论文

轴对称贮箱内液体大幅晃动的复合等效力学模型

苗楠*, 刘战合, 王晓璐, 王菁, 李国举

郑州航空工业管理学院航空工程学院, 郑州 450046

*联系人, E-mail: miaonan@zua.edu.cn

收稿日期: 2019-12-02; 接受日期: 2020-02-03; 网络出版日期: 2020-04-14

国家自然科学基金(编号: 11702255)和河南省高等学校重点科研项目(编号: 18A590002)资助

摘要 航天工程中普遍使用等效力学模型描述液体晃动动力学, 但基于线性理论的传统等效力学模型在大幅晃动中的适用性较差、精度较低. 为此本文提出适用于常/低重力环境下液体大幅晃动的复合等效建模方法. 以轴对称贮箱为例, 提出了大幅晃动下跟随等效重力的液体动平衡位置确定方法, 建立了球面摆形式的复合等效力学模型, 并推导了等效系统动力学方程. 为验证该建模方法有效性和模型准确性, 对大幅平动和转动激励下三维圆柱形贮箱和Cassini贮箱内液体的晃动力和力矩、质心位置等进行了计算, 并将复合等效力学模型、传统等效力学模型及计算流体动力学软件的计算结果进行了对比分析. 结果表明, 该复合等效力学模型可对液体大幅晃动的动力学响应进行较为准确的预测.

关键词 液体大幅晃动, 复合等效建模, 动平衡位置, 轴对称贮箱

PACS: 45.50.Jf, 45.05.+x, 47.11.-j, 47.35.-i, 45.20.da

1 引言

液体晃动现象普遍存在于航空航天、汽车、土木、船舶等诸多工程领域, 而液体晃动的动力学响应及其施加在容器上的作用力和力矩等影响一直是备受关注的问题^[1-3]. 以航天工程为例, 现代航天器通常携带大量液体载荷, 其内液体的晃动将影响航天器的飞行安全和任务精度, 并可能导致航天器姿态不稳定性现象的发生^[4,5]. 尤其是在低重力和微重力环境下, 液体的剧烈晃动则可能造成灾难性的破坏事故^[6].

目前, 液体的大幅晃动问题通常由计算流体动力

学(Computational Fluid Dynamics, CFD)方法进行求解, 该方法通过直接求解Navier-Stokes方程或其简化方程, 在时域内对液体晃动进行数值模拟, 如标记子与单元(Marker-And-Cell, MAC)方法、任意拉格朗日-欧拉(Arbitrary Lagrangian-Eulerian, ALE)方法、流体体积(Volume Of Fluid, VOF)方法和光滑粒子流体动力学(Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH)方法等^[7]. 于强和王天舒^[8]基于SPH方法和质点系动量定理、动量矩定理, 提出了一种避免压力场计算误差影响的液体大幅晃动下力和力矩的求解策略, 并与CFD求解结果进行了对比验证. 覃颢然等人^[9]应用SPH方法和有

引用格式: 苗楠, 刘战合, 王晓璐, 等. 轴对称贮箱内液体大幅晃动的复合等效力学模型. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 074501
Miao N, Liu Z H, Wang X L, et al. Composite equivalent mechanical models for large-amplitude liquid sloshing in axisymmetrical tanks (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2020, 50: 074501, doi: 10.1360/SSPMA-2019-0394

限元法(Finite Element Method, FEM)的耦合算法对矩形贮箱内液体大幅晃动时的冲顶问题展开了模拟研究. Atif等人^[10]将SPH方法和有限元绝对节点坐标法(Absolute Nodal Coordinate Formulation, ANCF)在存在自由液面破碎的大幅晃动情形下的求解准确性进行了对比研究.

考虑到流体计算的复杂性和计算成本、计算效率等方面的要求, 工程上普遍采用等效力学模型对液体晃动动力学进行描述, 其形式主要包括单摆模型和弹簧-质量模型两种^[11-15]. 然而, 上述基于线性理论建立的等效力学模型在液体晃动幅度较大时, 其线性化前提不再成立、适用性受到限制. 为了提高线性等效力学模型在大幅晃动中的准确性, Farid和Gendelman^[16]通过在线性弹簧-质量形式的等效力学模型中增加3次非线性吸振器(Nonlinear Energy Sinks, NES), 对二维贮箱内液体发生中度非线性晃动的响应机制进行了研究. 邓明乐等人^[17]发展并完善了模拟液体大幅晃动的运动脉动球模型(Moving Pulsating Ball Model, MPBM), 在提高其准确性和仿真效果的基础上建立了多贮箱航天器的姿态动力学模型.

