一个关于不可压液晶系统的适当弱解的局部 Serrin 型的正则性条件

刘宪高, 夏属生, 张孝涛*

复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: xgliu@fudan.edu.cn, 12110180007@fudan.edu.cn, 13110180015@fudan.edu.cn

收稿日期: 2017-12-30; 接受日期: 2018-07-20; 网络出版日期: 2018-12-29; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11631011) 资助项目

摘要 本文研究液晶流中简化版的 Ericksen-Leslie 方程. 对于三维不可压液晶系统, 本文证明了它的适当弱解在 Neustupa (2014) 条件下的部分正则性结果.

关键词 液晶 恰当弱解 部分正则性

MSC (2010) 主题分类 35Q35, 76A15

1 引言

我们研究如下简化版的三维不可压液晶系统:

$$\begin{cases} v_t - \nu \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla p = -\lambda \operatorname{div}(\nabla d \odot \nabla d), \\ \operatorname{div} v = 0, \\ d_t + v \cdot \nabla d = \gamma(\Delta d - f(d)), \end{cases} \quad (1.1)$$

这里 $v = (v_1, v_2, v_3)$ 是速度场; p 是标量压强; $d = (d_1, d_2, d_3)$ 是惩罚后的光学分子方向; $f(d) = \nabla F(d)$, $F(d) = \frac{1}{4\sigma^2}(|d|^2 - 1)^2$; $\nabla d \odot \nabla d$ 是一个对称的张量, 它的组成部分 $(\nabla d \odot \nabla d)_{ij} = \nabla_i d \cdot \nabla_j d$ (我们在时空区域 $Q = \Omega \times [0, T]$ 上研究这个方程组, 其中 Ω 是三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑有界区域). 同时, 方程组的初边值条件为

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= v_0(x), \quad \operatorname{div}(v_0) = 0, \quad d(x, 0) = d_0(x), \quad x \in \Omega, \\ v(x, t) &= 0, \quad d(x, t) = d_0(x), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \end{aligned}$$

系统 (1.1) 是变长度的 Leslie 系统, 对应的是 Ginzburg-Landau 能量 $\int_{\Omega} (\frac{1}{2}|\nabla d|^2 + \frac{(1-|d|^2)^2}{4\sigma^2})dx$, 这里 $d: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\sigma > 0$). 当这个能量变成 Dirichlet 能量 $\int_{\Omega} |\nabla d|^2 dx$ 时, 它变成了简化版的 Ericksen-Leslie

英文引用格式: Liu X G, Xia S S, Zhang X T. A local Serrin-type regularity criterion for a suitable weak solution to the incompressible liquid crystal system (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 967–990, doi: 10.1360/SCM-2017-0892

模型 (参见文献 [1–3]), 对于它的整体的 Leray-Hopf 型弱解在二维或者三维空间的存在性, 可以参见文献 [4, 5] 以及这些文献中的参考文献. 对于系统 (1.1), Lin 和 Liu^[6] 证明了其在二维空间经典解的存在性以及在三重空间弱解的存在性. 之后, 他们证明了一个恰当弱解的部分正则性的结果, 这个结果是经典的 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 定理^[7] 在液晶上的推广. 对于系统 (1.1) 三维空间上弱解的正则性, Liu 和 Cui^[8] 证明了弱解在全空间 $\mathbb{R}^3$ 上 Serrin 条件下的正则性结果. Liu 等^[9] 证明了 Serrin 条件^[10, 11] 下弱解的内部正则性结果. Liu 等^[12] 给出了速度场关于某一个方向的导数满足某些积分条件下弱解的正则性结果. 其他的关于系统 (1.1) 的唯一性和正则性的结果可以参见文献 [13–15] 及其中的参考文献.

本文主要研究不可压液晶系统 (1.1) 的恰当弱解的部分正则性, 而它与 Navier-Stokes 方程有很多相似之处, 所以, 我们有必要回顾一下不可压流体力学中的 Navier-Stokes 方程组弱解的有关部分正则性理论, 方程组在 $Q = \Omega \times [0, T]$ 中满足

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla q = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

它的初边值条件为

$$u(\cdot, 0) = u_0(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Scheffer^[16, 17] 第一个给出了系统 (1.2) 的恰当弱解部分正则性结果, 即在一些条件下, 他证明了方程的恰当弱解的奇异点的 Hausdorff 维数至多是 $\frac{5}{3}$. 紧接着, Caffarelli 等^[18] 改进了 Scheffer 的结果 (其他的改进可以参见文献 [19–23]). 他们通过局部正则性条件证明了恰当弱解的奇异点的 Hausdorff 维数至多是 1, 这个正则性条件是, 存在一个小的常数 $\epsilon > 0$ 使得

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\delta} \int_{t_0-7\delta^2/8}^{t_0+\delta^2/8} \int_{B_\delta(x_0)} |\nabla u|^2 dx dt < \epsilon. \quad (1.3)$$

如果这个正则性条件被满足, 那么 (x_0, t_0) 是恰当弱解的正则点. Lin^[21] 通过尺度变换简化了他们的证明. 其结论是, 如果存在一个小常数 $\epsilon > 0$ 使得

$$\frac{1}{\delta^2} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \int_{B_\delta(x_0)} (|u|^3 + |q|^{\frac{3}{2}}) dx dt < \epsilon \quad (1.4)$$

对某一个 $\delta > 0$ 成立, 那么 (x_0, t_0) 是恰当弱解的正则点. 接着, Serëgin^[24] 改进了这一结果 (也可以参见文献 [25–27]): 如果存在一个小 $\epsilon > 0$ 使得

$$\frac{1}{\delta^2} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \int_{B_\delta(x_0)} |u|^3 dx dt < \epsilon \quad (1.5)$$

对所有充分小的 $\delta > 0$ 都成立, 那么 (x_0, t_0) 是恰当弱解的正则点. 对于更一般的情形, Wolf^[23] 证明了, 对于 $3 \leq r, s \leq \infty$ 和 $\delta > 0$, 如果存在一个小 $\epsilon > 0$ 使得

$$\delta^{s[1-(\frac{2}{r}+\frac{3}{s})]} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \left(\int_{B_\delta(x_0)} |u|^s dx \right)^{\frac{r}{s}} dt < \epsilon \quad (1.6)$$

成立, 那么 u 在集合 $\overline{B_{\delta/2}(x_0)} \times [t_0 - \delta^2/4, t_0]$ 上是 Hölder 连续的. 还有 Takahashi^[28] 得到的结果: 对于 $2/r + 3/s \leq 1, 3 < s \leq \infty$, 如果存在一个小 $\epsilon > 0$ 使得

$$\|u\|_{L_w^r(t_0-\rho^2, L^s(B_\rho(x_0)))} < \epsilon \quad (1.7)$$

成立 (这里 L_w^r 表示弱 L^r 范数), 那么 (x_0, t_0) 是恰当弱解的一个正则点. 这些正则性条件都是考虑 u 或者 q 在后向的抛物球 $Q_{a,\rho}$ 上的积分比较小, 这里

$$Q_{a,\rho} := \{(x, t) \in Q_T; t_0 - \rho^2 < t < t_0, |x - x_0| < \sqrt{a\rho}\}.$$

Neustupa^[29,30] 改进了 Takahashi 的结果 (1.7), 即 u 仅仅在 $U_{a,\rho}$ 上作积分, 这里

$$U_{a,\rho} := \{(x, t) \in Q_T; t_0 - \rho^2 < t < t_0, \sqrt{a(t_0 - t)} < |x - x_0| < \sqrt{a\rho}\}.$$

在本文中, 我们旨在对液晶系统 (1.1) 建立 Seregin 和 Neustupa 正则性条件. 在此之前我们先回顾系统 (1.1) 的恰当弱解的定义和局部能量不等式 (参见文献 [7]).

定义 1.1 当如下的三个条件成立时, (v, d, p) 称为方程组 (1.1) 在有界集 $Q \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ 上的恰当弱解:

- (1) (v, d, p) 在分布意义下满足方程组 (1.1);
- (2) 存在两个常数 E_1 和 E_2 使得

$$\int_{Q_t} (|v|^2 + |\nabla d|^2 + F(d)) dx < E_1, \quad \int_Q (|\nabla v|^2 + |\Delta d - f(d)|^2 + |p|^{\frac{3}{2}}) dz < E_2,$$

这里 $Q_t = Q \cap (\mathbb{R}^3 \times \{t\})$;

- (3) 对于任意的 $\varphi \in C^\infty(Q)$, $\varphi \geq 0$, 局部能量不等式 (1.8) 成立.

在文献 [7] 中, 恰当弱解的存在性已经被证明. 这种恰当弱解会满足如下的局部能量不等式:

$$\begin{aligned} 2 \int_Q (|\nabla v|^2 + |\nabla^2 d|^2) \varphi dz &\leq \int_Q (|v|^2 + |\nabla d|^2) (\varphi_t + \Delta \varphi) dz + \int_Q (|v|^2 + |\nabla d|^2 + 2p) v \cdot \nabla \varphi dz \\ &\quad + \int_Q ((v \cdot \nabla) d \odot \nabla d) \cdot \nabla \varphi dz + \int_Q \nabla f(d) \nabla d \varphi dz. \end{aligned} \quad (1.8)$$

注 1.1 在文献 [7, 定理 2.6] 中, Lin 和 Liu 证明了, 如果存在常数 $C > 0$ 和小常数 $\epsilon > 0$ 使得系统 (1.1) 在 $Q_1(0, 0)$ 上的恰当弱解满足如下性质:

$$\int \int_{Q_1(0,0)} (|v|^3 + |\nabla d|^3 + |p|^{\frac{3}{2}}) dx dt < \epsilon,$$

则对于几乎所有的 Lebesgue 点 $(x, t) \in Q_{\frac{1}{2}}(0, 0)$, 有 $|v(x, t)| + |\nabla d| < C$, 这里

$$Q_r(x, t) = (t - r^2, t) \times B_r(x).$$

接下来证明关于液晶方程 (1.1) 的恰当弱解的两个部分正则性结果.

不失一般性, 我们仅仅考虑原点 $(0, 0)$ 的情形 (因为小能量条件是尺度 (scaling) 不变量, 对于一般情形可进行尺度变换和坐标平移转化成原点的情形).

定理 1.1 令 (v, d, p) 是方程 (1.1) 在 Q_1 上的恰当弱解. 假如存在一个小常数 $\epsilon > 0$, 使得

$$\sup_{0 < r \leq 1} \frac{1}{r^2} \int_{Q_r} (|v|^3 + |\nabla d|^3) dz < \epsilon \quad (1.9)$$

成立, 则 $z = (0, 0)$ 是一个正则点.

定理 1.2 令 (v, d, p) 是系统 (1.1) 的恰当弱解, 同时 $(x_0, t_0) \in Q_T$, $a_0 = \min\{4\nu\lambda_s(B_1), \frac{1}{4}\gamma\pi^2\}$. 令 ρ 充分小使得 $Q_{a,\rho} \subset Q_T$. 对于 $0 < a < a_0$, 如果 v 和 d 满足如下条件:

$$\int_{t_0-\rho^2}^{t_0} \left(\int_{\sqrt{a(t_0-t)} < |x-x_0| < \sqrt{a}\rho} |v(x, t)|^s + |\nabla d|^s dx \right)^{\frac{r}{s}} dt < \infty, \quad (1.10)$$

这里 s 和 r 满足

$$3 \leq r < \infty, \quad 3 < s \leq 9, \quad \frac{2}{r} + \frac{3}{s} = 1, \quad (1.11)$$

则 (x_0, t_0) 是恰当弱解的正则点.

本文的结构如下: 第 2 节利用两个引理证明定理 1.1; 第 3 节给出定理 1.2 的证明.

