脉冲和正则控制下的最优注资: 一种混合策略

李鹏¹, 周明^{2*}, 孟辉²

1. 南京财经大学金融学院, 南京 210023;

2. 中央财经大学中国精算研究院, 北京 100081

E-mail: pengliruby@sina.com, zhouting@cufe.edu.cn, menghuidragon@126.com

收稿日期: 2017-01-14; 接受日期: 2017-06-07; 网络出版日期: 2017-11-28; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11571388 和 11771465)、高等学校学科创新引智计划 (批准号: B17050)、中央高校基本科研业务费专项资金和中央财经大学科研创新团队支持计划资助项目

摘要 本文用漂移 Brown 运动表示公司的现金流, 研究了公司的最优注资问题. 基于实际情况, 本文假设市场上有两种注资类型: 脉冲注资和正则注资, 同时假设这两种注资都需要支付比例成本, 且每次脉冲注资还需支付固定成本. 公司决策者要确定公司的注资策略, 就需要确定正则注资率 (有最大值限制)、注资的时间和脉冲注资金量. 从控制公司成本的角度出发, 决策者需在现金流为正的约束下, 寻找最小化注资成本的注资策略. 因此, 决策者面临一个脉冲和正则控制的混合问题, 本文得到了该问题的值函数和最优控制策略, 发现最优的注资策略是与模型参数相关的混合注资策略, 同时也分析了模型参数对值函数和最优注资策略的敏感性.

关键词 注资 混合策略 脉冲控制 正则控制 固定成本 比例成本

MSC (2010) 主题分类 62P05, 91B30, 93E20

1 引言

注资或融资是为商业公司或其他机构提供资金的行为, 这些资金可以帮助公司实现它们不同的目标. 实践中, 常见的注资有三种形式: 现金注入、发行股票和债务融资. 公司可根据目标需求选择不同的注资方式, 例如, 当新公司成立时需要初始资金, 这些资金可以通过现金的方式获得 (提供者可以是亲人、朋友或者投资人); 当上市公司遇到财务危机或者想进一步推动公司的发展时, 它可以通过增发股票或者债务融资 (债务人可以是银行或股东) 的方式来获得资金. 事实上, 商业中有更多灵活的融资或注资方式, 但是它们都可归结为两类: 脉冲注资和连续注资. 因此, 公司决策者需要确定的就是公司需要的注资金量、注资率和注资时间.

在以往的文献中, 最优脉冲注资问题通常与最优分红、最优再保和最优投资问题一起研究. 首先是最优分红和注资结合的问题, 该问题通常是以最大化公司的累积分红现值与注资成本的差为目标.

英文引用格式: Li P, Zhou M, Meng H. Optimal stochastic impulse and regular control for capital injections: A hybrid strategy (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 565–578, doi: 10.1360/SCM-2017-0030

文献 [1,2] 首次提出了增发股票形式的最优融资问题 (脉冲的注资形式), 它们研究了一个确定的模型, 以最大化公司的累积分红现值为目标得到了最优的融资和分红策略. 此后, 文献 [3] 将它们的结果拓展到随机收益率的模型. 另外, 文献 [4] 指出, 当公司现金流为负时, 股东有责任进行注资, 也即通过借贷的形式进行脉冲注资, 在该假设下, 它得到了保险公司的最优注资策略. 之后, 注资问题开始在精算科学领域引起广泛的关注. 例如, 文献 [5] 考虑了包含脉冲注资的 Cramér-Lundberg 模型下的公司最优分红策略. 文献 [6] 研究了分红和注资中的比例成本对最优策略的影响. 文献 [7] 研究了对偶模型中的脉冲注资问题. 最近, 文献 [8,9] 分别研究了增长限制扩散模型和稀疏相依模型下的最优注资和分红问题. 其次, 一些文献从公司决策者的角度出发, 通过风险控制和投资组合优化来最小化注资成本. 在该目标下, 文献 [10–12] 考虑了比例再保险风险控制策略下的最优注资问题. 文献 [13] 在方差保费准则下, 研究了最优注资和再保策略问题. 文献 [14] 研究了超额再保和最优注资问题. 最近, 文献 [15] 同时考虑了两个保险公司的再保和脉冲注资问题, 文献 [16] 解决了最优投资组合和最优注资的混合问题.

通过文献的梳理, 我们发现以往的研究中仅涉及脉冲注资的形式, 不管优化目标是最大化累积分红还是最小化注资成本, 在目标函数中都要考虑折现的问题, 那么脉冲注资的最优注资时间是显然的, 就是在公司现金流击中零的时刻. 实践中, 公司不仅可以通过脉冲注资的方式注资, 也可以通过持续的现金流来获得注资. 例如, 通过向股东或银行借款而获得连续的注资率. 连续注资是实践中常见的资本注入方式, 而据我们所知, 在以往的研究中还未涉及连续注资的问题, 因此, 如果在可行注资方式中同时考虑脉冲注资和连续注资, 是否会改善最优的注资策略呢?

本文的目的是研究同时包含正则注资 (最大连续注资率为 m) 和脉冲注资下的混合注资策略问题. 以最小化注资成本为目标, 本文将探索在公司的现金流击中零以前是否需要先进行正则注资. 基于动态优化理论, 本文得到了值函数的解析解和最优的混合注资策略. 根据两种注资类型的成本参数, 我们找到了一个条件, 在该条件下, 正则注资是没有意义的, 问题就退化到了单纯的脉冲注资问题. 反之, 若该条件不满足, 本文求出了最优的脉冲注资金量、注资时间和正则注资的区间.

本文的结构如下: 第 2 节建立模型, 描述了优化注资问题; 第 3 节先计算了一种特殊情形, 即只考虑脉冲注资时的最优注资策略问题, 这个问题给出了原问题值函数的一个上界, 并且可用来对比分析加入正则注资对最优注资策略的影响, 第 3.2 小节证明了值函数满足的 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程和验证定理; 第 4 节计算了值函数的解析解和基于模型参数的最优注资策略; 为了说明成本参数和市场波动对值函数和注资策略的影响, 第 5 节计算了一些数值例子.

