2}$)^[46]. 并由此可得

$$1 \leq \liminf_h \inf_0 \frac{\sup_{0 \leq t \leq h} |X(t)|}{\sigma(C_1 h / \log \log h^{-1})} \quad \text{a. s. ,}$$

$$\liminf_h \inf_0 \frac{\sup_{0 \leq t \leq h} |X(t)|}{\sigma(C_2 h / \log \log h^{-1})} \leq 1 \quad \text{a. s. .}$$

Shao 和 Wang^[47] 等还讨论了多参数的情形.

3.2.2 不可微模和增量有多小 若 $\sigma^2(h)$ 在 $(0, \sup_{T>0} a_T)$ 上凹, 则

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \inf_{0 \leq t \leq b_T} \sup_{s \leq a_T} \frac{|X(t+s) - X(t)|}{\left| \frac{a_T}{24 \log(b_T/a_T)} + \log \log \left| a_T + \frac{1}{a_T} \right| \right|} \geq \frac{1}{2} \quad \text{a. s. .}$$

若进一步 $X(t)$ 为 O-U 过程的无穷级数, 且存在正常数 $\theta_1, \theta_2, \alpha$ 使得对充分小的 $h, \theta_1 h^\alpha \leq \sigma^2(h) \leq \theta_2 h^\alpha$, 则有

$$c_1 \leq \liminf_h \inf_{0 \leq t \leq t_0} \sup_{0 \leq s \leq h} \frac{(\log h^{-1})^{\alpha/2}}{\sigma(h)} |X(t+s) - X(t)| \\ \leq \limsup_h \inf_{0 \leq t \leq t_0} \sup_{0 \leq s \leq h} \frac{(\log h^{-1})^{\alpha/2}}{\sigma(h)} |X(t+s) - X(t)| \leq c_2 \quad \text{a.s.},$$

其中 $c_1, c_2 > 0$ 只依赖于 $\theta_1, \theta_2, \alpha^{[48]}$.

张立新^[49]在条件 $\Gamma_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < \infty$ 下, 证明了 $c_1 = c_2 = (\pi^2/8)^{1/2}$, 这时 $\alpha = 1$.

3.2.3 C-R 型增量的下极限 对 $\alpha (0 < \alpha < 2)$ 阶分数 Wiener 过程有如下结果^[50, 51]:

若式(*) $\lim_{T \rightarrow \infty} (T/a_T)/\log \log T = \infty$, 那么

$$\liminf_T \inf_{0 \leq t \leq T-a_T} \sup_{0 \leq s \leq a_T} \frac{|X(t+s) - X(t)|}{\left| 2a_T^\alpha \log \frac{T}{a_T} - \log \log \log T \right|} = 1 \quad \text{a.s.};$$

若式(*)改为 $\lim_{T \rightarrow \infty} (T/a_T)/\log \log T = 0$, 那么存在正常数 $c_1(\alpha), c_2(\alpha)$ 使得

$$c_1(\alpha) \leq \liminf_T \inf_{0 \leq t \leq T-a_T} \sup_{0 \leq s \leq a_T} \frac{|X(t+s) - X(t)|}{\left| a_T \log \left| 1 + \frac{T}{a_T \log \log T} \right| \right|^{\alpha/2}} \leq c_2(\alpha) \quad \text{a.s.}.$$

刘坤会^[52]和张立新^[53]还分别讨论了 Wiener 过程和分数 Wiener 过程的滞后型增量的下极限.

4 Gauss 过程局部时的增量

设 $\{X(t); t \geq 0\}$ 为一实值随机过程, 其局部时记为 $L(x, t)$, 即

$$H(A, t) = \int_A L(x, t) dx, \quad A \subset \mathbb{R},$$

其中 $H(A, t) = \lambda\{s; 0 \leq s \leq t, X(s) \in A\}$ 为 $\{X(t)\}$ 的占有时.

4.1 Wiener 过程局部时的增量

对不减的 $a_T, 0 < a_T \leq T$, 设 T/a_T 不增, 则有

$$\limsup_T \inf_{0 \leq s \leq T-a_T} \sup_{0 \leq x \leq a_T} \frac{|L(0, s+a_T) - L(0, s)|}{\left| a_T \log \frac{T}{a_T} + 2 \log \log T \right|} = 1 \quad \text{a.s.}, \\ \limsup_T \inf_{0 \leq s \leq T-a_T} \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{|L(x, s+a_T) - L(x, s)|}{\left| a_T \left| 2 \log \frac{T}{a_T} + 2 \log \log T \right| \right|} = 1 \quad \text{a.s.}$$

(参见文献[54]). Csaki 和 Fildes^[55]讨论了它的下极限.