复合等效建模方法通过考虑晃动中液体平衡位置的变化, 大大扩展了线性等效力学模型的适用范围. 在本文作者之前的研究中以部分充液球形贮箱为例展开了研究, 通过考虑晃动中液体平衡位置的变化, 将液体大幅晃动分解为整体运动和小幅晃动, 提出了复合等效力学模型并进行了验证^[18-20]. 基于复合建模思想, Liu等人^[21,22]建立了球形贮箱内液体非线性晃动的三自由度刚体摆复合模型, 用该模型对整体刚性运动、大幅横向晃动、旋转运动、起旋运动等非线性行为进行了近似描述, 并深入研究了充液柔性航天器内燃料晃动与柔性太阳帆板振动的耦合作用及刚-柔-液耦合的姿态控制问题.

然而对于非球形贮箱, 液体动平衡位置的变化将受到形状贮箱的限制, 且贮箱壁面附近的液体将相对于贮箱保持静止. 因此, 适用于非球形贮箱的液体大幅晃动复合等效建模方法将与之前研究中的球形贮箱有所不同. 本文以航天工程中常见的部分充液圆柱形贮箱、Cassini贮箱为例, 提出了三维轴对称贮箱内液体大幅晃动的复合等效力学模型, 并通过将其计算结果与CFD软件、传统等效力学模型的计算结果进行对比, 验证了该复合等效建模方法的有效性和准确性.

2 建模方法

以工程中常见的轴对称贮箱为例, 给出大幅晃动情形下动平衡位置的确定方法, 并介绍复合等效力学模型建立方法.

2.1 动平衡位置确定方法

对于如图1(a)所示的部分充液球形贮箱, 由已有研究结果可知^[20], 外部激励作用下贮箱内所有液体的动平衡位置均跟随等效重力(重力与惯性力的合力)而变, 定义等效重力加速度为

$$\mathbf{g}_e = \mathbf{g} + \mathbf{a}_c \quad (1)$$

其中, $\mathbf{g}$ 为重力加速度, $\mathbf{a}_c$ 为贮箱运动引起的惯性加速度.

对于圆柱形贮箱等非球形贮箱, 由于受到贮箱形状的限制, 仅有部分液体的动平衡位置跟随等效重力而变. 如图1(b)所示, 假设圆柱形贮箱内的液体由两部分组成, 即自由液面附近的半个旋转椭球体(图中浅色部分)和贮箱壁面附近的剩余部分(图中深色部分). 自由液面附近的半个旋转椭球体(简称半椭球)所对应的液体平衡位置完全跟随等效重力变化. 半椭球绕长轴旋转而成, 长轴在自由液面内, 与平动激励方向始终共面, 其长度可由贮箱半径和等效重力加速度唯一确定, 短轴即为贮箱直径. 贮箱壁面附近的剩余液体部分在激励作用下仍相对贮箱保持静止.

对两端半球、中间柱段的Cassini贮箱, 其内液体动平衡位置的分析 and 建模较为复杂, 原因是充液高度的不同可能引起外部激励下自由液面所处位置、形状及尺寸的差异. 如图2所示, 对于自由液面始终保持在下半球、柱段或上半球范围内的低/中/高充液比情形, 可认为与球形或圆柱形贮箱情形相同或类似. 而对于

图1 (网络版彩图)球形贮箱(a)及圆柱形贮箱(b)动平衡位置示意图

Figure 1 (Color online) Diagrams of dynamic equilibrium position in spherical tanks (a) and cylindrical tanks (b).