2 问题描述

本文考虑连续时间的模型, 并且假设所有的随机变量定义在完备的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上. 用 R_t 表示公司的现金流过程, 假设该过程是一个带漂移的 Brown 运动, 其中初始值为 x , 漂移系数为 μ , 波动系数为 σ , 那么,

$$dR_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad R_0 = x, \quad (2.1)$$

其中 $\{W_t; t \leq 0\}$ 是标准的 Brown 运动. 假设公司决策者选择一种注资策略 $\pi = (l_t, \tau_n, \xi_n; t \leq 0, n \in \mathbb{Z}^+)$, 其中 l_t 是连续的注资率, $\{\tau_n; n \in \mathbb{Z}^+\}$ 是脉冲注资时间的过程, $\{\xi_n; n \in \mathbb{Z}^+\}$ 是对应的脉冲注资金量. 在该注资策略下, 公司的现金流 R_t^π 过程变为如下的跳扩散过程:

$$R_t^\pi = x + (\mu + l_t)t + \sigma W_t + \sum_{\tau_n < t} \xi_n, \quad R_t^\pi > 0.$$

进而定义 Π 是注资策略的可行集合, 若对任意的注资策略 $\pi \in \Pi$ 满足下面的条件:

- (1) $l = \{l_t, t \geq 0\}$ 是关于 $\mathcal{F}$ 的可料过程, 并且对任意的 $t > 0$, 有 $0 \leq l_t \leq m$, 其中注资率的最大限制 m 是常数;
- (2) $\tau = \{\tau_n; n \in \mathbb{Z}^+\}$ 是递增的停时过程 $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \infty$;
- (3) $\xi = \{\xi_n; n \in \mathbb{Z}^+\}$ 是关于 $\mathcal{F}_{\tau_n-}$ 的可料过程;
- (4) 注资策略 π 需保证公司的现金流为正, 即对任意的 $t \geq 0$ 有 $R_t^\pi > 0$.

公司决策者将在可行集中寻找使得注资成本最小的注资策略, 该成本既包含注资的资金也包含注资过程中产生的成本. 为此, 令 $\varphi > 1$ 和 $\bar{\kappa} > 1$ 分别表示正则注资和脉冲注资的比例成本, 每次脉冲注资还会产生固定成本, 用 $\bar{K}$ 表示, 那么注资成本的期望现值可表示为

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty \varphi l_t e^{-\delta t} dt + \sum_{\tau_n} [e^{-\delta \tau_n} (\bar{K} + \bar{\kappa} \xi_n)] \right],$$

其中 $\delta > 0$ 是折现率. 观察发现 φ 可以从期望中提出, 因此定义 $\kappa = \bar{\kappa}/\varphi$ 为两种注资比例成本的比率, 然后将固定成本的参数记为 $K = \bar{K}/\varphi$. 那么, 在给定注资策略 π 下可重新定义注资成本函数为

$$V^\pi(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty l_t^\pi e^{-\delta t} dt + \sum_{\tau_n^\pi} [e^{-\delta \tau_n^\pi} (K + \kappa \xi_n^\pi)] \right].$$

公司决策者的目标是寻找最优的注资策略 π^* 以最小化注资成本, 即

$$V(x) = V^{\pi^*}(x) = \inf_{\pi \in \Pi} V^\pi(x). \quad (2.2)$$

上面描述了一个正则和脉冲的混合随机控制问题. 以往文献中也有对混合随机控制问题的研究, 例如, 文献 [17, 18] 分别研究了再保和分红中的脉冲和正则混合控制问题, 而文献 [19] 考虑了 Lévy 过程下分红问题中的奇异正则随机控制问题. 注意到本文令折现因子 δ 大于零, 这意味着决策者偏好延迟注资的时间以使得成本最小. 所以, 对于脉冲注资而言, 最优的注资时间是公司的盈余击中零的时刻, 可定义为

$$\tau_1^* = \inf\{t \geq 0 : X_t^{\pi^*} = 0\}, \quad \tau_{n+1}^* = \inf\{t \geq \tau_n^* : X_t^{\pi^*} = 0\}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

当最优的注资策略 π^* 确定时, 就可以根据上面的定义来确定最优的脉冲注资时间. 因此, 下面需要解决的问题就是求得最优的正则注资率 l_t^* 和最优的脉冲注资量 ξ_n^* .

3 基准和验证定理

本节首先构造一个特殊的策略, 该策略是在不包含正则注资的假设下得到的, 通过该特殊策略, 我们借助最优控制理论得到目标函数的一个上界, 这也是原问题的一个基准. 在该基准下, 本节给出了原问题的验证定理和 HJB 方程.

3.1 基准

考虑一种可行集的限制, 假设正则注资率 $l_t \equiv 0$, 决策者以最小化注资成本为目标来确定脉冲注资策略, 该假设下的目标函数是

$$\bar{V}(x) = \inf_{\tau, \xi} \bar{V}^{\tau, \xi}(x) = \inf_{\tau, \xi} \mathbb{E}_x \left[\sum_{\tau_n^\pi} [e^{-\delta \tau_n^\pi} (K + \kappa \xi_n^\pi)] \right], \quad (3.1)$$

其中控制变量 τ 和 ξ 满足第 1 节中关于可行集的假设. 因此, 最优的注资时间是公司现金流击中零的时刻. 该基准需解决一个简单的脉冲随机控制问题, 以下命题给出了该问题的解. 先令 $\rho_+(l)$ 和 $\rho_-(l)$ 分别是以下特征函数的正负根:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 + (\mu + l)x - \delta = 0.$$

命题 3.1 优化问题 (3.1) 的解为

$$\bar{V}(x) = -\frac{\kappa}{\rho_-(0)} e^{\rho_-(0)(x-\xi_1^*)}, \quad (3.2)$$

其中 $\xi_1^* > 0$ 是以下方程的唯一解:

$$\kappa(1 - e^{\rho_-(0)\xi}) + (K + \kappa\xi)\rho_-(0)e^{\rho_-(0)\xi} = 0. \quad (3.3)$$