2 去掉压强 p 的正则性条件

在本节, 为了方便起见, 令 $\lambda = \gamma = 1$. 我们定义如下符号:

$$\begin{aligned} A(r; v, \nabla d) &:= \operatorname{ess\,sup}_{-r^2 < t < 0} \frac{1}{r} \int_{B_r} (|v(x, t)|^2 + |\nabla d(x, t)|^2) dx, \quad D_0(r; p) := \frac{1}{r^2} \int_{Q_r} |p - [p]_{B_r}|^{\frac{3}{2}} dz, \\ C(r; v, \nabla d) &:= \frac{1}{r^2} \int_{Q_r} (|v|^3 + |\nabla d|^3) dz, \quad E(r; v, \nabla d) := \frac{1}{r} \int_{Q_r} (|\nabla v|^2 + |\nabla^2 d|^2) dz, \end{aligned}$$

这里 $z = (x, t)$,

$$[p]_{B_r} := \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} p(x, t) dx.$$

首先, 我们给出更好的局部能量不等式 (参见文献 [7]):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \{t\}} (|v|^2 + |\nabla d|^2) \phi dx + 2 \int_Q (|\nabla v|^2 + |\nabla^2 d|^2) \phi dz \\ & \leq \int_Q (|v|^2 + |\nabla d|^2) (\phi_t + \Delta \phi) dz + \int_Q (|v|^2 + |\nabla d|^2 + 2p) v \cdot \nabla \phi dz \\ & \quad + \int_Q ((v \cdot \nabla) d \odot \nabla d) \cdot \nabla \phi dz + \int_Q \nabla f(d) \nabla d \phi dz. \end{aligned} \quad (2.1)$$

令 ϕ^R 是一个如下的光滑截断函数:

$$\phi^R(x) = \begin{cases} 1, & \text{在 } Q_{R/2} \text{ 内,} \\ \in [0, 1], & \text{在 } Q_R \setminus Q_{R/2} \text{ 内,} \\ 0, & \text{在 } \mathbb{R}^4 \setminus Q_R \text{ 内,} \end{cases} \quad (2.2)$$

这里

$$|\phi_t^R| \leq cR^{-2}, \quad |\nabla_i \phi^R| \leq cR^{-1}, \quad |\nabla_{ij} \phi^R| \leq cR^{-2}. \quad (2.3)$$

令 $\Omega = B_R$, $Q = (-R^2, 0) \times B_R$. 将光滑截断函数 ϕ^R 代入到改进版的局部能量不等式并且利用 Hölder 不等式和 Young 不等式, 有

$$A\left(\frac{R}{2}; v, \nabla d\right) + E\left(\frac{R}{2}; v, \nabla d\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq c(C(R; v, \nabla d)^{\frac{2}{3}} + C(R; v, \nabla d) + C^{\frac{1}{3}}(R; v, \nabla d)D_0^{\frac{2}{3}}(R; p)) + cR^2C^{\frac{2}{3}}(R; v, \nabla d) \\
&\leq c(C(R; v, \nabla d)^{\frac{2}{3}} + C(R; v, \nabla d) + C^{\frac{1}{3}}(R; v, \nabla d)D_0^{\frac{2}{3}}(R; p)),
\end{aligned} \quad (2.4)$$

这里 $0 < R < 1$ 并且 c 不依赖于 $R, v, \nabla d$ 和 p .

下面证明两个引理, 它们可以用来证明定理 1.1.

引理 2.1 令 (v, d, p) 是方程组 (1.1) 的恰当弱解, 则对于 $0 < r \leq \rho \leq R$, 有

$$D_0(r; p) \leq c \left[\left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{5}{2}} D_0(\rho; p) + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 C(\rho; v, \nabla d) \right]. \quad (2.5)$$

证明 为了获得 Δp 的表达式, 我们对方程组 (1.1) 的第一个方程求散度. 结合 $\operatorname{div} v = 0$, 则对于几乎每个 $t \in (-\rho^2, 0)$, 压强 p 在分布意义下满足以下方程:

$$\Delta p(\cdot, t) = -\operatorname{div} \operatorname{div} v(\cdot, t) \otimes v(\cdot, t) - \operatorname{div} \operatorname{div} \nabla d(\cdot, t) \odot \nabla d(\cdot, t), \quad \text{在 } B_\rho \text{ 内}, \quad (2.6)$$

这里 $(v \otimes v)_{ij} = v_i v_j$. 我们把压强 p 分解为

$$p = p_1 + p_2,$$

这里, 对于几乎每个 $t \in (-\rho^2, 0)$, 在分布意义下成立:

$$\begin{cases} \Delta p_1(\cdot, t) = -\operatorname{div} \operatorname{div} v(\cdot, t) \otimes v(\cdot, t) - \operatorname{div} \operatorname{div} \nabla d(\cdot, t) \odot \nabla d(\cdot, t), & \text{在 } B_\rho \text{ 内,} \\ p_1(\cdot, t) = 0, & \text{在 } \partial B_\rho \text{ 上.} \end{cases} \quad (2.7)$$

通过 Laplace 算子理论和 Calderón-Zygmund 不等式 (参见文献 [31]), 我们有

$$\int_{B_\rho} |p_1(x, t)|^{\frac{3}{2}} dx \leq c \int_{B_\rho} (|v(x, t)|^3 + |\nabla d(x, t)|^3) dx.$$

令 $0 < r \leq \frac{\rho}{2}$, 则有

$$\begin{aligned}
D_0(r; p) &\leq c[D_0(r; p_1) + D_0(r; p_2)] \\
&\leq c \left[\frac{1}{r^2} \int_{Q_\rho} |p_1|^{\frac{3}{2}} dz + D_0(r; p_2) \right] \\
&\leq c \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^2 C(\rho; v, \nabla d) + D_0(r; p_2) \right].
\end{aligned} \quad (2.8)$$

利用调和函数的一些估计, 我们有

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in B_r} |p_2(x, t) - [p_2]_{B_r}(t)| &\leq cr \sup_{x \in B_{\rho/2}} |\nabla p_2(x, t)| \\
&\leq c \frac{r}{\rho} \sup_{x \in B_{\rho/2}} |p_2(x, t) - [p_2]_{B_\rho}(t)| \\
&\leq c \frac{r}{\rho^3} \left(\int_{B_\rho} |p_2(x, t) - [p_2]_{B_\rho}|^{\frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

于是,

$$D_0(r; p_2) \leq cr \left(\frac{r}{\rho^3} \right)^{\frac{2}{3}} \int_{-r^2}^0 \int_{B_\rho} |p_2(x, t) - [p_2]_{B_\rho}|^{\frac{3}{2}} dx dt$$

$$\begin{aligned}
 &\leq c \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{5}{2}} D_0(\rho; p_2) \\
 &\leq dc \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{5}{2}} [D_0(\rho; p_1) + D_0(\rho; p)] \\
 &\leq c \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{5}{2}} [C(\rho; v, \nabla d) + D_0(\rho; p)].
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

最终, 通过估计式 (2.8) 和 (2.9) 我们可以得到估计式 (2.5). $\square$

引理 2.2 假设 (v, d, p) 是方程组 (1.1) 在 Q 上的恰当弱解. 如果

$$\sup_{0 < r \leq 1} C(r; v, \nabla d) = C_0 < \infty, \tag{2.10}$$

则对于所有的 $0 < r \leq \frac{1}{2}$, 有

$$A(r; v, \nabla d) + D_0(r; p) + E(r; v, \nabla d) \leq c(r^2 D_0(1) + C_0 + C_0^{\frac{2}{3}}). \tag{2.11}$$

证明 通过条件 (2.10) 和不等式 (2.5), 我们有

$$D_0(r; p) \leq c \left[\left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{5}{2}} D_0(\rho; p) + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 C_0 \right], \tag{2.12}$$

这里 $0 < r \leq \rho \leq 1$. 令 $r = \theta\rho$, $0 < \theta < 1$, 则

$$D_0(\theta\rho; p) \leq c [\theta^{\frac{5}{2}} D_0(\rho; p) + \theta^{-2} C_0].$$

选取小 $\theta > 0$ 使得 $c\theta^{\frac{1}{2}} \leq 1$ ($\theta = \theta(c)$), 则对于所有的 $0 < \rho \leq 1$, 有

$$D_0(\theta\rho; p) \leq \theta^2 D_0(\rho; p) + c\theta^{-2} C_0,$$

这里 c 是一个不依赖于 r 、 v 、 d 和 p 的常数. 改变 ρ 的值并且对上面的不等式进行迭代, 可得

$$D_0(\theta^k \rho; p) \leq \theta^{2k} D_0(\rho; p) + c \left(\sum_{i=1}^k \theta^{2i-2} \right) C_0$$

对于所有的自然数 k 成立. 因为 $0 < \theta = \theta(c) < 1$, 所以, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\sum_{i=1}^k \theta^{2i-2}$ 是收敛的. 我们可以把这个不等式写为

$$D_0(\theta^k \rho; p) \leq \theta^{2k} D_0(\rho; p) + cC_0$$

对于所有的自然数 k 成立. 取 $\rho = 1$, 则有

$$D_0(\theta^k; p) \leq \theta^{2k} D_0(1; p) + cC_0$$

对于所有的自然数 k 成立. 结合不等式 (2.12), 我们有

$$D_0(r; p) \leq cr^2 D_0(1; p) + cC_0 \tag{2.13}$$

对于任意的 $0 < r < 1$ 成立.

接着, 通过不等式 (2.4) 和 (2.13), 可得

$$\begin{aligned} A\left(\frac{R}{2}; v, \nabla d\right) + E\left(\frac{R}{2}; v, \nabla d\right) &\leq c[C_0^{\frac{2}{3}} + C_0 + C_0^{\frac{1}{3}} D_0^{\frac{2}{3}}(R; p)] \\ &\leq c[C_0^{\frac{2}{3}} + C_0 + D_0(R; p)] \\ &\leq c[C_0^{\frac{2}{3}} + C_0 + R^2 D_0(1; p)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

对于任意的 $0 < R < 1$ 成立. 所以,

$$A(r; v, \nabla d) + E(r; v, \nabla d) + D_0(r; v, \nabla d) \leq c(r^2 D_0(1; p) + C_0 + C_0^{\frac{2}{3}})$$

对于任意的 $0 < r < 1$ 成立. 至此, 引理证毕. $\square$

定理 1.1 的证明 我们利用反证法来证明. 假设定理 1.1 的结论是错误的, 那么存在一组方程组 (1.1) 在 Q 上的恰当弱解序列 (v^n, d^n, p^n) , 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 使得

$$C(r_n; v^n, \nabla d^n) = \frac{1}{r_n^2} \int_{Q_{r_n}} (|v^n|^3 + |\nabla d|^3) dz \leq \frac{1}{n} \quad (2.15)$$

成立, 但是, $z = (0, 0)$ 是恰当弱解 (v^n, d^n, p^n) 的奇异点, 这里

$$r_n \in \left(0, \min \left\{ \frac{1}{2}, D_0^{\frac{1}{2}}(1; p^n) \right\} \right). \quad (2.16)$$

根据注 1.1, 存在一个不依赖于 n 的正数 ϵ_0 , 使得

$$C(r; v^n, \nabla d^n) + D_0(r; p^n) \geq \epsilon_0 > 0 \quad (2.17)$$

对于任意的 $0 < r < 1$ 成立. 不等式 (2.17) 对任意的自然数 n 都成立.

通过条件 (1.9) 可知, 存在一个不依赖于 n 正数 M , 使得

$$C(r; v^n, \nabla d^n) \leq M \quad (2.18)$$

对于任意的 $0 < r < 1$ 成立. 通过引理 2.2 和不等式 (2.18), 我们有

$$\begin{aligned} A(r; v^n, \nabla d^n) + D_0(r; p^n) + E(r; v^n, \nabla d^n) \\ \leq c \left[\left(\frac{r}{r_n} \right)^2 r_n^2 D_0(1; p^n) + M + M^{\frac{2}{3}} \right] \\ \leq d_0(M) \end{aligned} \quad (2.19)$$

对于任意的 $0 < r < 1$ 成立.