4.2 较一般的 Gauss 过程局部时的增量

设 $X(0) = 0, \sigma^2(h)$ 为在 $(0, a^* + b^*)$ 上的非降连续凹函数, 其中 $a^* = \sup_{T>0} a_T, b^* = \sup_{T>0} b_T$. 若存在 $0 < \alpha \leq 1/2$ 和 $c_0 > 0$ 使得

$$\sigma(ah) \geq c_0 a^\alpha \sigma(h), \quad \forall 0 \leq a \leq 1; 0 < h \leq a^* + b^*, \\ (1 + b_T)/a_T \rightarrow \infty \quad (T \rightarrow \infty);$$

则

$$\limsup_T \sup_{0 \leq t \leq b_T} \frac{L(x, t + a_T) - L(x, t)}{a_T \left| \log \frac{b_T}{a_T} + 2 \log \log \left| a_T + \frac{1}{a_T} \right| \right|^\alpha / \sigma(a_T)} \leq \frac{160}{c_0} \quad \text{a. s. .}$$

若 $\sigma^2(h)$ 为在 $(0, 1)$ 上的非降连续凹函数, 且存在 $0 < \alpha \leq 1/2$ 和 $c_0 > 0$ 使得

$$\sigma(ah) \geq c_0 a^\alpha \sigma(h), \quad \forall 0 < a, h \leq 1,$$

则

$$\limsup_h \sup_{0 \leq t \leq \infty} \sup_{x < \infty} \frac{L(x, t + h) - L(x, t)}{h (\log h^{-1})^{\alpha+1} / \sigma(h)} \leq \frac{262 (36 + 24\alpha)^{\alpha+1}}{c_0} \quad \text{a. s. ,}$$

这一结果是由 Csörgő, 林正炎和邵启满^[5, 6]建立的.

5 Gauss 过程增量的分形性质

Orey 和 Taylor^[57] 研究了 Wiener 过程增量的分形性质, 受此启发, 张立新^[58] 研究了 l^p -值 Gauss 过程增量的分形性质.

定理 5.1 设定理 2.1 的条件满足, 记

$$E(\alpha) = \left| t \in [0, 1]: \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\|Y(t+h) - Y(t)\|_{l^p}}{\sigma(p, h) (2 \log h^{-1})^{1/2}} \geq \alpha \right|, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

用“=”代替“ $\geq$ ”, 我们定义 $E^*(\alpha)$. 则对任何 $\alpha \in [0, 1]$,

$$\dim E(\alpha) = \dim E^*(\alpha) = 1 - \alpha^2 \quad \text{a. s. ,}$$

其中 $\dim B$ 表示集合 B 的 Hausdorff 维数.

张立新^[59] 还讨论了 O-U 过程无穷级数的增量与 Chung 重对数律相关的分形性质: 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一列独立的参数为 $(\lambda_k, \gamma_k)_{k=1}^\infty$ 的 O-U 过程无穷级数, 假设 $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k < \infty$, 记

$$E_1(\alpha) = \left| t \in [0, 1]: \liminf_{h \rightarrow 0} \left| \frac{8 \log h^{-1}}{\pi^2 \sigma^2(h)} \right|^{1/2} \sup_{0 \leq s \leq h} |X(t+s) - X(s)| \leq \alpha \right|, \quad \alpha \geq 1.$$

则对任何 $\alpha \geq 1$,

$$\dim E_1(\alpha) = 1 - \alpha^{-2} \quad \text{a. s. .}$$

致谢 本工作作为国家自然科学基金(批准号: 19571021, 19701011)和浙江省自然科学基金资助项目.

参 考 文 献

- 1 Lvy P. Processus Stochastique et Mouvement Brownien. Paris: Gauthier-villars, 1948
- 2 Csörgő M, Rvšsz P. Strong Approximations in Probability and Statistics. New York: Academic Press, 1981
- 3 林正炎, 陆传荣. 强极限定理. 北京: 科学出版社, 1992
- 4 Hanson D C, Russo R P. Some results on increments of the Wiener process with application to lag sums of i. i. d. r. v. 's. Ann Probab, 1983, 11: 609~ 623
- 5 Chen G J, Kong F C, Lin Z Y. Answers to some questions about increments of Wiener processes. Ann Probab, 1986, 14: 1252~ 1261
- 6 Lu C R. How big are the lag increments of a 2-parameter Wiener processes? Chin Ann Math, 1991, 12B: 122~ 130
- 7 Lu C R. How big are the lag increments of a 2-parameter Wiener processes (II)? Chin Ann Math, 1993, 14B: 347~ 354
- 8 Lin Z Y, Lu C R. A general form of the increments of a two-parameter Wiener process. Appl Math JCU, 1993, 8B: 54~ 63
- 9 Ortega J. On the size of the increments of non-stationary Gaussian processes. Stoch Processes Appl, 1984, 18: 47~ 56