证明 通过标准的验证定理方法, 可得函数 $\bar{V}(x)$ 满足下面的方程和边界条件:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 v''(x) + \mu v'(x) - \delta v(x) = 0, \\ v(0) = v(\xi_1^*) + K + \kappa\xi_1^*, \quad v'(\xi_1^*) = -\kappa. \end{cases}$$

通过上式和条件 $v'(\xi_1^*) = -\kappa$ 可得表达式 (3.2), 将此表达式代入边界条件 $v(0) = v(\xi_1^*) + K + \kappa\xi_1^*$, 可得到 ξ_1^* 满足的方程 (3.3). 下面需要验证该方程有唯一的解, 令

$$g_1(\xi) = \kappa(1 - e^{\rho_-(0)\xi}) + (K + \kappa\xi)\rho_-(0)e^{\rho_-(0)\xi},$$

则有 $g_1(0) = (K + \kappa\xi)\rho_-(0) < 0$, $g(+\infty) \rightarrow \kappa > 0$ 和 $g'(\xi) = (K + \kappa\xi)\rho_-(0)^2 e^{\rho_-(0)\xi} > 0$, 即可知 $g(\xi)$ 是一个递增函数, 因此证明了解的唯一性. $\square$

推论 3.1 原问题值函数 (2.2) 的上界为

$$V(x) \leq \frac{K + \kappa\xi_1^*}{1 - e^{\rho_-(0)\xi_1^*}} e^{\rho_-(0)x}. \quad (3.4)$$

证明 注意到, 在限定可行集下, 我们得到了命题 3.1 的基准, 显然有 $V(x) \leq \bar{V}(x)$. 将方程 (3.3) 重新写为

$$-\frac{\kappa}{\rho_-(0)} = \frac{(K + \kappa\xi)e^{\rho_-(0)\xi}}{(1 - e^{\rho_-(0)\xi})},$$

并将上式代入方程 (3.2), 即可得到推论中的上界. $\square$

注 3.1 对于命题 3.1 给出的基准, 我们有以下说明:

(1) 事实上, 很多文献都研究了这种仅包含脉冲注资的随机控制问题, 例如, 文献 [16] 应用击中时的方法研究了这种特殊的策略. 本文中, 若取 $\kappa = 1$, 则可由表达式 (3.3) 和 (3.4), 得到与文献 [16, 命题 3.1] 相同的结果.

(2) 值函数 $V(x)$ 满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = 0,$$

该结论可由值函数的上界 (3.4) 直接得到, 即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) \leq 0.$$

该结论也可由值函数的性质直接得到, 当公司的盈余趋于正无穷时 ($x \rightarrow +\infty$), 公司盈余将总是大于零, 因此注资成本为零.

3.2 HJB 方程和验证定理

定义 3.1 假设函数 $v \in C^2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, 我们先定义两个与优化问题相关的算子, 首先是无穷小算子

$$\mathcal{L}^l v(x) = \frac{1}{2} \sigma^2 v''(x) + (\mu + l)v'(x) - \delta v(x),$$

其次是与注资相关的算子

$$\mathcal{M}v(x) = \inf_{\xi} \{v(x + \xi) + K + \kappa \xi\}.$$

定义 3.2 称函数 $v(x) \in C^2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 为正则和脉冲混合控制的古典解, 如果该函数满足下面的方程:

$$\min \left\{ \inf_{0 \leq l \leq m} \{\mathcal{L}^l v(x) + l\}, \mathcal{M}v(x) - v(x) \right\} = 0, \quad x \in [0, \infty). \quad (3.5)$$

根据该方程的解可将区间 $[0, \infty)$ 分解为两部分:

(1) 脉冲注资的区间

$$\mathcal{I} = \left\{ x \in [0, \infty) : \inf_{0 \leq l \leq m} \{\mathcal{L}^l v(x) + l\} \geq 0, \mathcal{M}v(x) - v(x) = 0 \right\}; \quad (3.6)$$

(2) 正则注资的区间

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0, \infty) : \inf_{0 \leq l \leq m} \{\mathcal{L}^l v(x) + l\} = 0, \mathcal{M}v(x) - v(x) \geq 0 \right\}. \quad (3.7)$$

基于以上的定义, 我们可以给出优化问题的验证定理.

定理 3.1 如果 HJB 方程有一个严格的凸解 $v(x)$, 且该函数是有界递减函数, 进一步, 若它的导数是有界的, 且满足边界条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$, 那么有 $V(x) = v(x)$.

证明 任取一个可行策略 $\pi = (l; \tau, \xi) \in \Pi$, 通过广义的 Itô 公式可得

$$\begin{aligned} e^{-\delta t} v(R_t^\pi) &= v(x) + \int_0^t e^{-\delta s} \mathcal{L}^l v(R_{s-}^\pi) ds + \sigma \int_0^t e^{-\delta s} v'(R_{s-}^\pi) dW_s + \sum_{\tau_n < t} e^{-\delta \tau_n} [v(R_{\tau_n}^\pi) - v(R_{\tau_n-}^\pi)] \\ &\geq v(x) + \sigma \int_0^t e^{-\delta s} v'(R_{s-}^\pi) dW_s - \int_0^t l_t e^{-\delta t} dt - \sum_{\tau_n < t} [e^{-\delta \tau_n} (K + \kappa \xi_n)], \end{aligned}$$

其中第二个不等式是由 HJB 方程得到, 即关系 $\mathcal{L}^l v(x) \geq -l$ ($0 \leq l \leq m$) 和

$$v(R_{\tau_n-}^\pi) \leq \mathcal{M}v(R_{\tau_n-}^\pi) \leq v(R_{\tau_n}^\pi) + K + \kappa \xi_n.$$

在不等式两边取条件期望, 可得

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t l_t e^{-\delta t} dt + \sum_{\tau_n < t} [e^{-\delta \tau_n} (K + \kappa \xi_n)] \right] \geq v(x) - \mathbb{E}[e^{-\delta t} v(R_t^\pi)].$$