对恰当弱解 v^n 、 d^n 和 p^n 作自然的尺度变换, 得到

$$\begin{aligned} u^n(y, s) &= r_n v^n(r_n y, r_n^2 s), \quad e^n(y, s) = d^n(r_n y, r_n^2 s), \\ q^n(y, s) &= r_n^2 p^n(r_n y, r_n^2 s), \quad g^n(e^n(y, s)) = r_n^2 f(d^n(r_n y, r_n^2 s)), \end{aligned}$$

这里 $(y, s) \in Q$. 容易验证: 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 成立

$$(u^n, e^n, q^n) \text{ 在 } Q \text{ 中是 (1.1) 的恰当弱解.} \quad (2.20)$$

对于任意的 $0 < r \leq 1$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 成立

$$C(r; u^n, \nabla e^n) \leq M. \quad (2.21)$$

对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 成立

$$C(r_n; v^n, \nabla d^n) = C(1; u^n, \nabla e^n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.22)$$

对于任意的 $0 < r \leq 1$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 同时成立

$$C(r; u^n, \nabla e^n) + D_0(r; q^n) \geq \epsilon_0 > 0, \quad (2.23)$$

$$A(r; u^n, \nabla e^n) + D_0(r; q^n) + E(r; u^n, \nabla e^n) \leq d_0(M). \quad (2.24)$$

通过估计 (2.24) 可知, 存在一个子序列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ 使得

$$\begin{aligned} u^{n_k} &\overset{*}{\rightharpoonup} u, \quad \nabla e^{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla e, \quad \text{在 } L_{2,\infty}(Q) \text{ 中}, \\ \nabla u^{n_k} &\rightharpoonup \nabla u, \quad \nabla^2 e^{n_k} \rightharpoonup \nabla^2 e, \quad \text{在 } L_2(Q) \text{ 中}, \\ q^{n_k} - [q^{n_k}]_B &\rightharpoonup q, \quad \text{在 } L_{\frac{3}{2}}(Q) \text{ 中}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

接下来, 我们需要处理那些非线性项的收敛问题, 这时就需要一些强收敛的结果. 为了达到这一目的, 我们利用一些标准的方法和方程组 (1.1) 来估计 u_t^n 和 ∇e_t^n 的范数: 对于任意的 $w \in C_0^\infty(Q; \mathbb{R}^3)$ 和任意的 $\psi \in C_0^\infty(Q; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, 有

$$\begin{aligned} \int_Q u_t^n \cdot w dz &= \int_Q (u^n \otimes u^n : \nabla w - \nabla u^n : \nabla w + (q^n - [q^n]_B) \operatorname{div} w + \nabla e^n \odot \nabla e^n : \nabla w) dz \\ &\leq \left(\int_Q |u^n|^3 dz \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_Q |\nabla w|^3 dz \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\int_Q |\nabla u^n|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q |\nabla w|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_Q |q^n - [q^n]_B|^{\frac{3}{2}} dz \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_Q |\operatorname{div} w|^3 dz \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + \left(\int_Q |\nabla e^n|^3 dz \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_Q |\nabla w|^3 dz \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq c(C^{\frac{2}{3}}(1; u^n, \nabla e^n) + D_0(1; q^n) + E^{\frac{1}{2}}(1; u^n, \nabla e^n)) \left(\int_Q |\nabla w|^3 dz \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq d_1(M) \left(\int_Q |\nabla w|^3 dz \right)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \int_Q \nabla e_t^n : \psi dz &= \int_Q ((u^n \cdot \nabla e^n) \cdot \operatorname{div} \psi - \nabla^2 e^n :: \nabla \psi + f^n(e^n) \cdot \operatorname{div} \psi) dz \\ &\leq \left(\int_Q |u^n \cdot e^n|^{\frac{3}{2}} dz \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_Q |\operatorname{div} \psi|^3 dz \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + \left(\int_Q |\nabla^2 e^n|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q |\nabla \psi|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_Q |f^n(e^n)|^{\frac{3}{2}} dz \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_Q |\operatorname{div} \psi|^3 dz \right)^{\frac{1}{3}} \\
& \leq c(C^{\frac{2}{3}}(1; u^n, \nabla e^n) + E^{\frac{1}{2}}(1; u^n, \nabla e^n) + 1) \left(\int_Q |\nabla w|^3 dz \right)^{\frac{1}{3}} \\
& \leq d_2(M) \left(\int_Q |\nabla w|^3 dz \right)^{\frac{1}{3}},
\end{aligned}$$

这里 $\nabla u^n : \nabla w = \sum_{i=1}^3 \nabla_i u \cdot \nabla_i w$, $\nabla^2 e^n :: \nabla \psi = \sum_{i=1}^3 \nabla_i \nabla e^n : \nabla_i \psi$. 进一步, 通过稠密性讨论, 上述估计对于任意的 $w_i, \psi_{ij} \in L_3(-1, 0; W_3^1(B))$ 也成立. 所以,

$$\|u_t^n\|_{L_{3/2}(-1, 0; W_{3/2}^{-1}(B))} \leq d_1(M), \quad (2.26)$$

$$\|\nabla e_t^n\|_{L_{3/2}(-1, 0; W_{3/2}^{-1}(B))} \leq d_2(M). \quad (2.27)$$

接下来, 结合估计 (2.21) 以及应用 Aubin-Lions 定理, 我们得到了强收敛的序列:

$$\begin{aligned}
u^{n_k} & \rightarrow u, \quad \text{在 } L_3(Q) \text{ 内,} \\
\nabla e^{n_k} & \rightarrow e, \quad \text{在 } L_3(Q) \text{ 内,}
\end{aligned} \quad (2.28)$$

这里, 为方便起见, 我们依然使用符号 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$. 所以, 极限函数 u, e 和 q 是方程组 (1.1) 在 Q 上的恰当弱解, 同时, 对所有的 $0 < r \leq 1$, 成立

$$A(r; u, \nabla e) + D_0(r; q) + E(r; u, \nabla e) \leq d_0(M). \quad (2.29)$$

结合估计 (2.22) 和 (2.28), 我们得到对任意的 $0 < r \leq 1$, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C(r; u^{n_k}, \nabla e^{n_k}) = C(r; u, \nabla e) = 0. \quad (2.30)$$

接下来, 对不等式 (2.23) 取极限, 有

$$C(r; u, \nabla e) + \limsup_{k \rightarrow \infty} D_0(r; q^{n_k}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} D_0(r; q^{n_k}) \geq \epsilon_0 \quad (2.31)$$

对任意的 $0 < r \leq 1$ 成立. 但是, 通过引理 2.1 和估计式 (2.24), 我们同时得到了如下估计: 对任意的 $0 < r \leq 1$, 有

$$\begin{aligned}
D_0(r; q^{n_k}) & \leq c \left[\left(\frac{r}{1} \right)^{\frac{5}{2}} D_0(1; q^{n_k}) + \left(\frac{1}{r} \right)^2 C(1; u^{n_k}, \nabla e^{n_k}) \right] \\
& \leq d_3(M) \left[r^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{1}{r} \right)^2 C(1; u^{n_k}, \nabla e^{n_k}) \right].
\end{aligned} \quad (2.32)$$

我们仍需要计算其极限情形, 即 $k \rightarrow \infty$. 结合估计 (2.30), 我们有

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} D_0(q) \leq d_3(M) r^{\frac{5}{2}}$$

对于任意的 $0 < r \leq 1$ 成立. 当 r 充分小时, 这个结果与不等式 (2.31) 相矛盾. 所以, 假设不成立, 定理得证. $\square$

3 在区域 $U_{a,\rho}$ 上的正则性条件

在证明定理 1.2 之前, 我们先介绍一下本节所用的坐标变换. 记 $\theta(t) := \sqrt{a(t_0 - t)}$, 将坐标 (x, t) 转换成新坐标 (x', t') 的坐标变换为

$$x' = \frac{x - x_0}{\theta(t)}, \quad t' = \int_{t_0 - \rho^2}^{t_0} \frac{ds}{\theta^2(s)} = \frac{1}{a} \ln \frac{\rho^2}{t_0 - t}. \quad (3.1)$$

通过直接计算, 有

$$t = t_0 - \rho^2 e^{-at'}, \quad \theta(t) = \sqrt{a} \rho e^{-\frac{1}{2}at'}. \quad (3.2)$$

所以, t -坐标下的区间 $(t_0 - \rho^2, t_0)$ 通过上述变换转换成 t' -坐标下的区间 $(0, \infty)$. 很容易发现, 变换 (3.1) 是从抛物区域 $Q_{a,\rho}$ 到无界条纹区域 Q'_a 的一个一一对应的变换, 这里

$$Q'_a := \{(x', t') \in \mathbb{R}^4; t' > 0, |x'| < e^{\frac{1}{2}at'}\}.$$

我们在前述提到的集合 $U_{a,\rho}$ 通过此变换对应于如下集合:

$$U'_a := \{(x', t') \in \mathbb{R}^4; t' > 0, 1 < |x'| < e^{\frac{1}{2}at'}\}.$$

令

$$t'_\delta := \frac{2}{a} \ln \frac{\rho}{\delta}, \quad (3.3)$$

则 $t = t_0 - \delta^2$ 通过变换对应于 $t' = t'_\delta$. 很明显, $e^{-\frac{1}{2}at'_\delta} = \frac{\delta}{\rho}$, 那么 $\delta \rightarrow 0+$ 通过变换对应于 $t'_\delta \rightarrow \infty$. 如果令

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{\theta(t)} v' \left(\frac{x - x_0}{\theta(t)}, \frac{1}{a} \ln \frac{\rho^2}{t_0 - t} \right), \\ p(x, t) &= \frac{1}{\theta^2(t)} p' \left(\frac{x - x_0}{\theta(t)}, \frac{1}{a} \ln \frac{\rho^2}{t_0 - t} \right), \\ d(x, t) &= d' \left(\frac{x - x_0}{\theta(t)}, \frac{1}{a} \ln \frac{\rho^2}{t_0 - t} \right), \\ f(d) &= \frac{1}{\theta^2(t)} f'(d'), \end{aligned} \quad (3.4)$$

那么 v' 、 d' 和 p' 是如下方程组的恰当弱解:

$$\begin{aligned} \partial_{t'} v' + (v' \cdot \nabla') v' + \nabla' p' - \nu \Delta' v' &= -\frac{1}{2} a v' - \frac{1}{2} a x' \cdot \nabla' v' - \lambda \nabla' \cdot (\nabla' d' \odot \nabla' d'), \\ \nabla' \cdot v' &= 0, \\ \partial_{t'} d' + (v' \cdot \nabla') d' &= \gamma (\Delta' d' - f'(d')) - \frac{1}{2} a x' \cdot \nabla' d'. \end{aligned} \quad (3.5)$$

令 $Q'_{T'} := \Omega' \times (0, T')$ 是 (x', t') -坐标下的集合, 它通过变换对应 (x, t) -坐标下的集合是 Q_T . 那么方程组在 (x', t') -坐标下的局部能量不等式为

$$2 \int_0^{T'} \int_{\Omega'} (\nu |\nabla' v'|^2 + \lambda \gamma |\nabla'^2 d'|^2) \phi' dx' dt'$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^{T'} \int_{\Omega'} |v'|^2 (\phi'_{t'} + \nu \Delta' \phi') dx' dt' + \lambda \int_0^{T'} \int_{\Omega'} |\nabla' d'|^2 (\phi'_{t'} + \gamma \Delta' \phi') dx' dt' \\
&\quad + \int_0^{T'} \int_{\Omega'} (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2 + 2p') v' \cdot \nabla' \phi' dx' dt' + \frac{a}{2} \int_0^{T'} \int_{\Omega'} (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2) \phi' dx' dt' \\
&\quad + \frac{a}{2} \int_0^{T'} \int_{\Omega'} (x' \cdot \nabla' \phi') (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2) dx' dt' + 2\lambda \gamma \int_0^{T'} \int_{\Omega'} \nabla' f'(d') \nabla' d' \phi' dx' dt' \\
&\quad + 2\lambda \int_0^{T'} \int_{\Omega'} v' \cdot \nabla' d' \nabla' d' \nabla' \phi' dx' dt', \tag{3.6}
\end{aligned}$$

这里 $\phi' \in C_0^\infty(Q'_{T'})$, $\phi' \geq 0$.

为了方便起见, 记

$$\begin{aligned}
B_R &:= \{x \in \mathbb{R}^3; |x - x_0| < R\}, \quad B'_R := \{x' \in \mathbb{R}^3; |x'| < R\}, \\
A_{R_1, R_2}(t) &:= \{x \in \mathbb{R}^3; R_1 \theta(t) < |x - x_0| < R_2 \theta(t)\}, \\
A'_{R_1, R_2}(t') &:= \{x' \in \mathbb{R}^3; R_1 < |x'| < R_2\}.
\end{aligned}$$

下面给出引理 3.1, 它在定理 1.2 的证明中发挥了很重要的作用.