图2 (网络版彩图) Cassini贮箱不同充液情形液体组成及动平衡位置示意图. (a) 低充液比; (b) 中低充液比; (c) 中充液比; (d) 中高充液比; (e) 高充液比

Figure 2 (Color online) Diagrams of liquid formation and dynamic equilibrium position in Cassini tanks with different fill ratios. (a) Low fill ratio; (b) low-medium fill ratio; (c) medium fill ratio; (d) medium-high fill ratio; (e) high fill ratio.

自由液面同时涉及柱段和半球范围的中低/中高充液比情形, 同样认为自由液面附近液体部分(图中浅色部分)的动平衡位置由等效重力而定, 贮箱壁面附近剩余液体部分(图中深色部分)相对贮箱保持静止. 但此时接触线形状不再是完整的椭圆, 而是由部分圆(半球段接触线)与部分椭圆(圆柱段接触线)连接而成. 故可假设此时Cassini贮箱内动平衡位置跟随等效重力而变的液体为部分球体与部分旋转椭球体的组合体.

2.2 复合等效建模方法

传统等效建模方法认为, 重力决定了液体的平衡位置并在液体晃动中提供回复力. 由此建立的单摆或弹簧-质量等效力学模型在液体晃动幅度较小时可以达到很高的精度. 但对于有限幅甚至液体大幅晃动, 传统等效建模方法的线性化前提不再存在, 其仿真精度也将明显降低. 复合等效力学模型考虑了液体晃动中的平衡位置变化, 认为液体的平衡状态及晃动回复力由等效重力确定.

就等效模型形式和组成而言, 复合等效力学模型

与传统等效力学模型的区别在于: 传统等效力学模型质量由晃动质量和静止质量两部分组成; 而复合等效力学模型中的液体质量包含固定于贮箱的部分、仅跟随等效重力变化的部分和跟随等效重力变化且相对于动平衡位置发生小幅晃动的部分. 而这三部分液体质量在外部激励作用下的状态或运动规律皆不相同, 给建模带来了一定难度.

将上述三部分质量分别称为静止质量、动平衡质量和晃动质量. 静止质量以质量为 m_0 、相对其质心惯量为 I_0 的质量块代替, 表示相对贮箱保持静止的液体部分. 动平衡质量以质量为 m_d 、相对其质心惯量为 I_d 的质量块代替, 其质心位置即为该部分液体的动平衡位置, 由等效重力完全确定. 晃动质量以质量为 m_p 、摆长为 l_p 的球面摆代替, 球面摆的平衡位置同样由等效重力确定, 并在此基础上发生小幅晃动. 因此, 复合等效力学模型将液体相对于贮箱的运动分解为整体运动与小幅度晃动的叠加. 液体的整体运动取决于等效重力, 由动平衡位置表示, 参与整体运动的液体质量为 m_d+m_p ; 而小幅度晃动在整体运动的基础上发生, 表现为液体相对于动平衡位置的小幅晃动, 即质量为 m_p 的摆球相对于其动平衡位置的小幅摆动.

根据液体总质量、液体质心位置及转动惯量等方面的等效条件, 有

$$m_{\text{liq}} = m_p + m_d + m_0, \quad (2)$$

$$m_{\text{liq}} \mathbf{r}_{\text{cliq}} = m_p \mathbf{r}_{\text{pb}} + m_d \mathbf{r}_{\text{db}} + m_0 \mathbf{r}_0, \quad (3)$$

$$\mathbf{J}_{\text{liq}} = \mathbf{I}_p + \mathbf{I}_d + \mathbf{I}'_d + \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}'_0, \quad (4)$$

其中, m_{liq} 为液体总质量, $\mathbf{r}_{\text{cliq}}$ 为液体质心相对于贮箱本体系原点 O_b 的矢径. $\mathbf{r}_{\text{pb}}$, $\mathbf{r}_{\text{db}}$ 和 $\mathbf{r}_0$ 分别代表晃动质量、动平衡质量质心和静止质量质心相对于 O_b 点的矢径. $\mathbf{J}_{\text{liq}}$ 代表液体等效刚体关于 O_b 点的惯量张量, $\mathbf{I}_p$, $\mathbf{I}'_d$ 和 $\mathbf{I}'_0$ 分别为晃动质量、动平衡质量质心和静止质量质心关于 O_b 点的惯量张量. 晃动质量及动平衡质量的上述等效参数由半椭球体的有限元计算得到, 再根据等效条件计算静止质量块的相关参数, 有

$$m_0 = m_{\text{liq}} - m_p - m_d, \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_0 = \frac{m_{\text{liq}} \mathbf{r}_{\text{cliq}} - m_p \mathbf{r}_{\text{pb}} - m_d \mathbf{r}_{\text{db}}}{m_0}, \quad (6)$$