- 10 陆传荣. 关于 Gauss 过程增量的若干结果. 应用概率统计, 1986, 2: 59~ 65
- 11 洪圣岩. 关于 Gauss 过程增量的若干结果. 数学年刊, 1990, 11A: 136~ 146
- 12 Iscoe I, Marcus M, McDonald D, et al. Continuity of l^2 -valued Ornstein-Uhlenbeck processes. Ann Probab, 1990, 18: 68~ 84
- 13 Marcus M. Continuity in l^p of certain Ornstein-Uhlenbeck processes. Probability in Banach Space 7. Progr Probab Statist, 1997, 21: 139~ 145
- 14 Fernique X. Sur la r•gularit• des fonctions a l•atoires d' Ornstein-Uhlenbeck $\mathbb{R}^p$ valeurs dans l_p , $p \in [1, \infty)$. Ann Probab, 1992, 20: 1441~ 1449
- 15 Schmuland B. Sample path properties of l^p -valued Ornstein-Uhlenbeck processes. Canad math Bull, 1990, 33: 358~ 366
- 16 Cs•rg• M, Lin Z Y. A law of the iterated logarithm for infinite dimensional Ornstein-Uhlenbeck processes. C R Math Rep Acad Sci Canada, 1988, 10: 113~ 118
- 17 Cs•rg• M, Lin Z Y. Path properties of infinite dimensional O-U processes. Coll Math Soc J Bolyai, Limit Theorems of Probab & Statist (Hungary). Amsterdam: North Holland, 1991. 107~ 135
- 18 Cs•rg• M, Lin Z Y. On moduli of continuity for χ^2 processes generated by Ornstein-Uhlenbeck processes. C R Math Rep Acad Sci Canada, 1988, 10: 203~ 207
- 19 Cs•rg• M, Lin Z Y. On moduli of continuity for Gaussian and l^2 -norm squared processes generated by Ornstein-Uhlenbeck processes. Canada J Math, 1990, 42: 141~ 158
- 20 林正炎. 一类由无穷维 O-U 过程产生的过程的轨道性质. 数学年刊, 1991, 12A: 249~ 253
- 21 Cs•rg• M, Lin Z Y, Shao Q M. Randomization moduli of continuity for l^2 -norm squared Ornstein-Uhlenbeck processes. Canada J Math, 1993, 45: 269~ 283
- 22 Cs•ki E, Cs•rg• M, Shao Q M. Fernique type inequalities and moduli of continuity for l^2 -valued Ornstein-Uhlenbeck processes. Ann Inst Henri Poincar• Probabilit•s et Statistiques, 1992, 28: 479~ 517
- 23 Cs•rg• M, Shao Q M. Strong limit theorems for large and small increments of l^p -valued Gaussian processes. Ann Probab, 1993, 21: 1958~ 1990
- 24 Cs•rg• M, Lin Z Y, Shao Q M. Path properties for l^∞ -valued Gaussian processes. Proc Amer Math Soc, 1994, 121: 225~ 236
- 25 Lin Z Y. l^p -值 Gauss 过程的增量有多大. 中国科学, A 辑, 1996, 26(10): 873~ 883
- 26 Lin Z Y, Qin Y C. On increments of l^∞ -valued Gaussian processes. Asym Methods in Probab and Statist. (Ottawa), Elsevier, 1998, 293~ 302
- 27 Cs•ki E, Cs•rg• M, Lin Z Y, et al. On infinite series of independent Ornstein-Uhlenbeck processes. Stoch Processes Appl, 1991, 39: 25~ 44
- 28 Lin Z Y. On large increments of infinite series of Ornstein-Uhlenbeck processes. Stoch Processes Appl, 1995, 60: 161~ 169
- 29 Lu C R, Shen S W, Wang X Y. Local continuity modulus for Wiener and infinite dimensional OU processes. Acta Math Sinica, 1994, 10: 219~ 224
- 30 Lin Z Y. 由 Ornstein-Uhlenbeck 过程产生的 l^2 模平方过程的增量. 科学通报, 1996, 41(1): 6~ 10
- 31 Cs•rg• M, Lin Z Y. Path properties of kernel generated two time parameter Gaussian processes. Probab Theory Relat Fields, 1991, 89: 423~ 445
- 32 Cs•rg• M, Lin Z Y, Shao Q M. Kernel generated two time parameter Gaussian processes and some of their path properties. Canada J Math, 1994, 46: 81~ 119
- 33 Lin Z Y. On the moduli of continuity of a two-parameter Ornstein-Uhlenbeck process. Acta Math Hungar, 1995, 66: 345~ 360
- 34 Lin Z Y. On large increments of a two-parameter O-U process. Acta Math Sinica New Series, 1995, 11: Special Issue, 59~ 68
- 35 Lin Z Y, Chai Y K. Some limit theorems for fractional L•vy-Brownian fields. Preprint, 1998, to appear in Stoch Processes Appl
- 36 孔繁超. 两参数 Wiener 过程增量的若干结果. 应用概率统计, 1987, 3: 144~ 150
- 37 Shen Z X. Some improved limit theorems on a 2-parameter Wiener process. Math Acta Sci, 1994, 14: 199~ 212
- 38 张立新. 布朗运动在 (r, p) -容度意义下的下极限性质. 数学学报, 1996, 39: 543~ 555
- 39 Talagrand M. The small ball problem for the Brownian sheet. Ann Probab, 1994, 22: 1331~ 1354
- 40 邵启满. 关于 Wiener 过程增量的注记. 数学杂志, 1986, 6: 175~ 182