令 $t \rightarrow \infty$ 并取下确界可得 $V(x) \geq v(x)$. 另一方面, 我们可以构建一个满足下面条件的策略 $\pi^* = (l^*, \tau_n^*, \xi_n^*)$:

$$l^* = \begin{cases} m, & x < r^*, \\ 0, & x > r^*, \end{cases} \quad (3.8)$$

其中 $r^* = \inf\{x : v'(x) = -1\}$, 并且

$$\begin{aligned}\tau_1^* &= \inf\{t \geq 0 : X_t^{\pi^*} = 0\}, \quad \tau_{n+1}^* = \inf\{t \geq \tau_n^* : X_t^{\pi^*} = 0\}, \quad n \in \mathbb{N}^+, \\ \xi^* &= \inf\{x : v'(x) = -\kappa\}.\end{aligned}$$

在策略 π^* 下, 我们可以验证上面证明中的所有不等式都可以为等号, 这意味着我们可以找到策略 π^* 使得 $V^{\pi^*}(x) = v(x)$. $\square$

4 混合注资策略和值函数

本节将讨论如何求解原问题的 HJB 方程, 我们先假设该方程存在解 $v(x)$, 然后尝试求得此解. 注意到定义 3.2 将区间 $[0, +\infty]$ 分为两部分, 首先是脉冲注资部分 $\mathcal{I} = 0$, 该区的元素需满足以下等式:

$$v(0) = v(\xi^*) + K + \kappa\xi^*.$$

其次是正则注资的区间, 而通过验证定理的证明过程可进一步将该区间分为两部分, 其一需满足

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v''(x) + \mu v'(x) - \delta v(x) = 0, \quad x \in [r^*, \infty)$$

和边界条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$, 由此可求得

$$v(x) = C_1 e^{\rho_-(0)x}, \quad x \in [r^*, \infty),$$

其中 C_1 和 r^* 都是需要被确定的常数. 其二需满足

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v''(x) + (\mu + m)v'(x) - \delta v(x) + m = 0, \quad x \in [0, r^*].$$

类似地, 以上微分方程的解具有以下形式:

$$v(x) = \frac{m}{\delta} + C_2 e^{\rho_+(m)x} + C_3 e^{\rho_-(m)x}, \quad x \in [0, r^*],$$

其中 C_2 和 C_3 是需要被确定的常数. 为了求得值函数的解, 需要通过下面的边界条件来确定参数 C_1 、 C_2 、 C_3 、 r^* 和 ξ^* :

$$\begin{aligned}v'(\xi^*) &= -\kappa, \\ v'(r^*-) &= v'(r^*+) = -1, \quad v''(r^*+) = v''(r^*-).\end{aligned}\tag{4.1}$$

下面将通过讨论成本参数 κ 与 1 的关系来确定参数, 下面的讨论会发现模型参数的变化会影响最优注资策略参数 r^* 与 ξ^* 的关系.

情形 1 $\kappa \leq 1$.

注意到边界条件 $v'(r^*) = -1$ 和 $v'(\xi^*) = -\kappa$, 再结合值函数的凸性, 可得到不等式 $\xi^* \geq r^*$. 由条件 $v'(r^*+) = -1$, 可得

$$C_1(r^*) = -\frac{1}{\rho_-(0)} e^{-\rho_-(0)r^*},\tag{4.2}$$

由此可将 $v(x)$ ($x \in [r^*, \infty)$) 重写为

$$v(x; r^*) = -\frac{1}{\rho_-(0)} e^{\rho_-(0)(x-r^*)}, \quad x \in [r^*, \infty).\tag{4.3}$$

另外, 由条件 $v'(\xi^*) = -\kappa$ 可得

$$-e^{\rho_-(0)(\xi^*-r^*)} = -\kappa,$$

整理上式并将其代入 $v(\xi^*)$, 可得

$$\xi^* = \frac{\ln \kappa}{\rho_-(0)} + r^* \quad \text{和} \quad v(\xi^*) = -\frac{\kappa}{\rho_-(0)}. \quad (4.4)$$

再由边界条件 $v'(r^*-) = -1$ 和连续性条件 $v''(r^*-) = v''(r^+*) = -\rho_-(0)$ 可得

$$\begin{aligned} C_2\rho_+(m)e^{\rho_+(m)r^*} + C_3\rho_-(m)e^{\rho_-(m)r^*} &= -1, \\ C_2\rho_+^2(m)e^{\rho_+(m)r^*} + C_3\rho_-^2(m)e^{\rho_-(m)r^*} &= -\rho_-(0). \end{aligned}$$

求解以上方程组, 可得到由 r^* 表达的参数 C_2 和 C_3 如下:

$$C_2(r^*) = \frac{\rho_-(m) - \rho_-(0)}{(\rho_+(m) - \rho_-(m))\rho_+(m)} e^{-\rho_+(m)r^*}, \quad (4.5)$$

$$C_3(r^*) = \frac{\rho_-(0) - \rho_+(m)}{(\rho_+(m) - \rho_-(m))\rho_-(m)} e^{-\rho_-(m)r^*}, \quad (4.6)$$

结合条件 $v(0) = v(\xi^*) + K + \kappa\xi^*$ 和表达式 (4.4), 可以得到参数 r^* 满足的方程

$$\frac{m}{\delta} + C_2(r^*) + C_3(r^*) + \frac{\kappa}{\rho_-(0)} - K - \kappa\left(\frac{\ln \kappa}{\rho_-(0)} + r^*\right) = 0. \quad (4.7)$$

为证明上式有唯一的解, 我们给出下面的引理.

引理 4.1 当 $\kappa = 1$ 时, 方程 (4.7) 有唯一的非负根, 并且 $r^* = \xi^*$. 当 $\kappa < 1$, 且如下条件成立:

$$K > -\rho_-(0)^{-1}(1 + \kappa(\ln \kappa - 1))$$

时, 方程 (4.7) 有唯一的非负根.