引理 3.1 假设定理 1.2 的条件成立, $0 < \alpha \leq r$, $0 < \beta \leq s$, $R > 1$, $t'_\delta > 2a^{-1} \ln R$, 以及下列两个条件:

- (1) $\alpha = r$, $\omega \geq 0$;
- (2) $\alpha < r$, $\omega > 0$

中的一个条件成立, 那么有

$$\int_{t'_\delta}^\infty \left(\int_{A'_{1,R}} (|v'|^\beta + |\nabla' d'|^\beta) dx' \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{-\omega a(t' - t'_\delta)} dt' \rightarrow 0, \quad t'_\delta \rightarrow \infty. \tag{3.7}$$

证明 通过直接计算, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{t'_\delta}^\infty \left(\int_{A'_{1,R}} (|v'|^\beta + |\nabla' d'|^\beta) dx' \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{-\omega a(t' - t'_\delta)} dt' \\
&\leq C(R, \alpha, \beta) \int_{t'_\delta}^\infty \left(\int_{A'_{1,R}} (|v'|^s + |\nabla' d'|^s) dx' \right)^{\frac{\alpha}{s}} e^{-\omega a(t' - t'_\delta)} dt' \\
&\leq \frac{C(R, \alpha, \beta, \rho, a)}{\delta^{2\omega}} \int_{t_0 - \delta^2}^{t_0} \left(\int_{A_{1,R}(t)} (|v(x, t)|^s + |\nabla d|^s) dx \right)^{\frac{\alpha}{s}} \theta^{2\omega + \alpha - 3\frac{\alpha}{s} - 2}(t) dt. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

如果条件 (1) 成立, 则 $2\omega + \alpha - 3\frac{\alpha}{s} - 2 = 2\omega + r(1 - \frac{3}{s} - \frac{2}{r}) = 2\omega$. 所以, 不等式 (3.8) 的右端项小于或者等于

$$C(R, \alpha, \beta, \rho, a) \int_{t_0 - \delta^2}^{t_0} \left(\int_{A_{1,R}(t)} (|v(x, t)|^s + |\nabla d|^s) dx \right)^{\frac{r}{s}} dt.$$

因为条件 (3.1) 成立, 当 $\delta \rightarrow 0+$ 时, 这一项趋向于 0. 当条件 (2) 成立时, 不等式 (3.8) 的右端项小于或者等于

$$\frac{C(\alpha, \beta, \rho, a)}{\delta^{2\omega}} \left[\int_{t_0 - \delta^2}^{t_0} \left(\int_{A_{1,R}(t)} (|v(x, t)|^s + |\nabla d|^s) dx \right)^{\frac{r}{s}} dt \right]^{\frac{\alpha}{r}} \left[\int_{t_0 - \delta^2}^{t_0} \theta^{[2\omega + \alpha - 3\frac{\alpha}{s} - 2]\frac{r}{r-\alpha}}(t) dt \right]^{\frac{r-\alpha}{r}}.$$

它的最后一部分为

$$\left[\int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \theta^{[2\omega+\alpha-3\frac{\alpha}{s}-2]\frac{r-\alpha}{r-\alpha}}(t) dt \right]^{\frac{r-\alpha}{r}} = \left[\int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \theta^{-2+\frac{2\omega r}{r-\alpha}}(t) dt \right]^{\frac{r-\alpha}{r}} = C(a, \omega, \alpha) \delta^{2\omega}.$$

所以, 结合条件 (3.1), 当 $\delta \rightarrow 0+$ 时, 不等式 (3.8) 的右端项趋向于 0. 引理证明完毕. $\square$

定理 1.2 的证明 记

$$G(\delta) := \frac{1}{\delta^2} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \int_{|x-x_0|<\sqrt{a}\delta} (|v|^3 + |\nabla d|^3) dx dt.$$

我们将 $G(\delta)$ 分解为

$$G(\delta) = G^I(\delta) + G^{II}(\delta),$$

这里

$$G^I(\delta) := \frac{1}{\delta^2} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \int_{\theta(t)<|x-x_0|<\sqrt{a}\delta} (|v|^3 + |\nabla d|^3) dx dt, \quad (3.9)$$

$$G^{II}(\delta) := \frac{1}{\delta^2} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \int_{|x-x_0|<\theta(t)} (|v|^3 + |\nabla d|^3) dx dt. \quad (3.10)$$

通过定理 1.1, 我们仅需要证明

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} G(\delta) = 0. \quad (3.11)$$

首先, $G^I(\delta)$ 有如下估计:

$$\begin{aligned} G^I(\delta) &\leq \frac{C}{\delta^2} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \left(\int_{\theta(t)<|x-x_0|<\sqrt{a}\delta} (|v|^s + |\nabla d|^s) dx \right)^{\frac{3}{s}} \left(\frac{4\pi(\sqrt{a}\delta)^3}{3} \right)^{1-\frac{3}{s}} dt \\ &\leq C \left[\frac{4\pi a^{\frac{3}{2}}}{3} \right]^{1-\frac{3}{s}} \left[\int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \left(\int_{\theta(t)<|x-x_0|<\sqrt{a}\delta} (|v|^s + |\nabla d|^s) dx \right)^{\frac{r}{s}} dt \right]^{\frac{3}{r}} \delta^{3(1-\frac{3}{s})+2(1-\frac{3}{r})-2} \\ &= C \left[\frac{4\pi a^{\frac{3}{2}}}{3} \right]^{1-\frac{3}{s}} \left[\int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \left(\int_{\theta(t)<|x-x_0|<\sqrt{a}\delta} (|v|^s + |\nabla d|^s) dx \right)^{\frac{r}{s}} dt \right]^{\frac{3}{r}}. \end{aligned}$$

通过定理 1.2 中的条件 (1.10) 和 (1.11), 我们有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} G^I(\delta) = 0. \quad (3.12)$$

特别指出, $r = 3$ 时, 有相同的结论.

下面来估计 G^{II} . 为了达到这一目的, 我们在 (x', t') - 坐标下研究:

$$\begin{aligned} G^{II}(\delta) &= \frac{a\rho^2}{\delta^2} \int_{t'_\delta}^{\infty} \int_{B'_1} (|v'|^3 + |\nabla' d'|^3) dx' e^{-at'} dt' \\ &\leq \frac{a\rho^2}{\delta^2} \int_{t'_\delta}^{\infty} (\|v'\|_{6;B'_1}^{\frac{3}{2}} \|v'\|_{2;B'_1}^{\frac{3}{2}} + \|\nabla' d'\|_{6;B'_1}^{\frac{3}{2}} \|\nabla' d'\|_{2;B'_1}^{\frac{3}{2}}) e^{-at'} dt' \\ &\leq \frac{a\rho^2}{\delta^2} \int_{t'_\delta}^{\infty} (\|\varphi v'\|_{6;B'_4}^{\frac{3}{2}} \|\varphi v'\|_{2;B'_4}^{\frac{3}{2}} + \|\varphi \nabla' d'\|_{6;B'_4}^{\frac{3}{2}} \|\varphi \nabla' d'\|_{2;B'_4}^{\frac{3}{2}}) e^{-at'} dt' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \frac{a\rho^2}{\delta^2} \int_{t'_\delta}^\infty (\|\nabla'(\varphi v')\|_{2;B'_4}^{\frac{3}{2}} \|\varphi v'\|_{2;B'_4}^{\frac{3}{2}} + \|\nabla'(\varphi \nabla' d')\|_{2;B'_4}^{\frac{3}{2}} \|\varphi \nabla' d'\|_{2;B'_4}^{\frac{3}{2}}) e^{-at'} dt' \\
&\leq c \frac{a\rho^2}{\delta^2} \left(\int_{t'_\delta}^\infty \|\nabla'(\varphi v')\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}at'} dt' \right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_{t'_\delta}^\infty \|\varphi v'\|_{2;B'_4}^6 e^{-2at'} dt' \right)^{\frac{1}{4}} \\
&\quad + c \frac{a\rho^2}{\delta^2} \left(\int_{t'_\delta}^\infty \|\nabla'(\varphi \nabla' d')\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}at'} dt' \right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_{t'_\delta}^\infty \|\varphi \nabla' d'\|_{2;B'_4}^6 e^{-2at'} dt' \right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq ca \left[\left(\int_{t'_\delta}^\infty \|\nabla'(\varphi v')\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(t'-t'_\delta)} dt' \right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_{t'_\delta}^\infty \|\varphi v'\|_{2;B'_4}^6 e^{-2a(t'-t'_\delta)} dt' \right)^{\frac{1}{4}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{t'_\delta}^\infty \|\nabla'(\varphi \nabla' d')\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(t'-t'_\delta)} dt' \right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_{t'_\delta}^\infty \|\varphi \nabla' d'\|_{2;B'_4}^6 e^{-2a(t'-t'_\delta)} dt' \right)^{\frac{1}{4}} \right], \quad (3.13)
\end{aligned}$$

这里 c 是 Sobolev 不等式中的系数,

$$\varphi(x') = \begin{cases} = 1, & |x'| \leq 3, \\ \in [0, 1], & 3 < |x'| \leq 4, \\ = 0, & |x'| > 4, \end{cases} \quad (3.14)$$

其中 $\varphi(x') \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. 接下来, 我们利用引理 3.1 以及局部能量不等式 (3.6) 来估计不等式 (3.13) 的右端项.

令局部能量不等式 (3.6) 中的函数 ϕ' 满足: $\phi'(x', t') = \varphi^2(x') \vartheta(t')$,

$$\vartheta(t') = e^{-\frac{2}{3}a(t'-t'_\delta)} [\mathcal{R}_{1/m} \chi](t'), \quad \in C^\infty(2a^{-1} \ln 4, \infty), \quad (3.15)$$

这里 χ 是区间 (t'_δ, t') 的示性函数; $\mathcal{R}_{1/m}$ 是一维的磨光函数, 它的核在区间 $(-1/m, 1/m)$ 上紧支撑. 令 $m \rightarrow \infty$, 通过 (x', t') -坐标下的局部能量不等式 (3.6), 我们有

$$\begin{aligned}
&\|\varphi v'(\cdot, t')\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(t'-t'_\delta)} + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, t')\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(t'-t'_\delta)} \\
&\quad + \frac{a}{6} \int_{t'_\delta}^{t'} (\|\varphi v'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2) e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\
&\quad + 2 \int_{t'_\delta}^{t'} (\nu \|\varphi \nabla' v'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \gamma \|\varphi \nabla'^2 d'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2) e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\
&\leq \|\varphi v'(\cdot, t'_\delta)\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, t'_\delta)\|_{2;B'_4}^2 + \int_{t'_\delta}^{t'} \int_{B'_4} (-\nu \nabla' |v'|^2 \nabla' \varphi^2 - \lambda \gamma \nabla' |\nabla' d'|^2 \nabla' \varphi^2) e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\
&\quad + \int_{t'_\delta}^{t'} \int_{B'_4} \left[(|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2 + 2p')(v' \cdot \nabla' \varphi^2) + \frac{a}{2} (x' \cdot \nabla' \phi) (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2) \right] e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\
&\quad + 2\lambda \int_{t'_\delta}^{t'} \int_{B'_4} v' \cdot \nabla' d' \nabla' d' \nabla' \varphi^2 e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} dx' d\tau \\
&\quad + 2\lambda \gamma \int_{t'_\delta}^{t'} \int_{B'_4} \nabla' f'(d') \nabla' d' \varphi^2 dx' e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

由于

$$\varphi^2 |\nabla' v'|^2 = |\nabla'(\varphi v')|^2 - |\nabla' \varphi|^2 |v'|^2 - \frac{1}{2} \nabla' \varphi^2 \cdot \nabla' |v'|^2,$$

$$\varphi^2 |\nabla'^2 d'|^2 = |\nabla'(\varphi \nabla' d')|^2 - |\nabla' \varphi|^2 |\nabla' d'|^2 - \frac{1}{2} \nabla' \varphi^2 \cdot \nabla' |\nabla' d'|^2,$$

