离散凸多面体系统族的鲁棒正不变集

蒋卫华 黄琳^④ 楚天广^④

(哈尔滨工业大学数学系, 哈尔滨 150001; ④北京大学力学与工程科学系, 北京 100871)

摘要 动态系统的状态约束和控制约束等问题可归结为状态空间中某些集合的正不变性. 利用混合单调分解方法研究离散凸多面体系统族的线性状态约束集合的鲁棒正不变性. 对由矩阵凸多面体和加性区间扰动描述的线性离散系统族, 得到了鲁棒正不变集的充分必要条件; 对非线性系统族则得到有关充分条件. 这些条件均由系统族的顶点表述, 易于检验.

关键词 离散系统族 鲁棒正不变集 混合单调分解方法 顶点检验

动态系统的正不变集在状态约束和控制约束问题中具有基本意义. 文献[1~4]利用分段线性 Lyapunov 函数和推广的 Farkas 定理, 研究了确定性线性离散时间系统的线性状态正不变集并用于约束控制器的设计问题. 关于不确定系统鲁棒正不变集的研究尚不多见. 文献[5, 6]新近提出了动态系统的混合单调分解方法, 由此研究了一般的确定连续时间系统族的鲁棒正不变集. 这一方法直接利用系统的结构性质, 无需借助 Lyapunov 函数, 并适用于非线性情况, 具有一般性. 本文进一步将其发展到离散时间系统族, 给出鲁棒正不变集的基本结果. 混合单调分解的有关概念见文献[5, 6].

考虑离散系统族

$$x(k+1) = f(k, x(k)), \quad (1)$$

其中 $f(k, x(k)) \in \mathcal{F}(k, x(k)) = \text{Co}(f_1(k, x(k)), f_2(k, x(k)), \dots, f_r(k, x(k)))$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $f_s: \mathbf{J} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s \in \{1, 2, \dots, r\}$, $\mathbf{J} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

对于有界集合 $S(k) \in \mathbb{R}^n$, 如果 $\forall k_0 \in \mathbf{J}$, $\forall x(k_0) \in S(k_0)$, 只要 $k \geq k_0$ 都有 $x(k) \in S(k)$, 则称 $S(k)$ 为系统族(1)的鲁棒正不变集, 简记为 RPIS. 本文讨论集合

$$S[P(k), \alpha(k), \beta(k)] = \{x(k) \in \mathbb{R}^n; -\alpha(k) \leq_{P(k)} x(k) \leq_{\beta(k)}\}, \quad k \in \mathbf{J} \quad (2)$$

关于系统族(1)的鲁棒正不变性. 其中 $\alpha(k), \beta(k) \in \mathbb{R}^m$, $P(k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 当 $\alpha_k \equiv \beta_k$, $P \equiv I_n$ (I_n 为 n 阶单位阵) 时, 记集合(2)为 $S[\beta(k)]$.

引理 1^[7] 如果函数 $f(k, x(k))$ 具有混合单调分解 $F(k, u(k), v(k))$, 且存在 $p(k)$, $q(k): \mathbf{J} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \geq k_0$, $k_0 \in \mathbf{J}$, 满足

$$p(k+1) \leq F(k, p(k), q(k)), \quad k \geq k_0;$$

$$q(k+1) \geq F(k, q(k), p(k)), \quad k \geq k_0;$$

$$p(k_0) \leq x(k_0) \leq q(k_0).$$

则 $p(k) \leq x(k) \leq q(k)$, $k \geq k_0$, 其中 $x(k)$ 满足 $x(k+1) = f(k, x(k))$ ($k \geq k_0$).

为讨论方便 下面引入记号 $w_M(k) = \max\{\underline{w}(k), \overline{w}(k)\}$; $(A(k))_i$ 为矩阵 $A(k)$ 的第 i 行, $(w)_i$ 为向量 w 的第 i 个分量, $A^+(k) = [a_{ij}^+(k)]_{n \times n}$, $A^-(k) = [a_{ij}^-(k)]_{n \times n}$, 其中 $a_{ij}^+(k) = \sup\{0, a_{ij}(k)\}$, $a_{ij}^-(k) = \sup\{0, -a_{ij}(k)\}$.

$$A(k) = \begin{bmatrix} A^+(k) & A^-(k) \\ A^-(k) & A^+(k) \end{bmatrix}, \quad W(k) = \begin{bmatrix} \underline{w}(k) \\ \overline{w}(k) \end{bmatrix}, \quad \mu_k = \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix}.$$

当讨论中涉及的矩阵、向量、集合为定常时,则在相应记号中省略变量 k .

首先考虑由矩阵凸多面体和区间矩阵扰动向量所描述的离散线性时不变系统族.

$$x(k+1) = Ax(k) + w, \quad k \geq k_0, \quad (3)$$

其中 $A \in \Omega = \text{Co}(A_1, A_2, \dots, A_r)$, $-\underline{w} \leq w \leq \overline{w}$, $\underline{w}, \overline{w} \geq 0$.