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{J}_{\text{liq}} - \mathbf{I}_p - \mathbf{I}_d - \mathbf{I}'_d - \mathbf{I}'_0. \quad (7)$$

此外, 由于动平衡液面特征长度的改变, 液体晃动

的固有频率将发生变化, 即随着自由液面面积的增加, 液体晃动固有频率将降低. 固有频率的降低将导致等效力学模型参数的变化, 尤其是在时变激励作用下, 部分参数将实时变化.

3 等效系统动力学方程

基于复合等效力学模型可推导等效系统的动力学方程及晃动力和力矩的求解方法. 等效系统如图3所示, 其中 O_0XYZ 为惯性坐标系, O_bxyz 为本体坐标系, $O_cx'y'z'$ 为等效重力坐标系, O_c 点位于自由液面中心. 重力加速度矢量 $\mathbf{g}$ 和等效重力加速度矢量 $\mathbf{g}_e$ 分别沿 O_0Z 轴和 O_cz' 轴的负向. $\mathbf{R}_b$ 为 O_b 点相对于 O_0 点的矢径, $\mathbf{r}_c$ 为 O_c 点相对于 O_b 点的矢径, 即自由液面中心在航天器本体坐标系中的位置. 球面摆通过一个万向铰与贮箱连接, 悬挂点相对于 O_c 点的矢径为 $\mathbf{r}_h$, 晃动质量 m_p 相对于悬挂点的矢径为 $\mathbf{r}_p$, 动平衡质量块的质心相对于 O_c 点的矢径定义为 $\mathbf{r}_d$.

假设贮箱受到平动和转动激励的作用, 那么等效重力中的惯性加速度应同时包含平动和转动的影响. 贮箱平动所引起的惯性加速度与液体在贮箱内的位置无关, 但贮箱转动所引起的离心加速度是液体质点位置的函数. 以自由液面中心即 O_c 点为基准, 可将等效重力加速度定义为

$$\mathbf{g}_e = \mathbf{g} - \ddot{\mathbf{R}}_b - \dot{\boldsymbol{\omega}}_b \times \mathbf{r}_c - \boldsymbol{\omega}_b \times (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{r}_c). \quad (8)$$

假设本体坐标系 O_bxyz 相对于惯性坐标系 O_0XYZ 转动的角速度为 $\boldsymbol{\omega}_b$, 等效重力坐标系 $O_cx'y'z'$ 相对于惯性坐标系 O_0XYZ 转动的角速度为 $\boldsymbol{\omega}_{eg}$, 而球面摆相对于等效重力坐标系 $O_cx'y'z'$ 转动的角速度用 $\boldsymbol{\omega}_p$ 表示. 那么晃动质量相对于惯性坐标系原点 O_0 的矢径、加速度和速度变分分别表示为

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_b + \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_h + \mathbf{r}_p, \quad (9)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_p = \ddot{\mathbf{R}}_b + \dot{\boldsymbol{\omega}}_b \times \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\omega}_b \times (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{r}_c) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} \times \mathbf{r}_h + \boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\boldsymbol{\omega}_{eg} \times \mathbf{r}_h) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_p + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p), \quad (10)$$

$$\delta \dot{\mathbf{R}}_p = \delta \dot{\mathbf{R}}_b + \delta \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{r}_c + \delta \boldsymbol{\omega}_{eg} \times \mathbf{r}_h + \delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p, \quad (11)$$

其中,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_{eg} \quad (12)$$

代表晃动质量相对于惯性坐标系 O_0XYZ 转动的角速度.

图3 (网络版彩图)复合等效系统示意图

Figure 3 (Color online) Diagram of composite equivalent system.