所以, 我们可以将不等式 (3.16) 写成如下形式:

$$\begin{aligned} & \|\varphi v'(\cdot, t')\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(t'-t'_\delta)} + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, t')\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(t'-t'_\delta)} \\ & + \frac{a}{6} \int_{t'_\delta}^{t'} (\|\varphi v'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2) e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\ & + 2 \int_{t'_\delta}^{t'} (\nu \|\nabla'(\varphi v'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \gamma \|\nabla'(\varphi \nabla' d'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_4}^2) e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\ & \leq \|\varphi v'(\cdot, t'_\delta)\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, t'_\delta)\|_{2;B'_4}^2 + \int_{t'_\delta}^{t'} \int_{B'_4} (2\nu |\nabla' \varphi|^2 |v'|^2 + 2\lambda \gamma |\nabla' \varphi|^2 |\nabla' d'|^2) e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\ & + \int_{t'_\delta}^{t'} \int_{B'_4} \left[(|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2 + 2p')(v' \cdot \nabla' \varphi^2) + \frac{a}{2} (x' \cdot \nabla' \varphi) (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2) \right] e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\ & + 2\lambda \gamma \int_{t'_\delta}^{t'} \int_{B'_4} v' \cdot \nabla' d' \nabla' d' \nabla' \varphi^2 e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} dx' d\tau \\ & + 2\lambda \gamma \int_{t'_\delta}^{t'} \int_{B'_4} \nabla' f'(d') \nabla' d' \varphi^2 dx' e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau. \end{aligned} \quad (3.17)$$

估计不等式 (3.17) 右端各项, 我们用到了不同的方法, 我们将此不等式的右端写成如下几项的和:

$\|\varphi v'(\cdot, t'_\delta)\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, t'_\delta)\|_{2;B'_4}^2$ 、 $H^I(\delta)$ 、 $H^{II}(\delta)$ 、 $H^{III}(\delta)$ 和 $2\lambda \gamma R(f', \varphi)$, 这里

$$\begin{aligned} H^I(\delta) &:= \int_{t'_\delta}^{\infty} \int_{A'_{3,4}} (2\nu |\nabla' \varphi|^2 |v'|^2 + 2\lambda \gamma |\nabla' \varphi|^2 |\nabla' d'|^2) dx' e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\ &+ \int_{t'_\delta}^{\infty} \int_{A'_{3,4}} \left[|v'|^2 (v' \cdot \nabla' \varphi^2) + \frac{a}{2} (x' \cdot \nabla' \varphi) (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2) \right] dx' e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau, \\ H^{II}(\delta) &:= \int_{t'_\delta}^{\infty} \int_{A'_{3,4}} |2p'(v' \cdot \nabla' \varphi^2)| dx' e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau, \\ H^{III}(\delta) &:= \int_{t'_\delta}^{\infty} \int_{A'_{3,4}} [\lambda |\nabla' d'|^2 (v' \cdot \nabla' \varphi^2) + 2\lambda \gamma v' \cdot \nabla' d' \nabla' d' \nabla' \varphi^2] dx' e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau, \\ R(f', \varphi) &:= \int_{t'_\delta}^{t'} \int_{B'_4} \nabla' f'(d') \nabla' d' \varphi^2 dx' e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau. \end{aligned}$$

通过引理 3.1 可知, 当 $\delta \rightarrow 0+$ 时, $H^I(\delta) \rightarrow 0$. 同时,

$$\begin{aligned} R(f', \varphi) &= \int_{t'_\delta}^{t'} \int_{B'_4} \nabla' f'(d') \nabla' d' \varphi^2 dx' e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\ &\leq \frac{C(a, |d|)}{\delta^{\frac{4}{3}}} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \int_{B_{4\theta(t)}(x_0)} \theta^2(t) |\nabla d|^2 \theta^2(t) \theta^{-3}(t) dx \theta^{\frac{4}{3}}(t) \theta^{-2}(t) dt \\ &\leq \frac{C(a, |d|)}{\delta^{\frac{4}{3}}} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \int_{B_{4\sqrt{a}\delta}(x_0)} |\nabla d|^2 dx \theta^{\frac{1}{3}}(t) dt \\ &\leq \frac{C(a, |d|)}{\delta^{\frac{4}{3}}} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \theta^{\frac{1}{3}}(t) dt \\ &\leq C(a, |d|) \delta, \end{aligned}$$

所以, 当 $\delta \rightarrow 0+$ 时, $R(f', \varphi) \rightarrow 0$. 利用 Hölder 不等式和 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned} H^{III}(\delta) &\leq C \int_{t'_\delta}^\infty \int_{A'_{3,4}} |v'| |\nabla' d'|^2 dx' e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\ &\leq C \int_{t'_\delta}^\infty \left(\int_{A'_{3,4}} |v'|^3 dx' \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{A'_{3,4}} |\nabla' d'|^3 dx' \right)^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\ &\leq C \int_{t'_\delta}^\infty \int_{A'_{3,4}} (|v'|^3 + |\nabla' d'|^3) dx' e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau. \end{aligned}$$

所以, 通过引理 3.1 可知, 当 $\delta \rightarrow 0+$ 时, $H^{III}(\delta) \rightarrow 0$.

接下来, 我们来估计 $H^{II}(\delta)$:

$$\begin{aligned} H^{II}(\delta) &\leq C \int_{t'_\delta}^\infty \int_{A'_{3,4}} |p' v'| dx' e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\ &\leq C \int_{t'_\delta}^\infty \left(\int_{A'_{3,4}} |p'|^{\frac{s}{2}} dx' \right)^{\frac{2}{s}} \left(\int_{A'_{3,4}} |v'|^{\frac{s}{s-2}} dx' \right)^{\frac{s-2}{s}} e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\ &\leq C \left[\int_{t'_\delta}^\infty \left(\int_{A'_{3,4}} |p'|^{\frac{s}{2}} dx' \right)^{\frac{2}{s} \frac{r}{r-1}} e^{-\frac{2}{3} \frac{r}{r-1} a(\tau-t'_\delta)} d\tau \right]^{\frac{r-1}{r}} \left[\int_{t'_\delta}^\infty \left(\int_{A'_{3,4}} |v'|^{\frac{s}{s-2}} dx' \right)^{\frac{r(s-2)}{s}} d\tau \right]^{\frac{1}{r}} \\ &= c_1(\delta) P^{\frac{r-1}{r}}(\delta), \end{aligned} \quad (3.18)$$

这里

$$\begin{aligned} c_1(\delta) &:= C \left[\int_{t'_\delta}^\infty \left(\int_{A'_{3,4}} |v'|^{\frac{s}{s-2}} dx' \right)^{\frac{r(s-2)}{s}} d\tau \right]^{\frac{1}{r}}, \\ P(\delta) &:= \int_{t'_\delta}^\infty \left(\int_{A'_{3,4}} |p'|^{\frac{s}{2}} dx' \right)^{\frac{2}{s} \frac{r}{r-1}} e^{-\frac{2}{3} \frac{r}{r-1} a(\tau-t'_\delta)} d\tau. \end{aligned}$$

通过引理 3.1 可得, 当 $\delta \rightarrow 0+$ 时, $c_1(\delta) \rightarrow 0$. 然后我们用如下的引理来估计 $P(\delta)$.

引理 3.2 令 v' 、 d' 和 p' 是前述在 (x', t') -坐标下的恰当弱解, 如果定理 1.2 的条件成立以及 $\frac{1}{2} < \mu < 1$, $t' > 2a^{-1} \ln(5/\mu)$, 则存在 c_2 、 c_3 和 c_4 使得如下不等式成立:

$$\begin{aligned} \int_{A'_{3,4}} |p'|^{\frac{s}{2}} dx' &\leq c_2 \left(\int_{B'_1} (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2) dx' \right)^{\frac{s}{2}} + c_3 \int_{A'_{1, e^{at'}/2}} (|v'|^s + \lambda |\nabla' d'|^s) dx' \\ &\quad + c_4 \left(e^{-\frac{3}{2}at'} \int_{A'_{\mu e^{at'}/2, e^{at'}/2}} (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2 + |p'|) dx' \right)^{\frac{s}{2}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

证明 令 η 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数, 且有

$$\eta(x') = \begin{cases} 1, & |x'| \leq \mu e^{\frac{1}{2}at'}, \\ \in [0, 1], & \mu e^{\frac{1}{2}at'} < |x'| \leq e^{\frac{1}{2}at'}, \\ 0, & |x'| > e^{\frac{1}{2}at'}, \end{cases}$$

这里 $|\nabla' \eta| \leq \frac{2}{1-\mu} e^{-\frac{1}{2}at'}$, $|\nabla'^2 \eta| \leq \frac{8}{(1-\mu)^2} e^{-at'}$.

光滑函数 η 可以分为两部分: η_1 和 η_2 , 这里 $\eta_1, \eta_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, 它们的函数值在区间 $[0, 1]$ 中. 另外, 在 B'_1 上, $\eta_1 = 1$; 在 $\mathbb{R}^3 \setminus B'_2$ 上, $\eta_1 = 0$. 所以, η_1 的支集在 B'_2 中, η_2 的支集落在区域 $\mathbb{R}^3 \setminus B'_1$ 中.

函数 $\eta p'$ 满足以下方程:

$$\begin{aligned}\eta(x')p'(x', t') &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x' - y'|} [\Delta'(\eta p')](y', t') dy' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x' - y'|} [\Delta' \eta p' + 2\nabla' \eta \nabla' p' + \eta \Delta' p'](y', t') dy', \quad x' \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

对方程 (3.5) 两边求散度, 即两边作用算子 div' , 有 $\Delta' p' = -\partial'_i \partial'_j (v'_i v'_j + \lambda \partial'_i d'_k \partial'_j d'_k)$, 利用这个公式以及分部积分, 可得

$$\eta(x')p'(x', t') = p'_1(x', t') + p'_2(x', t') + p'_3(x', t'),$$

这里

$$\begin{aligned}p'_1(x', t') &= \frac{1}{4\pi} \int_{B'_2} \frac{\partial^2}{\partial y'_i \partial y'_j} \left(\frac{1}{|x' - y'|} \right) [\eta_1 (v'_i v'_j + \lambda \partial'_i d'_k \partial'_j d'_k)](y', t') dy', \\ p'_2(x', t') &= \frac{1}{4\pi} \int_{A'_{1, e^{at'}/2}} \frac{\partial^2}{\partial y'_i \partial y'_j} \left(\frac{1}{|x' - y'|} \right) [\eta_2 (v'_i v'_j + \lambda \partial'_i d'_k \partial'_j d'_k)](y', t') dy', \\ p'_3(x', t') &= \frac{1}{2\pi} \int_{A'_{\mu e^{at'}/2, e^{at'}/2}} \frac{x'_i - y'_i}{|x' - y'|^3} \left[\frac{\partial \eta}{\partial y'_j} (v'_i v'_j + \lambda \partial'_i d'_k \partial'_j d'_k) \right](y', t') dy' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{A'_{\mu e^{at'}/2, e^{at'}/2}} \frac{1}{|x' - y'|} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial y'_i \partial y'_j} (v'_i v'_j + \lambda \partial'_i d'_k \partial'_j d'_k) \right](y', t') dy' \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{A'_{\mu e^{at'}/2, e^{at'}/2}} \frac{x'_i - y'_i}{|x' - y'|^3} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y'_i} p' \right)(y', t') dy' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{A'_{\mu e^{at'}/2, e^{at'}/2}} \frac{1}{|x' - y'|} [\Delta' \eta p'](y', t') dy' .\end{aligned}$$

如果 $x' \in A'_{3,4}$, 则

$$\begin{aligned}|p'_1(x', t')| &\leq C \int_{B'_2} (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2) dy' \\ &\leq C \int_{B'_1} (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2) dy' + C \left(\int_{A'_{1,2}} (|v'|^s + \lambda |\nabla' d'|^s) dy' \right)^{\frac{2}{s}},\end{aligned}\tag{3.20}$$

$$|p'_3(x', t')| = C e^{-\frac{3}{2}at'} \int_{A'_{\mu e^{at'}/2, e^{at'}/2}} (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2 + |p'|) dy' .\tag{3.21}$$

另外, 利用 Calderon-Zygmund 定理, 可得

$$\int_{A'_{1, e^{at'}/2}} |p'_2(y', t')|^{\frac{s}{2}} dy' \leq C \int_{A'_{1, e^{at'}/2}} (|v'(y', t')|^s + \lambda |\nabla' d'(y', t')|^s) dy' .\tag{3.22}$$