证明 首先定义函数

$$g(r) = \frac{m}{\delta} + C_2(r) + C_3(r) + \frac{\kappa}{\rho_-(0)} - K - \kappa\left(\frac{\ln \kappa}{\rho_-(0)} + r\right).$$

对 r 取二阶导数, 可得

$$g''(r) = \frac{\rho_-(m) - \rho_-(0)}{\rho_+(m) - \rho_-(m)}\rho_+(m)e^{-\rho_+(m)r} + \frac{\rho_-(0) - \rho_+(m)}{\rho_+(m) - \rho_-(m)}\rho_-(m)e^{-\rho_-(m)r}.$$

由表达式 $g''(x)$ 和关系式 $|\rho_-(0)| \leq |\rho_-(m)|$, 我们可找到唯一的点 r_0 使得

$$g''(r_0) = 0 \quad \text{并且} \quad r_0 = \frac{1}{\rho_+(m) - \rho_-(m)} \ln \left(\frac{\rho_+(m)}{\rho_-(m)} \frac{\rho_-(0) - \rho_-(m)}{\rho_-(0) - \rho_+(m)} \right) < 0. \quad (4.8)$$

显然, 当 $x > r_0$ 时, 有 $g''(r) > 0$, 而当 $x \leq r_0$ 时, 有 $g''(r) < 0$, 意味着函数 $g'(r)$ 在 $x < r_0 < 0$ 上递减, 而在 $r > r_0$ 上递增. 由 $g'(r)$ 的表达式

$$g'(r) = -\frac{\rho_-(m) - \rho_-(0)}{\rho_+(m) - \rho_-(m)} e^{-\rho_+(m)r} - \frac{\rho_-(0) - \rho_+(m)}{\rho_+(m) - \rho_-(m)} e^{-\rho_-(m)r} - \kappa,$$

可得 $g'(0) = 1 - \kappa > 0$ 和 $g'(r) > 0$ 对任意的 $r > 0$ 都成立, 这说明函数 $g(r)$ 在 $[0, \infty)$ 上是一个增函数. 另外注意到

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{g(r)}{r} = +\infty \quad \text{和} \quad \lim_{r \rightarrow -\infty} \frac{g(r)}{r} = +\infty$$

可得 $\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = +\infty$ 和 $\lim_{r \rightarrow -\infty} g(r) = -\infty$. 这些可以证明函数 $g(r)$ 解的存在性. 现在我们要找到一个条件, 在该条件下 $g(r)$ 有唯一的非负根. 考虑函数在零点的值 $g(0)$:

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{m}{\delta} + \frac{\rho_-(m) - \rho_-(0)}{(\rho_+(m) - \rho_-(m))\rho_+(m)} + \frac{\rho_-(0) - \rho_+(m)}{(\rho_+(m) - \rho_-(m))\rho_-(m)} + \frac{\kappa}{\rho_-(0)} - K - \frac{\kappa \ln \kappa}{\rho_-(0)} \\ &= -\frac{1}{\rho_-(0)}(1 + \kappa(\ln \kappa - 1) + \rho_-(0)K), \end{aligned}$$

其中, 最后的等式是由连续性 $v(r^*-) = v(r^+) = -(1/\rho_-(0))$ 得到的. 若 $\kappa = 1$, 则 $g(0) = -K < 0$, 这意味着方程 $g(r) = 0$ 有唯一的正根 $r^* > 0$, 由 (4.4) 可以直接得到方程 $r^* = \xi^*$. 不然当 $\kappa < 1$ 时, 只有当 $g(0) < 0$ 即条件 $1 + \kappa(\ln \kappa - 1) + \rho_-(0)K < 0$ 成立时, $g(r)$ 有唯一的正根. $\square$

注 4.1 以上的讨论缺少一种情形, 即当 $\kappa < 1$ 而 $K \leq -\rho_-(0)^{-1}(1 + \kappa(\ln \kappa - 1))$ 时, 也就是当脉冲注资的比例成本低于正则注资的比例成本, 同时脉冲注资有相对较低的固定成本. 此时, 正则注资是没有价值的, 决策者的最优注资策略就是脉冲注资策略. 数学上, 在该条件下, 可求得 $r^* \leq 0$, 然后将

$$r^* = \xi^* - \frac{\ln \kappa}{\rho_-(0)}$$

和 $m \equiv 0$ 代入值函数 (4.7), 我们将得到与命题 3.1 相同的结果.

情形 2 $\kappa > 1$.

类似地, 在这种情形下, 根据值函数的性质可得 $\xi^* < r^*$. 进一步, 参数 $C_1(r^*)$ 、 $C_2(r^*)$ 和 $C_3(r^*)$ 也可由表达式 (4.2)、(4.5) 和 (4.6) 来表示. 主要的不同是, 参数 r^* 和 ξ^* 需要由下面的条件来确定:

$$v'(\xi^*) = -\kappa \quad \text{和} \quad v(0) = v(\xi) + K + \kappa \xi^*.$$

将 $v(x)$ 代入上式并整理可得

$$C_2(r^*)\rho_+(m)e^{\rho_+(m)\xi^*} + C_3(r^*)\rho_-(m)e^{\rho_-(m)\xi^*} + \kappa = 0, \quad (4.9)$$

$$C_2(r^*)(1 - e^{\rho_+(m)\xi^*}) + C_3(r^*)(1 - e^{\rho_-(m)\xi^*}) - K - \kappa \xi^* = 0. \quad (4.10)$$

引理 4.2 当 $\kappa > 1$ 时, 方程 (4.9) 和 (4.10) 可确定唯一的参数 $r^* > \xi^* > 0$.

证明 为了证明解的唯一性, 先将 $C_2(r^*)$ 和 $C_3(r^*)$ 代入 (4.9), 整理可得

$$\frac{\rho_-(m) - \rho_-(0)}{\rho_+(m) - \rho_-(m)} e^{\rho_+(m)(\xi^* - r^*)} + \frac{\rho_-(0) - \rho_+(m)}{\rho_+(m) - \rho_-(m)} e^{\rho_-(m)(\xi^* - r^*)} + \kappa = 0.$$

令 $d^* = r^* - \xi^*$ 并且定义函数

$$h(d) = \frac{\rho_-(m) - \rho_-(0)}{\rho_+(m) - \rho_-(m)} e^{-\rho_+(m)d} + \frac{\rho_-(0) - \rho_+(m)}{\rho_+(m) - \rho_-(m)} e^{-\rho_-(m)d} + \kappa. \quad (4.11)$$