定理 1 对于离散不确定性系统族(3):

(1) $S[I, \beta]$ 是 RPIS 当且仅当 $(I_n - A_s) \beta \geq_{WM}$, $\forall s = 1, 2, \dots, r$;

(2) $S[I, \alpha, \beta]$ 是 RPIS 当且仅当 $(I_{2n} - A_s) \mu \geq_W$, $\forall s = 1, 2, \dots, r$;

(3) $S[I, \alpha(k), \beta(k)]$ 是 RPIS 当且仅当 $\mu(k+1) - A_s \mu(k) \geq_W$, $\forall s = 1, 2, \dots, r$;

(4) 设 $w \equiv 0$, 则 $S[P, \alpha, \beta]$ 是 RPIS 当且仅当 $\forall s = 1, 2, \dots, r, \exists H_s \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 使得 $PA_s = H_s P$, $(I_{2m} - H_s) \mu \geq_0$.

证 (1), (2) 为 (3) 的特例. 我们仅对 (3), (4) 做简要证明.

(1) 充分性. 对于 $\forall A = \sum_{s=1}^r k_s A_s \in \Omega$, $\sum_{s=1}^r k_s = 1$, $k_s \geq 0$, $s = 1, 2, \dots, r$, $Ax(k) + w$ 的混合单调分解为 $F(k, u(k), v(k)) = A^+ u(k) - A^- v(k) + w$, 且 $A^+ \leq \sum_{s=1}^r k_s A_s^+$, $A^- \leq \sum_{s=1}^r k_s A_s^-$. 由假设条件知 $A \mu(k) + w \leq \sum_{s=1}^r k_s (A_s \mu(k) + w) \leq \mu(k+1)$, 即 $F(k, -\alpha(k), \beta(k)) \geq -\alpha(k+1)$, $F(k, \beta(k), -\alpha(k)) \leq \beta(k+1)$. 由引理 1, 当 $-\alpha(k_0) \leq x(k_0) \leq \beta(k_0)$, $k \geq k_0$ 时有 $-\alpha(k) \leq x(k) \leq \beta(k)$, 充分性得证.

必要性. 反证之. 假设对于某 $s \in \{1, 2, \dots, r\}$, 某 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 和某 $k_0 \in \mathbb{J}$, 使得 $(A_s^+)_i \alpha(k_0) + (A_s^-)_i \beta(k_0) + (\underline{w})_i > (\alpha(k_0+1))_i$ 或 $(A_s^-)_i \alpha(k_0) + (A_s^+)_i \beta(k_0) + (\overline{w})_i > (\beta(k_0+1))_i$. 相应地取 $x(k_0) \in S(I, \alpha(k_0), \beta(k_0))$ 的各分量为

$$(x(k_0))_j = \begin{cases} (-\alpha(k_0))_j, & a_{ij}^{(s)} \geq 0, \\ (\beta(k_0))_j, & a_{ij}^{(s)} < 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad (x(k_0))_j = \begin{cases} (\beta(k_0))_j, & a_{ij}^{(s)} \geq 0, \\ (-\alpha(k_0))_j, & a_{ij}^{(s)} < 0. \end{cases}$$

其中 $j = 1, 2, \dots, n$. 取 $(w)_i = -(\underline{w})_i$ 或 $(w)_i = (\overline{w})_i$, 相应地得出结论

$$(x(k_0+1))_i < -(\alpha(k_0+1))_i \quad \text{或} \quad (x(k_0+1))_i > (\beta(k_0+1))_i,$$

与 $S[I, \alpha(k), \beta(k)]$ 是 RPIS 矛盾. 必要性得证.

(2) 充分性. 只要取变换 $y(k) = Px(k)$, $k \geq k_0$. 由假设条件及 (1) 知 $S[I, \alpha, \beta]$ 为系统 $y(k+1) = Hy(k)$ 的 RPIS, 其中 $H \triangleq \sum_{s=1}^r k_s H_s$. 即 $S[P, \alpha, \beta]$ 为系统(3)的 RPIS.

必要性. 记 $G = [P^T \mid -P^T]^T$, $\gamma = [\beta^T \mid \alpha^T]^T$, 则 $S[G, \gamma] \triangleq \{x(k) \in \mathbb{R}^n: Gx(k) \leq \gamma\} = S[P, \alpha, \beta]$. 由假设条件, $S[G, \gamma]$ 是系统 $x(k+1) = A_s x(k)$ ($k \geq k_0$) 的正不变集, 其中 $s \in \{1, 2, \dots, r\}$. 由推广的 Farkas 定理^[3,4]知存在 $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$, $B_i \in \mathbb{R}_+^{m \times m}$, $i = 1, 2, 3, 4$, 使得

$BG = GA_s$. 取 $H_s = B_1 - B_2$, 则 $H_s P = PA_s$. 利用变换 $y(k) = Px(k)$, $k \geq k_0$ 及已知

条件知 $S[I, \alpha, \beta]$ 是系统 $y(k+1) = H_s y(k)$, $k \geq k_0$ 的正不变集. 再由()有 $(I_{2m} - H_s) \mu \geq 0$, $s \in \{1, 2, \dots, r\}$. 必要性得证.