那么, 由不等式 (3.20)–(3.22) 可以得到不等式 (3.19). $\square$

从现在开始, 假设 $t'_\delta > 2a^{-1} \ln 10$. 那么对于所有的 $\mu \in (\frac{1}{2}, 1)$, 不等式 $t' \geq t'_\delta$ 确保了不等式 $t' > 2a^{-1} \ln(5/\mu)$ 的成立. 所以, 我们可以利用引理 3.2 来估计 $P(\delta)$:

$$\begin{aligned} P(\delta) &\leq c_2 \int_{t'_\delta}^{\infty} \left(\int_{B'_1} (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2) dx' \right)^{\frac{r}{r-1}} e^{-\frac{2}{3} \frac{r}{r-1} a(t'-t'_\delta)} dt' \\ &\quad + c_3 \int_{t'_\delta}^{\infty} \left(\int_{A'_{1, e^{at'}/2}} (|v'|^s + \lambda |\nabla' d'|^s) dx' \right)^{\frac{2}{s} \frac{r}{r-1}} e^{-\frac{2}{3} \frac{r}{r-1} a(t'-t'_\delta)} dt' \\ &\quad + c_4 \int_{t'_\delta}^{\infty} \left(e^{-\frac{3}{2} at'} \int_{A'_{\mu e^{at'}/2, e^{at'}/2}} (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2 + |p'|) dx' \right)^{\frac{r}{r-1}} e^{-\frac{2}{3} \frac{r}{r-1} a(t'-t'_\delta)} dt'. \end{aligned} \quad (3.23)$$

通过不等式 (3.17), 我们可以得到不等式 (3.23) 中右端第一项的估计:

$$\begin{aligned} &c_2 \int_{t'_\delta}^{\infty} \left(\int_{B'_1} (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2) dx' \right)^{\frac{r}{r-1}} e^{-\frac{2}{3} \frac{r}{r-1} a(t'-t'_\delta)} dt' \\ &\leq c_2 \left[\operatorname{ess\,sup}_{t' > t'_\delta} \int_{B'_1} (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2) dx' e^{-\frac{2}{3} a(t'-t'_\delta)} \right]^{\frac{r}{r-1}-1} \int_{t'_\delta}^{\infty} \int_{B'_1} (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2) dx' e^{-\frac{2}{3} a(t'-t'_\delta)} dt' \\ &\leq \frac{6c_2}{a} [\|\varphi v'(\cdot, t'_\delta)\|_{2; B'_4}^2 + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, t'_\delta)\|_{2; B'_4}^2 + H^I(\delta) + H^{II}(\delta) + H^{III}(\delta) + 2\lambda \gamma R(f', \varphi)]^{\frac{r}{r-1}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

不等式 (3.23) 右端第二项的估计如下:

$$\begin{aligned} &C \delta^{-\frac{4}{3} \frac{r}{r-1}} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \left(\int_{\theta(t) < |x-x_0| < \sqrt{a}\rho} |v(x, t)|^s + \lambda |\nabla d|^s dx \right)^{\frac{2}{s} \frac{r}{r-1}} \theta^{\frac{2r}{r-1} - \frac{6}{s} \frac{r}{r-1} + \frac{4}{3} \frac{r}{r-1} - 2}(t) dt \\ &= C \delta^{-\frac{4}{3} \frac{r}{r-1}} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \left(\int_{\theta(t) < |x-x_0| < \sqrt{a}\rho} |v(x, t)|^s + \lambda |\nabla d|^s dx \right)^{\frac{2}{s} \frac{r}{r-1}} \theta^{\frac{r}{r-1} [\frac{2}{r} - \frac{6}{s} + \frac{4}{3}]}(t) dt \\ &\leq C \delta^{-\frac{4}{3} \frac{r}{r-1}} \left[\int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \left(\int_{\theta(t) < |x-x_0| < \sqrt{a}\rho} |v(x, t)|^s + \lambda |\nabla d|^s dx \right)^{\frac{r}{s}} dt \right]^{\frac{2}{r-1}} \\ &\quad \times \left[\int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \theta^{\frac{r}{r-3} [\frac{2}{r} - \frac{6}{s} + \frac{4}{3}]}(t) dt \right]^{\frac{r-3}{r-1}} \\ &= c_5(\delta) c_6(\delta), \end{aligned} \quad (3.25)$$

这里

$$C := C(a, \rho),$$

$$c_5(\delta) := \left[\int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \left(\int_{\theta(t) < |x-x_0| < \sqrt{a}\rho} |v|^s + \lambda |\nabla d|^s dx \right)^{\frac{r}{s}} dt \right]^{\frac{2}{r-1}} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0+,$$

$$c_6(\delta) := C \delta^{-\frac{4}{3} \frac{r}{r-1}} \left[\int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \theta^{\frac{r}{r-3} [\frac{2}{r} - \frac{6}{s} + \frac{4}{3}]}(t) dt \right]^{\frac{r-3}{r-1}} = C \delta^{\frac{2r}{r-1} [1 - \frac{2}{r} - \frac{3}{s}]} = C.$$

所以, 当 $\delta \rightarrow 0+$ 时, $c_5(\delta) c_6(\delta) \rightarrow 0$. 如此, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 不等式 (3.23) 右端第二项趋向于 0. 从定理 1.2 中的条件知 $r \geq 3$, 则 $r/(r-1) \leq \frac{3}{2}$. 接下来给出不等式 (3.23) 右端第三项的估计:

$$\leq C \int_{t'_\delta}^{\infty} \left(e^{-\frac{3}{2} at'} \int_{A'_{\mu e^{at'}/2, e^{at'}/2}} (|v'|^2 + \lambda |\nabla' d'|^2 + |p'|) dx' \right)^{\frac{r}{r-1}} dt'$$

$$\begin{aligned}
 &= C \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \left(\int_{\sqrt{a}\mu\rho < |x-x_0| < \sqrt{a}\rho} [|v|^2 + \lambda|\nabla d|^2 + |p|] dx \right)^{\frac{r}{r-1}} \theta^{\frac{2r}{r-1}-1}(t) dt \\
 &\leq C \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \theta^{\frac{2}{r-1}}(t) dt + C \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \left(\int_{\sqrt{a}\mu\rho < |x-x_0| < \sqrt{a}\rho} |p|^{\frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{2}{3} \frac{r}{r-1}} \theta^{\frac{2}{r-1}}(t) dt \\
 &\leq C \delta^{\frac{2r}{r-1}} + C \delta^{\frac{2}{r-1}} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \left(\int_{\sqrt{a}\mu\rho < |x-x_0| < \sqrt{a}\rho} |p|^{\frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{2}{3} \frac{r}{r-1}} dt \\
 &\leq C \delta^{\frac{2r}{r-1}} + C \delta^{\frac{2r}{3(r-1)}} \left(\int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \int_{\sqrt{a}\mu\rho < |x-x_0| < \sqrt{a}\rho} |p|^{\frac{3}{2}} dx dt \right)^{\frac{2}{3} \frac{r}{r-1}} \\
 &=: c_7(\delta) \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0+).
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

通过估计 (3.18) 和 (3.24)–(3.26), 可得

$$\begin{aligned}
 H^{II}(\delta) &\leq c_1(\delta) P^{\frac{r-1}{r}}(\delta) \\
 &\leq c_1(\delta) \left\{ \left(\frac{6c_2}{a} \right)^{\frac{r}{r-1}} [\|\varphi v'(\cdot, t'_\delta)\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, t'_\delta)\|_{2;B'_4}^2 + H^I(\delta) + H^{II}(\delta) \right. \\
 &\quad \left. + H^{III}(\delta) + 2\lambda\gamma R(f', \varphi)] + c_8(\delta) \right\},
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

这里 $c_8(\delta) := c_5^{\frac{r}{r-1}}(\delta) c_6^{\frac{r}{r-1}}(\delta) + c_7^{\frac{r}{r-1}}(\delta \rightarrow 0+)$.

不等式 (3.18) 告诉我们, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时,

$$C_1(\delta) \rightarrow 0.$$

所以, 当 H^{II} 有限时, 对于充分小的 δ , $c_1(\delta)(6c_2/a)^{\frac{r}{r-1}} H^{II}(\delta)$ 可以被不等式 (3.27) 的左端项吸收. 再次利用不等式 (3.18), $P(\delta) < \infty$ 隐含着 $H^{II}(\delta) < \infty$. 而通过不等式 (3.23)–(3.26) 可知, 如果不等式 (3.23) 的右端第一项有界, 则有 $P(\delta) < \infty$. 同时,

$$\begin{aligned}
 &\int_{t'_\delta}^{\infty} \left(\int_{B'_1} (|v'|^2 + \lambda|\nabla' d'|^2) dx' \right)^{\frac{r}{r-1}} e^{-\frac{2}{3} \frac{r}{r-1} a(t'-t'_\delta)} dt' \\
 &= C \delta^{-\frac{4}{3} \frac{r}{r-1}} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \left(\int_{|x-x_0| < \theta(t)} (|v|^2 + \lambda|\nabla d|^2) \theta^{-1}(t) dx \right)^{\frac{r}{r-1}} \theta^{\frac{4}{3} \frac{r}{r-1}}(t) \theta^{-2}(t) dt \\
 &\leq C \delta^{-\frac{4}{3} \frac{r}{r-1}} \int_{t_0-\delta^2}^{t_0} \theta^{[\frac{1}{3} \frac{r}{r-1} - 2]}(t) dt \\
 &= C \delta^{-\frac{r}{r-1}} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

接下来, 再回到不等式 (3.27), 令 δ 充分小, 则有

$$\begin{aligned}
 H^{II}(\delta) &\leq c_9(\delta) \left\{ \left(\frac{6c_2}{a} \right)^{\frac{r}{r-1}} [\|\varphi v'(\cdot, t'_\delta)\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, t'_\delta)\|_{2;B'_4}^2 + H^I(\delta) + H^{III}(\delta) \right. \\
 &\quad \left. + 2\lambda\gamma R(f', \varphi)] + c_8(\delta) \right\},
 \end{aligned}$$

这里

$$c_9(\delta) := \frac{c_1(\delta)}{1 - c_1(\delta)(6c_2/a)^{\frac{r}{r-1}}} \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0+).$$

所以, 通过估计 (3.17), 可得

$$\begin{aligned}
 & \|\varphi v'(\cdot, t')\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(t'-t'_\delta)} + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, t')\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(t'-t'_\delta)} \\
 & + \frac{a}{6} \int_{t'_\delta}^{t'} (\|\varphi v'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2) e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\
 & + 2 \int_{t'_\delta}^{t'} (\nu \|\nabla'(\varphi v'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \gamma \|\nabla'(\varphi \nabla' d'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_4}^2) e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\
 & \leq c_{10}(\delta) (\|\varphi v'(\cdot, t'_\delta)\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, t'_\delta)\|_{2;B'_4}^2) + c_{11}(\delta),
 \end{aligned} \quad (3.28)$$

这里

$$\begin{aligned}
 c_{10}(\delta) &:= \left[1 + c_9(\delta) \left(\frac{6c_2}{a} \right)^{\frac{r}{r-1}} \right] \rightarrow 1 \quad (\delta \rightarrow 0+), \\
 c_{11}(\delta) &:= \left[1 + c_9(\delta) \left(\frac{6c_2}{a} \right)^{\frac{r}{r-1}} \right] [H^I(\delta) + H^{III}(\delta) + 2\lambda\gamma R(f', \varphi)] + c_8(\delta)c_9(\delta) \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0+).
 \end{aligned}$$

现在估计不等式 (3.28) 的左端项, 即下界估计. 利用 Friedrichs 不等式来估计项 $\|\nabla'(\varphi v'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_4}^2$ 和 $\|\nabla'(\varphi \nabla' d'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_4}^2$, 使得其下界被 $\|\varphi v'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2$ 和 $\|\varphi \nabla' d'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2$ 界住. 然而, 为了获得项 $\|\varphi v'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2$ 和 $\|\varphi \nabla' d'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2$ 之前的最佳的系数, 我们还需要再多做几步.