现证明方程 $h(d) = 0$ 有唯一的正解. 可求得函数 $h(d)$ 的一阶导数为

$$h'(d) = -\rho_+(m) \frac{\rho_-(m) - \rho_-(0)}{\rho_+(m) - \rho_-(m)} e^{-\rho_+(m)d} - \rho_-(m) \frac{\rho_-(0) - \rho_+(m)}{\rho_+(m) - \rho_-(m)} e^{-\rho_-(m)d}.$$

我们可找到唯一的 $r_0 < 0$ (r_0 由引理 4.1 中的 (4.8) 定义), 使得 $g'(r_0) = 0$. 另外, 当 $r > r_0$ 时, 有 $g'(r) < 0$; 当 $r < r_0$ 时, 有 $g'(r) > 0$. 以上讨论可知 $g(r)$ 在区间 $[0, \infty)$ 上是递减函数. 结合 $h(0) = -1 + \kappa > 0$ 和 $h(+\infty) \rightarrow -\infty$, 可得方程 (4.9) 有唯一的正解 $d^* = r^* - \xi^* > 0$.

下面将证明 (4.9) 确定唯一的 $d^* = r^* - \xi^*$ 之后, ξ^* 可由 (4.10) 唯一确定. 先将 $C_2(r^*)$ 、 $C_3(r^*)$ 和 $r^* = \xi^* + d^*$ 代入 (4.10), 可得

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho_-(m) - \rho_-(0))(e^{-\rho_+(m)(\xi^* + d^*)} - e^{-\rho_+(m)d^*})}{(\rho_+(m) - \rho_-(m))\rho_+(m)} \\ & + \frac{(\rho_-(0) - \rho_+(m))(e^{-\rho_-(m)(d^* + \xi^*)} - e^{-\rho_-(m)d^*})}{(\rho_+(m) - \rho_-(m))\rho_-(m)} - K - \kappa\xi^* \\ & = 0. \end{aligned}$$

其次, 定义函数

$$\begin{aligned} f(\xi) = & \frac{(\rho_-(m) - \rho_-(0))(e^{-\rho_+(m)(\xi + d^*)} - e^{-\rho_+(m)d^*})}{(\rho_+(m) - \rho_-(m))\rho_+(m)} \\ & + \frac{(\rho_-(0) - \rho_+(m))(e^{-\rho_-(m)(d^* + \xi)} - e^{-\rho_-(m)d^*})}{(\rho_+(m) - \rho_-(m))\rho_-(m)} - K - \kappa\xi, \end{aligned}$$

显然有

$$f(0) = -K < 0 \quad \text{和} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} = +\infty.$$

因此, 可得 $f(+\infty) \rightarrow +\infty$. 为说明它的单调性, 我们计算它的二阶导数

$$f''(\xi) = \rho_+(m) \frac{\rho_-(m) - \rho_-(0)}{\rho_+(m) - \rho_-(m)} e^{-\rho_+(m)(\xi + d^*)} + \rho_-(m) \frac{\rho_-(0) - \rho_+(m)}{\rho_+(m) - \rho_-(m)} e^{-\rho_-(m)(\xi + d^*)}.$$

通过计算可找到 $\xi_0 = -r_0 - d^* < 0$, 使得 $f''(\xi_0) = 0$. 由此可知当 $\xi > \xi_0$ 时, 有 $f''(\xi) > 0$; 当 $\xi < \xi_0$ 时, 有 $f''(\xi) < 0$, 也即 $f'(\xi)$ 是区间 $\xi > \xi_0$ 上的递增函数. 注意到

$$f'(\xi) = -\frac{\rho_-(m) - \rho_-(0)}{\rho_+(m) - \rho_-(m)} e^{-\rho_+(m)(\xi + d^*)} - \frac{\rho_-(0) - \rho_+(m)}{\rho_+(m) - \rho_-(m)} e^{-\rho_-(m)(\xi + d^*)} - \kappa,$$

结合 $h(d^*) = 0$, 可得 $f'(0) = h(d^*) = 0$, 也即对任意 $\xi > 0$, 有 $f'(\xi) > 0$, 再结合 $f(0) = -K < 0$ 和 $f(+\infty) \rightarrow +\infty$, 即可证明 ξ^* 的唯一性. 由此证明了方程 (4.9) 和 (4.10) 可确定唯一的 ξ^* 和 $r^* = d^* + \xi^*$. $\square$

下面的定理总结了上面讨论的主要结论.

定理 4.1 根据模型参数的不同, 优化问题的值函数可分为以下几种情形:

- (1) 当 $\kappa < 1$ 且 $K < -\rho_-(0)^{-1}(1 + \kappa(\ln \kappa - 1))$ 时, 值函数由命题 3.1 给出;
- (2) 当 $\kappa \leq 1$ 且 $K > -\rho_-(0)^{-1}(1 + \kappa(\ln \kappa - 1))$ 时, 值函数由下面的表达式给出:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{m}{\delta} + C_2(r^*)e^{\rho_+(m)x} + C_3(r^*)e^{\rho_-(m)x}, & x \in [0, r^*], \\ -\frac{1}{\rho_-(0)}e^{\rho_-(0)(x-r^*)}, & x \in [r^*, \infty), \end{cases} \quad (4.12)$$

其中 r^* 由引理 4.1 给出, 常数 $\xi^* > r^*$ 、 C_2 和 C_3 分别由 (4.4)、(4.5) 和 (4.6) 来确定;

- (3) 当 $\kappa > 1$ 时, 值函数的表达式与 (4.12) 相同, 但是参数 $r^* > \xi^*$ 由引理 4.2 确定, 常数 C_2 和 C_3 由 (4.5) 和 (4.6) 确定.

通过上面的讨论可知, 假设公司可以同时选择正则注资和脉冲注资, 并且注资同时包含比例成本而每次脉冲注资会产生固定成本, 公司的最优注资策略是由注资的成本参数和模型参数确定的. 下面的命题具体解释了最优的注资策略.

命题 4.1 最优注资策略如下:

(1) 当 $\kappa = 1$ 时, 即两种注资类型有相同的比例成本率, 最优的注资策略只有一个阈值 $r^* = \xi^*$, 由引理 4.1 中的 (4.7) 确定. 当公司盈余低于 r^* 时, 以注资率 m 进行正则注资, 当公司盈余击中零时进行脉冲注资, 注资量为 ξ^* .