动平衡质量块上某一点相对于惯性坐标系原点 O_0 的矢径、加速度和速度变分分别表示为

$$\mathbf{R}_d = \mathbf{R}_b + \mathbf{r}_c + \mathbf{r}_d + \mathbf{r}'_d, \quad (13)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_d = \ddot{\mathbf{R}}_b + \dot{\boldsymbol{\omega}}_b \times \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\omega}_b \times (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{r}_c) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} \times (\mathbf{r}_d + \mathbf{r}'_d) + \boldsymbol{\omega}_{eg} \times [\boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\mathbf{r}_d + \mathbf{r}'_d)], \quad (14)$$

$$\delta \dot{\mathbf{R}}_d = \delta \dot{\mathbf{R}}_b + \delta \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{r}_c + \delta \boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\mathbf{r}_d + \mathbf{r}'_d), \quad (15)$$

其中, $\mathbf{r}'_d$ 为该点相对于动平衡质量块质心的矢径. 类似地, 可以将静止质量块上某一点相对于惯性坐标系原点 O_0 的矢径、加速度和速度变分分别表示为

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_b + \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0, \quad (16)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_0 = \ddot{\mathbf{R}}_b + \dot{\boldsymbol{\omega}}_b \times (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0) + \boldsymbol{\omega}_b \times [\boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0)], \quad (17)$$

$$\delta \dot{\mathbf{R}}_0 = \delta \dot{\mathbf{R}}_b + \delta \boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0), \quad (18)$$

其中, $\mathbf{r}'_0$ 为该点相对于静止质量块质心的矢径. 除去等效重力中所包含的平动引起的惯性力和 O_c 处离心加速度对应的惯性力, 余下的惯性力所引起的晃动质量、动平衡质量和静止质量虚功率分别表示为

$$\begin{aligned}
 \delta P_p^I &= -m_p \delta \dot{\mathbf{R}}_p \cdot [\ddot{\mathbf{R}}_p - \ddot{\mathbf{R}}_b - \dot{\boldsymbol{\omega}}_b \times \mathbf{r}_c - \boldsymbol{\omega}_b \times (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{r}_c)] \\
 &= -\delta \dot{\mathbf{R}}_b \cdot [\dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} \times m_p \mathbf{r}_h + m_p \boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\boldsymbol{\omega}_{eg} \times \mathbf{r}_h) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{S}_p + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_p)] \\
 &\quad -\delta \boldsymbol{\omega}_b \cdot \left\{ m_p \mathbf{r}_c \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} \times \mathbf{r}_h) + m_p \mathbf{r}_c \times [\boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\boldsymbol{\omega}_{eg} \times \mathbf{r}_h)] + \mathbf{r}_c \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{S}_p) + \mathbf{r}_c \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_p)] \right\} \\
 &\quad -\delta \boldsymbol{\omega}_{eg} \cdot \left(m_p [(\mathbf{r}_h \cdot \mathbf{r}_h) \mathbf{E} - \mathbf{r}_h \mathbf{r}_h] \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} + \boldsymbol{\omega}_{eg} \times \left\{ m_p [(\mathbf{r}_h \cdot \mathbf{r}_h) \mathbf{E} - \mathbf{r}_h \mathbf{r}_h] \cdot \boldsymbol{\omega}_{eg} \right\} + \mathbf{r}_h \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{S}_p) \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{r}_h \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_p)] \right) - \delta \boldsymbol{\omega} \cdot \left\{ \mathbf{S}_p \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} \times \mathbf{r}_h) + \mathbf{S}_p \times [\boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\boldsymbol{\omega}_{eg} \times \mathbf{r}_h)] + \mathbf{J}_p \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_p \cdot \boldsymbol{\omega}) \right\}, \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta P_d^I &= -\int_{V_d} \delta \dot{\mathbf{R}}_d \cdot [\ddot{\mathbf{R}}_d - \ddot{\mathbf{R}}_b - \dot{\boldsymbol{\omega}}_b \times \mathbf{r}_c - \boldsymbol{\omega}_b \times (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{r}_c)] dm \\
 &= -\delta \dot{\mathbf{R}}_b \cdot [\dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} \times \mathbf{S}_d + \boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\boldsymbol{\omega}_{eg} \times \mathbf{S}_d)] - \delta \boldsymbol{\omega}_b \cdot \left\{ \mathbf{r}_c \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} \times \mathbf{S}_d) + \mathbf{r}_c \times [\boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\boldsymbol{\omega}_{eg} \times \mathbf{S}_d)] \right\} \\
 &\quad -\delta \boldsymbol{\omega}_{eg} \cdot [\mathbf{J}_d \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} + \boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\mathbf{J}_d \cdot \boldsymbol{\omega}_{eg})], \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta P_0^I &= -\int_{V_0} \delta \dot{\mathbf{R}}_0 \cdot [\ddot{\mathbf{R}}_0 - \ddot{\mathbf{R}}_b - \dot{\boldsymbol{\omega}}_b \times \mathbf{r}_c - \boldsymbol{\omega}_b \times (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{r}_c)] dm \\
 &= -\delta \dot{\mathbf{R}}_b \cdot \{ \dot{\boldsymbol{\omega}}_b \times (\mathbf{S}_0 - m_0 \mathbf{r}_c) + \boldsymbol{\omega}_b \times [\boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{S}_0 - m_0 \mathbf{r}_c)] \} - \delta \boldsymbol{\omega}_b \cdot \{ \mathbf{J}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_b + \boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{J}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_b) \\
 &\quad - \mathbf{S}_0 \times [\dot{\boldsymbol{\omega}}_b \times \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\omega}_b \times (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{r}_c)] \}, \quad (21)
 \end{aligned}$$