(3.14) 给出了 φ 的定义. 我们将它分成两部分: φ_1^ζ 和 φ_2^ζ , 这里 φ_1^ζ 和 φ_2^ζ 同时是 C_0^∞ 函数. 另外,

$$\varphi_1^\zeta(x') = \begin{cases} 1, & x' \leq 1 + \frac{1}{4}\zeta, \\ \in [0, 1], & 1 + \frac{1}{4}\zeta < x' \leq 1 + \frac{3}{4}\zeta, \\ 0, & x' > 1 + \frac{3}{4}\zeta, \end{cases}$$

这里 $|\nabla' \varphi_1^\zeta| \leq 4\zeta^{-1}$. 于是,

$$\begin{aligned}
 \|\nabla'(\varphi_1^\zeta v')\|_{2;B'_{1+\zeta}}^2 &= \|\varphi_1^\zeta \nabla' v'\|_{2;B'_{1+\zeta}}^2 + 2(\varphi_1^\zeta \nabla' v', \nabla' \varphi_1^\zeta \otimes v')_{2;A'_{1,1+\zeta}} + \|\nabla' \varphi_1^\zeta \otimes v'\|_{2;B'_{1+\zeta}}^2 \\
 &\leq \|\nabla' v'\|_{2;B'_{1+\zeta}}^2 + \int_{A'_{1,1+\zeta}} \nabla'(\varphi_1^\zeta)^2 \cdot \nabla' v' \cdot v' dx' + \|\nabla' \varphi_1^\zeta \otimes v'\|_{2;A'_{1,1+\zeta}}^2 \\
 &\leq \|\nabla'(\varphi v')\|_{2;B'_4}^2 - \frac{1}{2} \int_{A'_{1,1+\zeta}} \Delta'(\varphi_1^\zeta)^2 |v'|^2 dx' + \|\nabla' \varphi_1^\zeta \otimes v'\|_{2;A'_{1,1+\zeta}}^2.
 \end{aligned}$$

所以,

$$\int_{t'_\delta}^{t'} \|\nabla'(\varphi v'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \geq \int_{t'_\delta}^{t'} \|\nabla'(\varphi_1^\zeta v'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_{1+\zeta}}^2 e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau - c_{12}(\delta, \zeta), \quad (3.29)$$

这里

$$c_{12}(\delta, \zeta) := \int_{t'_\delta}^\infty \left(-\frac{1}{2} \int_{A'_{1,1+\zeta}} \Delta'(\varphi_1^\zeta)^2 |v'|^2 dx' + \|\nabla' \varphi_1^\zeta \otimes v'\|_{2;A'_{1,1+\zeta}}^2 \right) e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau.$$

于是, 再次利用引理 3.1 可知, 对于每一个固定数 ζ , 当 $\delta \rightarrow 0+$ 时, $c_{12}(\delta, \zeta) \rightarrow 0$.

因为 $\int_{A'_{1,1+\zeta}} \nabla' \varphi_1^\zeta \cdot v' dx' = 0$, 所以存在一个 $h^\zeta \in W_0^{1,2}(A'_{1,1+\zeta})$ 使得 $\operatorname{div}' h^\zeta = \nabla' \varphi_1^\zeta \cdot v'$ 以及 $\|\nabla' h^\zeta\|_{2;A'_{1,1+\zeta}} \leq C \|\nabla' \varphi_1^\zeta \cdot v'\|_{2;A'_{1,1+\zeta}}$ (参见文献 [32, 定理 2.4]). 更进一步, 这样构造出来的 h^ζ 可以使得不等式 $\|\nabla' h^\zeta\|_{2;A'_{1,1+\zeta}} \leq C \|\nabla' \varphi_1^\zeta \cdot v'\|_{2;A'_{1,1+\zeta}}$ 中的 C 不依赖于 ζ (参见文献 [32, 定理 2.10]). 所以,

$$\|\nabla' h^\zeta\|_{2;A'_{1,1+\zeta}} \leq C \zeta^{-1} \|v'\|_{2;A'_{1,1+\zeta}}.$$

将函数 h^ζ 零延拓到整个球 $B'_{1+\zeta}$ 上. 于是有 $(\varphi_1^\zeta v' - h^\zeta) \in W_0^{1,2}(B'_{1+\zeta})$ 和 $\operatorname{div}'(\varphi_1^\zeta v' - h^\zeta) = 0$. 记 $\lambda_s(B_1)$ 是 Dirichlet-Stokesian 在单位球上的第一特征值 (参见文献 [33]), 于是,

$$\|\varphi_1^\zeta v' - h^\zeta\|_{2;B'_{1+\zeta}} \leq \frac{1+\zeta}{\sqrt{\lambda_s(B_1)}} \|\nabla'(\varphi_1^\zeta v' - h^\zeta)\|_{2;B'_{1+\zeta}}. \quad (3.30)$$

那么,

$$\begin{aligned} \|\varphi_1^\zeta v'\|_{2;B'_{1+\zeta}} &\leq \|\varphi_1^\zeta v' - h^\zeta\|_{2;B'_{1+\zeta}} + \|h^\zeta\|_{2;B'_{1+\zeta}} \\ &\leq \frac{1+\zeta}{\sqrt{\lambda_s(B_1)}} \|\nabla'(\varphi_1^\zeta v' - h^\zeta)\|_{2;B'_{1+\zeta}} + \frac{1+\zeta}{\pi} \|\nabla' h^\zeta\|_{2;B'_{1+\zeta}} \\ &\leq \frac{1+\zeta}{\sqrt{\lambda_s(B_1)}} \|\nabla'(\varphi_1^\zeta v')\|_{2;B'_{1+\zeta}} + \frac{2(1+\zeta)}{\pi} \|\nabla' h^\zeta\|_{2;B'_{1+\zeta}} \\ &\leq \frac{1+\zeta}{\sqrt{\lambda_s(B_1)}} \|\nabla'(\varphi_1^\zeta v')\|_{2;B'_{1+\zeta}} + \frac{2(1+\zeta)}{\pi} \|\nabla' h^\zeta\|_{2;A'_{1,1+\zeta}} \\ &\leq \frac{1+\zeta}{\sqrt{\lambda_s(B_1)}} \|\nabla'(\varphi_1^\zeta v')\|_{2;B'_{1+\zeta}} + \frac{C(1+\zeta)}{\zeta\pi} \|v'\|_{2;A'_{1,1+\zeta}}. \end{aligned}$$

所以, 对每个 $\zeta \in (0, 1)$ 和每个 $\kappa > 0$, 存在 $c_{13}(\kappa, \zeta) > 0$ 使得

$$\|\varphi_1^\zeta v'\|_{2;B'_{1+\zeta}}^2 \leq \frac{(1+\kappa)(1+\zeta)^2}{\lambda_s(B_1)} \|\nabla'(\varphi_1^\zeta v')\|_{2;B'_{1+\zeta}}^2 + c_{13}(\kappa, \zeta) \|v'\|_{2;A'_{1,1+\zeta}}^2. \quad (3.31)$$

结合不等式 (3.29) 和 (3.31), 我们有

$$\begin{aligned} &\int_{t'_\delta}^{t'} \|\nabla'(\varphi v'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\ &\geq \int_{t'_\delta}^{t'} \frac{\lambda_s(B_1)}{(1+\kappa)(1+\zeta)^2} \|\varphi_1^\zeta v'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_{1+\zeta}}^2 e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau - c_{14}(\delta, \zeta, \kappa), \end{aligned} \quad (3.32)$$

这里

$$c_{14}(\delta, \zeta, \kappa) := \int_{t'_\delta}^{t'} \frac{\lambda_s(B_1)}{(1+\kappa)(1+\zeta)^2} c_{13}(\kappa, \zeta) \|v'\|_{2;A'_{1,1+\zeta}}^2 e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau + c_{12}(\delta, \zeta).$$

通过引理 3.1 可知, 对于固定的数 ζ 和 κ , 有 $c_{14}(\delta, \zeta, \kappa) \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0+$). 对于不等式 (3.32) 右端的积分项中的 $\|\varphi_1^\zeta v'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_{1+\zeta}}^2$, 有如下形式:

$$\|\varphi_1^\zeta v'\|_{2;B'_{1+\zeta}}^2 = \|\varphi v'\|_{2;B'_4}^2 - 2(\varphi_1^\zeta v', \varphi_2^\zeta v')_{2;A'_{1,1+\zeta}} - \|\varphi_2^\zeta v'\|_{2;A'_{1,4}}^2.$$

特别地, 利用引理 3.1, 对于每个固定的 ζ , 当 $\delta \rightarrow 0+$ 时,

$$c_{15}(\delta, \zeta) := \int_{t'_\delta}^{\infty} [2(\varphi_1^\zeta v', \varphi_2^\zeta v')_{2;A'_{1,1+\zeta}} + \|\varphi_2^\zeta v'\|_{2;A'_{1,4}}^2] e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \rightarrow 0.$$

所以, 不等式 (3.32) 可以被重写为

$$\begin{aligned} & \int_{t'_\delta}^{t'} \|\nabla'(\varphi v'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\ & \geq \int_{t'_\delta}^{t'} \frac{\lambda_S(B_1)}{(1+\kappa)(1+\zeta)^2} \|\varphi v'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau - c_{16}(\delta, \zeta, \kappa), \end{aligned} \quad (3.33)$$

这里 $c_{16}(\delta, \zeta, \kappa) := c_{14}(\delta, \zeta, \kappa) + \frac{\lambda_S(B_1)}{(1+\kappa)(1+\zeta)^2} c_{15}(\delta, \zeta)$. 很明显, 对于固定的 ζ 和 κ , 有 $c_{16}(\delta, \zeta, \kappa) \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0+$).

记 π^2 是 Dirichlet-Laplace 算子在单位球上的第一特征值^[33]. 接下来估计项 $\|\nabla'(\varphi \nabla' d'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_4}^2$. 因为 $\varphi \nabla' d' \in W_0^{1,2}(B'_4)$, 所以,

$$\|\varphi \nabla' d'\|_{2;B'_4} \leq \frac{4}{\pi} \|\nabla'(\varphi \nabla' d'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_4}.$$

于是,

$$\int_{t'_\delta}^{t'} \|\nabla'(\varphi \nabla' d'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \geq \int_{t'_\delta}^{t'} \frac{\pi^2}{16} \|\varphi \nabla' d'\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau. \quad (3.34)$$

取 $a_0 := \min\{4\nu\lambda_S(B_1), \frac{1}{4}\gamma\pi^2\}$. 结合不等式 (3.33)、(3.34) 和 (3.28), 可得

$$\begin{aligned} & \|\varphi v'(\cdot, t')\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(t'-t'_\delta)} + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, t')\|_{2;B'_4}^2 e^{-\frac{2}{3}a(t'-t'_\delta)} \\ & + \left(\frac{a}{6} + \frac{a_0/2}{(1+\kappa)(1+\zeta)^2} \right) \int_{t'_\delta}^{t'} (\|\varphi v'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2) e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau \\ & \leq c_{10}(\delta) (\|\varphi v'(\cdot, t'_\delta)\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, t'_\delta)\|_{2;B'_4}^2) + c_{11}(\delta) + 2\nu c_{16}(\delta, \zeta, \kappa). \end{aligned} \quad (3.35)$$

为了方便起见, 记

$$\begin{aligned} q(t') &:= \|\varphi v'(\cdot, t')\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, t')\|_{2;B'_4}^2, \\ g(t'_\delta, t') &:= \int_{t'_\delta}^{t'} (\|\varphi v'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \|\varphi \nabla' d'(\cdot, \tau)\|_{2;B'_4}^2) e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau = \int_{t'_\delta}^{t'} q(\tau) e^{-\frac{2}{3}a(\tau-t'_\delta)} d\tau, \\ g_\infty(t'_\delta) &:= g(t'_\delta, \infty), \\ c_{17} &:= \frac{a}{6} + \frac{a_0/2}{(1+\kappa)(1+\zeta)^2}, \end{aligned}$$

所以, 不等式 (3.35) 可以被重写为

$$q(t') e^{-\frac{2}{3}a(t'-t'_\delta)} + c_{17} g(t'_\delta, t') \leq c_{10}(\delta) q(t'_\delta) + c_{11}(\delta) + 2\nu c_{16}(\delta, \zeta, \kappa), \quad (3.36)$$

因为上式来自 (3.16), 所以, $t'_\delta \in (2a^{-1} \ln 10, \infty)$, $t' \geq t'_\delta$. 接下来的两个引理可直接导致定理 1.2 成立.