(2) 当 $\kappa < 1$ 时, 即正则注资比脉冲注资的比例成本率更高. 这种情形下, 只有当脉冲注资的固定成本大于一个常数 $K > -\rho_-(0)^{-1}(1 + \kappa(\ln \kappa - 1))$ 时, 最优注资策略有两个阈值 $r^* < \xi^*$, 由 (4.7) 和 (4.4) 唯一确定. 在该策略下, 当公司盈余低于 r^* 时, 以 m 的注资率进行正则注资; 当公司盈余击中零时进行脉冲注资, 注资量为 ξ^* . 反之, 当 $K \leq -\rho_-(0)^{-1}(1 + \kappa(\ln \kappa - 1))$ 时, 最优注资策略退化到命题 3.1 的情形.

(3) 当 $\kappa > 1$ 时, 即正则注资比脉冲注资的比例成本率低时, 最优的注资策略包含两个阈值 $r^* > \xi^*$, 它们由引理 4.2 中的 (4.9) 和 (4.10) 唯一确定. 在该策略下, 当公司盈余低于 r^* 时, 以 m 的注资率进行正则注资; 当公司盈余击中零时进行脉冲注资, 注资量为 ξ^* .

注 4.2 以上的命题和定理中 $\kappa < 1$ 和 $K > K_0 = -\rho_-(0)^{-1}(1 + \kappa(\ln \kappa - 1))$ 是非平凡条件. 令

$$g_1(\kappa) = -\rho_-(0)^{-1}(1 + \kappa(\ln \kappa - 1)),$$

通过简单的计算可知,

$$g_1'(\kappa) = -\rho_-(0)^{-1} \ln \kappa < 0.$$

函数 $g_1(\kappa)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递减, 再结合条件 $g_1(0) \rightarrow -\rho_-(0)^{-1} > 0$ 和 $g_1(1) = 0$, 可得临界点 K_0 总是非负的. 换言之, 当脉冲注资比正则注资的比例成本率低时, 只有当脉冲注资的固定成本 K 比临界值高时, 正则注资才是有意义的.

5 数值计算

本节观察模型参数和市场波动对最优注资策略和值函数的敏感性.

例 5.1 脉冲注资的固定成本 K 对最优注资策略和值函数的影响, 我们分为 $\kappa < 1$ 和 $\kappa > 1$ 两种情形分别讨论. 假设模型参数为 $\mu = 0.06$ 、 $\sigma = 0.3$ 和 $\delta = 0.02$, 而最大的正则注资率为 $m = 0.04$.

首先考虑 $\kappa = 0.8 < 1$. 图 1(a) 给出了固定成本参数 K 对最优注资策略阈值 r^* 和 ξ^* 的影响. 在这些参数假设下, 可求得临界值

$$K_0 = -\rho_-(0)^{-1}(1 + \kappa(\ln \kappa - 1)) = 0.0133,$$

如果 $K \leq K_0$, 那么优化问题退化为命题 3.1 的情形. 否则, 图 1(a) 显示随着固定成本参数 K 的递增, 脉冲注资量 ξ^* 和正则注资区间 $[0, r^*]$ 都逐渐变大. 另外, 随着固定成本参数的变小, 值函数也变小. 除此之外, 通过解析解 (4.4) 和图 1(b) 还可以得到以下结论. 固定成本参数 K 不影响最优注资策略两个阈值之间的差 $\xi^* - r^* = \rho_-(0)^{-1} \ln \kappa = 0.1381$, 也不影响值函数在这两个阈值点的函数值 $V(r^*) = -\rho_-(0)^{-1} = 0.6213$ 和 $V(\xi^*) = -\kappa \rho_-(0)^{-1} = 0.4971$.

其次, 令 $\kappa = 1.4 > 1$, 图 2(a) 展示了固定成本参数 K 对最优注资策略阈值 $r^* > \xi^*$ 的影响, 图 2(b) 是对值函数的影响, 其中成本参数不影响最优注资策略阈值的差

$$d^* = r^* - \xi^* = -\rho_-(0)^{-1} \ln \kappa = 0.2091,$$

同时也不影响值函数在阈值点的值 $V(r^*) = -\rho_-(0)^{-1} = 0.6213$ 和 $V(\xi^*) = 0.8504$. 该结论也可以直接从确定 d^* 的函数 (4.11) 得到, 而 $V(\xi^*)$ 也通过化简用 d^* 表达出来:

$$V(\xi^*) = \frac{m}{\delta} + \frac{\rho_-(m) - \rho_-(0)}{(\rho_+(m) - \rho_-(m))\rho_+(m)} e^{-\rho_+(m)d^*} + \frac{\rho_-(0) - \rho_+(m)}{(\rho_+(m) - \rho_-(m))\rho_-(m)} e^{-\rho_-(m)d^*}.$$

例 5.2 比例成本率 κ 对最优注资策略和值函数的影响. 取 $K = 1.1157$, 其他的模型参数和最大的正则注资率与例 5.1 中的相同.

图 1 比例成本参数 $\kappa = 0.8 < 1$. (a) 固定成本参数 K 对最优注资策略阈值 r^* 和 ξ^* 的影响; (b) 固定成本参数 K 对值函数 $V(x)$ 的影响

图 2 比例成本参数 $\kappa = 1.4 > 1$. (a) 固定成本参数 K 对最优注资策略阈值 r^* 和 ξ^* 的影响; (b) 固定成本参数 K 对值函数 $V(x)$ 的影响

回想比例成本参数 κ 的定义, 它其实是脉冲注资和正则注资比例成本率的比值. 图 3(a) 是当 $\kappa < 1$ 时 (脉冲注资比例成本率低于正则注资的比例成本率), 脉冲注资金量 ξ^* 将会高于正则注资的阈值 r^* , 而且随着 κ 越来越接近 1, 它们的差 $\xi^* - r^*$ 逐渐降低到零; 反之, 当比例成本参数 $\kappa > 1$ 时, 脉冲注资金量 ξ^* 低于正则注资的阈值 r^* . 另外, 图 3(b) 展示比例成本参数 κ 越高将导致越高的注资成本.