- 41 林正炎, 两参数 Wiener 过程增量有多大. 中国科学, A 辑, 1984 (12): 1065~ 1073
- 42 Lacey M T. A remark on the multiparameter law of the iterated logarithm. Stoch Processes Appl, 1989, 32: 355~ 367
- 43 张立新. 两参数 Wiener 过程的增量的一个下极限. 数学年刊, 1997, 18A: 235~ 246
- 44 Zhang L X. Two different kinds of liminf on the LIL for two parameter Wiener processes. Stoch Processes Appl, 1996, 63: 175~ 188
- 45 Monrad D, Rootzén H. Small values of Gaussian processes and functional laws of the iterated logarithm. Probab Theory Relat Fields, 1995, 101: 173~ 192
- 46 Shao Q M. A note on small ball probability of Gaussian processes with stationary increments. I Theoret Probab. 1993, 6: 595~ 602
- 47 Shao Q M, Wang D. Small ball probabilities of Gaussian fields. Probab Theory Relat Fields, 1995, 102: 511~ 517
- 48 Csörgő M, Shao Q M. On almost sure limit inferior for B -valued stochastic processes and applications. Probab Theory Relat Fields, 1994, 99: 29~ 54
- 49 张立新. Ornstein-Uhlenbeck 过程无穷级数的精确不可微模. 数学年刊, 1995, 16A: 263~ 268
- 50 Zhang L X. Some liminf results on increments of fractional Brownian motion. Acta Math Hungar, 1996, 71: 215~ 240
- 51 Zhang L X. A note on liminf for increments of a fractional Brownian motion. Acta Math Hungar, 1997, 76: 145~ 154
- 52 刘坤会. 一个与 Wiener 增量连续模有关的下极限收敛速度问题. 中国科学, A 辑, 1987, 17(11): 1121~ 1129
- 53 Zhang L X. A liminf result on Hanson-Russo type increments of fractional Brownian motion. Acta Math Sci, 1997, 17: 190~ 197
- 54 Csörgő E, Csörgő M, Földes A, et al. How big are the increments of the local time of a Wiener process? Ann Probab, 1983 11: 593~ 608
- 55 Csörgő E, Földes A. How small are the increments of the local time of a Wiener processes? Ann Probab, 1986, 14: 533~ 546
- 56 Csörgő M, Lin Z Y, Shao Q M. On moduli of continuity for local time of Gaussian processes. Stoch Processes Appl, 1995, 58: 1~ 21
- 57 Orey S, Taylor S T. How often on a Brownian path does the iterated logarithm fail? Proc London Math Soc, 1974, 28: 174~ 192
- 58 Zhang L X. On the fractal nature of increments of l^p -valued Gaussian processes. Stoch Processes Appl, 1997, 71: 91~ 110
- 59 Zhang L X. On the fractal nature of increments of infinite series of OU processes related to the Chung LIL. Appl Math JCU, 1998, 38B: 215~ 222

(1998-12-02 收稿, 1999-04-01 收修稿稿)

功能性染料在有机光受体上的 应用及研究进展

彭必先 林 童^{④*}

(中国科学院感光化学研究所, 北京 100101; ④中国科学院化学研究所, 北京 100080. * 联系人)

摘要 在光电子学领域, 功能性染料的一个重要应用是作为电荷生成材料用于光导光受体器件. 通过光诱导电荷分离和电场诱导载流子迁移, 形成静电潜影. 所有染料中以酞菁、花酰胺、方酸染料和偶氮染料的研究报道异常活跃. 就近年来这些染料在光受体方面的发展情况, 从结构、聚集态相貌和能级等方面与光导性的相互关系做一详细总结, 并在此基础上, 针对其中存在的问题提出相应的研究设想.

关键词 功能染料 光受体 光导体 染料 电子成象

光受体是静电成象的主要器件, 它的作用是将光信号转变成电信号, 即将实象转变成静电潜影. 自从 Carlson^[1]发明静电复印以来, 光-静电转换一直作为静电成象领域的基石. 光受体

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/csb1999-44-13-1346>