引理 3.3 当 $t'_\delta \rightarrow \infty$ 时, 上述函数 $g_\infty(t'_\delta)$ 趋向于 0.

证明 令 $t' \rightarrow \infty$ 以及去掉不等式 (3.36) 左边第一项, 则有

$$c_{17} g_\infty(t'_\delta) \leq c_{10}(\delta) q(t'_\delta) + c_{11}(\delta) + 2\nu c_{16}(\delta, \zeta, \kappa). \quad (3.37)$$

明显地, 对几乎每一个 $t'_\delta \in (2a^{-1} \ln 10, \infty)$, 有 $q(t'_\delta) = -\dot{g}_\infty(t'_\delta) + \frac{2}{3}ag_\infty(t'_\delta)$. 将 $q(t'_\delta)$ 的这个形式代入到不等式 (3.37) 的右端, 可得

$$\dot{g}_\infty(t'_\delta) + \left(\frac{c_{17}}{c_{10}(\delta)} - \frac{2}{3}a \right) g_\infty(t'_\delta) \leq \frac{c_{11}(\delta) + 2\nu c_{16}(\delta, \zeta, \kappa)}{c_{10}(\delta)}. \quad (3.38)$$

回顾之前的估计, 当 $\delta \rightarrow 0+$ 时, $c_{10}(\delta) \rightarrow 1$, $c_{11}(\delta) \rightarrow 0$, $c_{16}(\delta, \zeta, \kappa) \rightarrow 0$ (这意味着 $t'_\delta \rightarrow \infty$). 定理中 (1.2) 的条件 $0 < a < a_0$ 则保证了我们可以选合适的 $\zeta \in (0, 1)$, $\kappa > 0$, 以及充分小的 $\delta \in (0, \delta_0)$ 使得对所有的 $\delta \in (0, \delta_0)$, 成立 $c_{17}/c_{10}(\delta) - \frac{2}{3}a \geq \xi > 0$, 这里 ζ 、 κ 和 δ 与 ξ 无关. 另外, $\delta \in (0, \delta_0)$ 对应于 $t'_\delta > t'_{\delta_0} := 2a^{-1} \ln(\rho/\delta_0)$. 不失一般性, 假设 δ_0 充分小使得 $t'_{\delta_0} \geq 2a^{-1} \ln 10$ 成立. 在区间 $(t'_{\delta_0}, t'_\delta)$ 上对不等式 (3.38) 积分, 得到

$$g_\infty(t'_\delta) \leq e^{-\xi(t'_\delta - t'_{\delta_0})} g_\infty(t'_{\delta_0}) + \frac{c_{11}(\delta) + 2\nu c_{16}(\delta, \zeta, \kappa)}{c_{10}(\delta)\xi}.$$

令 $t'_\delta \rightarrow \infty$ (这意味着 $\delta \rightarrow 0$), 引理 3.3 得证. $\square$

引理 3.4 当 $t' \rightarrow \infty$ 时, 上述函数 $q(t') \rightarrow 0$.

证明 我们用反证法证明此引理. 假设存在一个数 $\epsilon > 0$ 和一个增长序列 $\{t'_n\}$ 使得对所有的 $n \in N$, 成立 $q(t'_n) > \epsilon$, 以及当 $n \rightarrow \infty$ 时, $t'_n \rightarrow \infty$. 明显地, 有

$$\int_{t'_n-1}^{t'_n} q(\tau) e^{-\frac{2}{3}a(\tau - (t'_n-1))} d\tau \leq g_\infty(t'_n - 1).$$

通过引理 3.4, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $g_\infty(t'_n - 1) \rightarrow 0$. 于是, 存在一个序列 $\{s'_n\} \subset (t'_n - 1, t'_n) \cap (2a^{-1} \ln 10, \infty)$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $q(s'_n) \rightarrow 0$. 注意, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $s'_n \rightarrow \infty$. 应用不等式 (3.36), 通过取 $t' = t'_n$, $t'_\delta = s'_n$, 得到如下不等式:

$$q(t'_n) e^{-\frac{2}{3}a(t'_n - s'_n)} \leq c_{10}(\delta_n) q(s'_n) + c_{11}(\delta_n) + 2\nu c_{16}(\delta_n, \zeta, \kappa), \quad (3.39)$$

这里 $\delta_n = \rho e^{-\frac{1}{2}as'_n}$. 回顾前述证明中, 当 $\delta_n \rightarrow 0+$ 时, 有 $c_{10}(\delta_n) \rightarrow 1$, $c_{11}(\delta_n) \rightarrow 0$, $c_{16}(\delta_n, \zeta, \kappa) \rightarrow 0$ (这意味着 $s'_n \rightarrow \infty$). 所以, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 不等式 (3.39) 的右端项趋向于 0. 于是,

$$q(t'_n) e^{-\frac{2}{3}a} \leq q(t'_n) e^{-\frac{2}{3}a(t'_n - s'_n)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

这与所作的假设 $q(t'_n) > \epsilon$ 相矛盾. 所以引理得证. $\square$

通过引理 3.4 知, 当 $t'_\delta \rightarrow \infty$ 时, 不等式 (3.28) 的右端项趋向于 0. 于是, 不等式 (3.28) 的左端项

$$\int_{t'_\delta}^{\infty} (\nu \|\nabla'(\varphi v'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_4}^2 + \lambda \gamma \|\nabla'(\varphi \nabla' d'(\cdot, \tau))\|_{2;B'_4}^2) e^{-\frac{2}{3}a(\tau - t'_\delta)} d\tau \rightarrow 0 \quad (t'_\delta \rightarrow \infty).$$

与此同时,

$$\int_{t'_\delta}^{\infty} (\|\varphi v'\|_{2;B'_4}^6 + \lambda \|\varphi \nabla' d'\|_{2;B'_4}^6) e^{-2a(t' - t'_\delta)} dt' \leq C \left[\operatorname{ess\,sup}_{t' > t'_\delta} q^2(t') e^{-\frac{4}{3}a(t' - t'_\delta)} \right] g_\infty(t'_\delta),$$

这时, 结合引理 3.3、3.4 和估计 (3.10), 可以得到: 当 $\delta \rightarrow 0+$ 时, $G^{II}(\delta) \rightarrow 0$. 所以, (x_0, t_0) 是恰当弱解 (v, d, p) 的正则点. $\square$

注 3.1 在完成本文之后, 我们了解到 Lai 和 Ma^[34] 利用文献 [35] 中的方法得到了定理 1.1.

参考文献

- 1 de Gennes P G. The Physics of Liquid Crystals. Oxford: Oxford University Press, 1974
- 2 Ericksen J L. Hydrostatic theory of liquid crystals. Arch Ration Mech Anal, 1962, 9: 371–378
- 3 Leslie F M. Some constitutive equations for liquid crystals. Arch Ration Mech Anal, 1968, 28: 265–283
- 4 Lin F, Lin J, Wang C. Liquid crystal flows in two dimensions. Arch Ration Mech Anal, 2010, 197: 297–336
- 5 Lin F, Wang C. Global existence of weak solutions of the nematic liquid crystal flow in dimension three. Commun Pure Appl Anal, 2016, 69: 1532–1571
- 6 Lin F H, Liu C. Nonparabolic dissipative systems modeling the flow of liquid crystals. Commun Pure Appl Anal, 1995, 48: 501–537
- 7 Lin F H, Liu C. Partial regularity of the dynamic system modeling the flow of liquid crystals. Discrete Contin Dyn Syst, 1996, 2: 1–22
- 8 Liu Q, Cui S B. Regularity of solutions to 3-D nematic liquid crystal flows. Electron J Differential Equations, 2010, 2010: 1–5
- 9 Liu X G, Min J Z, Wang K, et al. Serrin's regularity results for the incompressible liquid crystals system. Discrete Contin Dyn Syst, 2016, 36: 5579–5594
- 10 Serrin J. On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations. Arch Ration Mech Anal, 1962, 9: 187–195
- 11 Struwe M. On partial regularity results for the navier-stokes equations. Commun Pure Appl Anal, 1988, 41: 437–458
- 12 Liu Q, Zhao J, Cui S. A regularity criterion for the three-dimensional nematic liquid crystal flow in terms of one directional derivative of the velocity. J Math Phys, 2011, 52: 033102
- 13 Gala S, Liu Q, Ragusa M A. Logarithmically improved regularity criterion for the nematic liquid crystal flows in $\dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}$ space. Comput Math Appl, 2013, 65: 1738–1745
- 14 Guillén-González F, Rodríguez-Bellido M A, Rojas-Medar M A. Sufficient conditions for regularity and uniqueness of a 3D nematic liquid crystal model. Math Nachr, 2009, 282: 846–867
- 15 Qian C Y. Remarks on the regularity criterion for the nematic liquid crystal flows in $\mathbb{R}^3$. Appl Math Comput, 2016, 274: 679–689
- 16 Scheffer V. Partial regularity of solutions to the Navier-Stokes equations. Pacific J Math, 1976, 66: 535–552
- 17 Scheffer V. Hausdorff measure and the Navier-Stokes equations. Comm Math Phys, 1977, 55: 97–112
- 18 Caffarelli L, Kohn R, Nirenberg L. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. Comm Pure Appl Math, 1982, 35: 771–831
- 19 Kučera P, Skalák Z. A note on the generalized energy inequality in the Navier-Stokes equations. Appl Math, 2003, 48: 537–545
- 20 Ladyzhenskaya O A, Seregin G A. On partial regularity of suitable weak solutions to the three-dimensional Navier-Stokes equations. J Math Fluid Mech, 1999, 1: 356–387
- 21 Lin F H. A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem. Comm Pure Appl Math, 1988, 51: 241–257
- 22 Vasseur A F. A new proof of partial regularity of solutions to Navier-Stokes equations. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl, 2007, 14: 753–785
- 23 Wolf J. A new criterion for partial regularity of suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations. In: Advances in Mathematical Fluid Mechanics. Berlin-Heidelberg: Springer, 2010, 613–630
- 24 Serëgin G A. On the local regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. Uspekhi Mat Nauk, 2007, 62: 149–168
- 25 Nečas J, Neustupa J. New conditions for local regularity of a suitable weak solution to the Navier-Stokes equation. J Math Fluid Mech, 2002, 4: 237–256
- 26 Seregin G. On smoothness of $L_{3, \infty}$ -solutions to the Navier-Stokes equations up to boundary. Math Ann, 2005, 332: 219–238
- 27 Seregin G, Sverák V. On smoothness of suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations. J Math Sci, 2005, 130: 4884–4892
- 28 Takahashi S. On interior regularity criteria for weak solutions of the Navier-Stokes equations. Manuscripta Math, 1990, 69: 237–254
- 29 Neustupa J. A removable singularity in a suitable weak solution to the Navier-Stokes equations. Nonlinearity, 2012,

- 25: 1695–1708
- 30 Neustupa J. A refinement of the local serrin-type regularity criterion for a suitable weak solution to the Navier-Stokes equations. *Arch Ration Mech Anal*, 2014, 214: 525–544
- 31 Gilbarg D, Trudinger N S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin: Springer-Verlag, 2001
- 32 Borchers W, Sohr H. On the equations $\operatorname{rot} v = g$ and $\operatorname{div} u = f$ with zero boundary conditions. *Hokkaido Math J*, 1990, 19: 67–87
- 33 Saks R S. Spectral problems for curl and Stokes operators (in Russian). *Dokl Akad Nauk*, 2007, 416: 446–450; translation in *Dokl Math*, 2007, 76: 724–728
- 34 Lai B, Ma W. On the interior regularity criteria for liquid crystal flows. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2018, 40: 1–13
- 35 Gustafson S, Kang K, Tsai T P. Interior regularity criteria for suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm Math Phys*, 2007, 273: 161–176

A local Serrin-type regularity criterion for a suitable weak solution to the incompressible liquid crystal system

Xiangao Liu, Shusheng Xia & Xiaotao Zhang

Abstract In this paper, we study the simplified system of the original Ericksen-Leslie equations for the flow of liquid crystals. For the three-dimensional incompressible liquid crystal system, we prove partial regularity results of its suitable weak solutions under Neustupa’s (2014) criteria.

Keywords liquid crystals, suitable weak solutions, partial regularity

MSC(2010) 35Q35, 76A15

doi: 10.1360/SCM-2017-0892