例 5.3 市场波动 σ 对最优注资策略和值函数的影响. 其余的模型参数保持不变 $\mu = 0.06$ 、 $\delta = 0.02$ 和 $K = 1.1157$, 最大正则注资率限制为 $m = 0.04$.

图 4 和 5 分别展示了在不同的比例成本参数 $\kappa = 0.8$ 和 $\kappa = 1.4$ 下, 市场波动对最优注资策略和值函数的影响. 总体上, 市场波动越大, 最优注资策略的两个阈值 r^* 和 ξ^* 之间的差越大, 同时值函数也越大. 这可以解释为, 市场波动越大, 公司将面临越多的市场风险, 因此, 公司需要更高的注资成本来维持公司正的现金流. 更大的脉冲注资金量 ξ^* 和越来越宽的正则注资区域 $[0, r^*]$ 是对最优融资策略的调整. 换句话说, 最优的注资策略会偏好具有相对较低比例成本率的注资模式.

图 3 固定成本参数 $K = 1.1157$. (a) 比例成本参数 κ 对最优注资策略 r^* 和 ξ^* 的影响; (b) 比例成本参数 κ 对值函数 $V(x)$ 的影响

图 4 比例成本参数 $\kappa = 0.8$. (a) 市场波动 σ 对最优注资策略 r^* 和 ξ^* 的影响; (b) 市场波动 σ 对值函数 $V(x)$ 的影响

图 5 比例成本参数 $\kappa = 1.4$. (a) 市场波动 σ 对最优注资策略 r^* 和 ξ^* 的影响; (b) 市场波动 σ 对值函数 $V(x)$ 的影响

致谢 对两名匿名审稿人的宝贵意见表示衷心感谢.

参考文献

- 1 Krouse C G, Lee W Y. Optimal equity financing of the corporation. *J Financ Quant Anal*, 1973, 8: 539–563
- 2 Sethi S P. Optimal equity and financing model of Krouse and Lee: Corrections and extensions. *J Financ Quant Anal*, 1978, 13: 487–505
- 3 Sethi S P, Taksar M I. Optimal financing of a corporation subject to random returns. *Math Finance*, 2002, 12: 155–172
- 4 Dickson D C M, Waters H R. Some optimal dividends problems. *Astin Bull*, 2004, 34: 49–74
- 5 Kulenko N, Schmidli H. Optimal dividend strategies in a Cramér-Lundberg model with capital injections. *Insurance Math Econom*, 2008, 43: 270–278
- 6 Løkka A, Zervos M. Optimal dividend and issuance of equity policies in the presence of proportional costs. *Insurance Math Econom*, 2008, 42: 954–961
- 7 Yao D, Yang H, Wang R. Optimal dividend and capital injection problem in the dual model with proportional and fixed transaction costs. *European J Oper Res*, 2011, 211: 568–576
- 8 Zhu J, Yang H. Optimal capital injection and dividend distribution for growth restricted diffusion models with bankruptcy. *Insurance Math Econom*, 2016, 70: 259–271
- 9 Yuen K C. Optimal dividends and reinsurance with capital injection under thinning dependence. In: *Proceedings of the 20th International Congress on Insurance: Mathematics and Economics*. Atlanta, 2016
- 10 Eisenberg J, Schmidli H. Optimal control of capital injections by reinsurance in a diffusion approximation. *Bl DGVFM*, 2009, 30: 1–13
- 11 Eisenberg J, Schmidli H. Minimising expected discounted capital injections by reinsurance in a classical risk model. *Scand Actuar J*, 2011, 2011: 155–176
- 12 Eisenberg J, Schmidli H. Optimal control of capital injections by reinsurance with a constant rate of interest. *J Appl Probab*, 2011, 48: 733–748
- 13 Zhou M, Yuen K C. Optimal reinsurance and dividend for a diffusion model with capital injection: Variance premium principle. *Econom Model*, 2012, 29: 198–207
- 14 Luo S, Taksar M. Minimal cost of a Brownian risk without ruin. *Insurance Math Econom*, 2012, 51: 685–693
- 15 孟辉, 郭冬梅, 周明. 有再保险控制下的非线性脉冲注资问题. *中国科学: 数学*, 2016, 46: 235–246
- 16 Zhou M, Yuen K C. Portfolio selection by minimizing the present value of capital injection costs. *Astin Bull*, 2015, 45: 207–238
- 17 Yang R C, Liu K H, Xia B. Optimal impulse and regular control strategies for proportional reinsurance problem. *J Appl Math Comput*, 2005, 18: 145–158
- 18 周明, 孟辉, 郭军义. 最优分红策略: 正则与脉冲混合控制问题. *中国科学: 数学*, 2015, 45: 1705–1724
- 19 Avanzi B, Pérez J L, Wong B, et al. On optimal joint reflective and refractive dividend strategies in spectrally positive Lévy models. *Insurance Math Econom*, 2017, 72: 148–162

Optimal stochastic impulse and regular control for capital injections: A hybrid strategy

Peng Li, Ming Zhou & Hui Meng

Abstract This paper investigates an optimal capital injection problem for a large company whose cash flow is described by a drifted Brownian motion. We firstly bring forward the fact that the decision maker can choose the types of capital injection including regular or/and impulse injections in practice. The decision maker has the option to decide the capital injection rate (with a maximum restriction) of regular injection and the capital injection time and the amount of impulse injection as well. We assume that both types of capital injections have proportional costs, and an additional fixed cost occurs associated with each impulse capital injection. From the point of view of cost control, the purpose of the decision maker is to find a strategy to minimize the cost of capital injections, with the minimal requirement that the firm has a positive cash flow. It leads to a mixed stochastic impulse and regular control problem. Under this criterion, we obtain the value function and the optimal control strategy which is a hybrid type of impulse and regular capital injections. At last, we also show the sensibilities of model parameters to the optimal strategy and the value function.

Keywords capital injections, hybrid strategy, impulse control, regular control, fixed cost, proportional cost

MSC(2010) 62P05, 91B30, 93E20

doi: 10.1360/SCM-2017-0030