类似地对离散线性时变系统族

$$x(k+1) = A(k)x(k) + w(k), \quad k \geq k_0, \quad (4)$$

其中 $A \in \Omega(k) = \text{Co}(A_1(k), A_2(k), \dots, A_r(k))$; $-w(k) \leq w(k) \leq \bar{w}(k)$, 有结论

定理2 对于离散系统族(4):

- i $S[\beta(k)]$ 是 RPIS 当且仅当 $\beta(k+1) - |A_s(k)| \beta(k) \geq_{w_M(k)}$, $\forall s = 1, 2, \dots, r$;
- ii $S(I, \alpha(k), \beta(k))$ 是 RPIS 当且仅当 $\mu(k+1) - A_s(k) \mu(k) \geq_{W(k)}$, $\forall s = 1, 2, \dots, r$;
- iii 设 $w(k) \equiv 0$, 则 $S[P(k), \alpha, \beta]$ 是 RPIS 当且仅当 $\forall s = 1, 2, \dots, r, \exists H_s(k) \in R^{m \times m}$, 使得 $P(k+1)A_s(k) = H_s(k)P(k)$, $[I_{2m} - H_s(k)] \mu \geq 0$;
- iv 设 $w(k) \equiv 0$, 则 $S[P(k), \alpha(k), \beta(k)]$ 是 RPIS 当且仅当 $\forall s = 1, 2, \dots, r, \exists H_s(k) \in R^{m \times m}$, 使得 $P(k+1)A_s(k) = H_s(k)P(k)$, $\mu(k+1) - H_s(k) \mu(k) \geq 0$.

根据双边比较引理1, 对于离散非线性系统族(1)有结论

定理3 设 $\forall s \in \{1, 2, \dots, r\}, f_s$ 具有混合单调分解 $F_s(k, u(k), v(k))$, 如果 $-\alpha(k+1) \leq F_s(k, -\alpha(k), \beta(k))$, $\beta(k+1) \geq_{F_s(k, \beta(k), -\alpha(k))}$, $k \geq k_0$; 那么 $S[I, \alpha(k), \beta(k)]$ 是系统族(1)的 RPIS.

例 考虑系统族(3), 其中 $A \in \Omega = \text{Co}(A_1, A_2)$, $A_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ -1.2 & 0.3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -2.0 & 0.2 \end{bmatrix}$, $w = [0.01 \quad 0.03]^T$, $\bar{w} = [0.01 \quad 0.02]^T$. 设 $\beta = [0.1 \quad 0.3]^T$, 讨论集合 $S[\beta]$ 的正不变性. 由定理1, $w_M = [0.01 \quad 0.03]^T$, $I - |A_1| \beta = [0.01 \quad 0.09]^T \geq_{w_M}$; $I - |A_2| \beta = [0.01 \quad 0.04]^T \geq_{w_M}$, 知 $S[\beta]$ 是该系统族的 RPIS.

致谢 本工作作为国家自然科学基金(批准号: 69774007), 国家攀登计划和哈尔滨工业大学校基金资助项目.

参 考 文 献

- 1 Bitsoris G. Positively invariant polyhedral sets of discrete-time linear systems. Int J Contr, 1988, 47(6): 1713~ 1726
- 2 Benzaouia A, Burgat C. Regulator problem for linear discrete-time systems with nonsymmetrical constrained control. Int J Contr, 1988, 48(6): 2441~ 2451
- 3 Hennet J C. Une extension du lemme de Farkas' et son application au probleme de regulation lineaire sous contraintes. C R Acad Sci Paris, Serie I, 1989, 308: 415~ 419
- 4 Hennet J C, Beziat J P. A class of invariant regulators for the discrete-time linear constrained regulation problem. Automatica, 1991, 27(3): 549~ 554
- 5 楚天广, 黄琳. 凸多面体系统族的鲁棒正不变集——混合单调方法. 秦化淑主编, 中国控制会议论文集, 青岛, 1996. 193~ 198
- 6 Chu Tianguang, Huang Lin. Mixed monotone decomposition of dynamical systems with application. Chinese Sci Bull, 1998, 43(14): 1171~ 1175
- 7 蒋卫华, 黄琳, 楚天广. 离散凸多面体系统族的鲁棒正不变集-混合单调方法. 秦化淑主编. 中国控制会议论文集, 武汉: 武汉出版社, 1997. 227~ 234

(1998-11-12 收稿, 1999-03-22 收修改稿)

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/csb1999-44-12-1272>