其中, V_d 代表动平衡质量块的体积范围, $\mathbf{S}_p$ 和 $\mathbf{J}_p$ 分别为球面摆晃动质量相对于其悬挂点的静矩和转动惯量, $\mathbf{S}_d$ 和 $\mathbf{J}_d$ 分别表示动平衡质量块相对于 O_c 点的静矩和转动惯量, $\mathbf{S}_0$ 和 $\mathbf{J}_0$ 分别表示静止质量块相对于 O_b 点的静矩和转动惯量, 写为

$$\mathbf{S}_p = m_p \mathbf{r}_p, \quad \mathbf{J}_p = m_p [(\mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_p) \mathbf{E} - \mathbf{r}_p \mathbf{r}_p], \quad (22)$$

$$\mathbf{S}_d = m_d \mathbf{r}_d, \quad \mathbf{J}_d = m_d [(\mathbf{r}_d \cdot \mathbf{r}_d) \mathbf{E} - \mathbf{r}_d \mathbf{r}_d] + \mathbf{I}_d, \quad (23)$$

$$\mathbf{S}_0 = m_0 \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{J}_0 = m_0 [(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0) \mathbf{E} - \mathbf{r}_0 \mathbf{r}_0] + \mathbf{I}_0. \quad (24)$$

晃动质量、动平衡质量块和静止质量块对应的等效重力虚功率分别写为

$$\begin{aligned}
 \delta P_p^{g_e} &= m_p \delta \dot{\mathbf{R}}_p \cdot \mathbf{g}_e \\
 &= \delta \dot{\mathbf{R}}_b \cdot m_p \mathbf{g}_e + \delta \boldsymbol{\omega}_b \cdot (m_p \mathbf{r}_c \times \mathbf{g}_e) \\
 &\quad + \delta \boldsymbol{\omega}_{eg} \cdot (m_p \mathbf{r}_h \times \mathbf{g}_e) + \delta \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{S}_p \times \mathbf{g}_e), \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta P_d^{g_e} &= \int_{V_d} \delta \dot{\mathbf{R}}_d \cdot \mathbf{g}_e dm \\
 &= \delta \dot{\mathbf{R}}_b \cdot m_d \mathbf{g}_e + \delta \boldsymbol{\omega}_b \cdot (m_d \mathbf{r}_c \times \mathbf{g}_e) \\
 &\quad + \delta \boldsymbol{\omega}_{eg} \cdot (\mathbf{S}_d \times \mathbf{g}_e), \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta P_0^{g_e} &= \int_{V_0} \delta \dot{\mathbf{R}}_0 \cdot \mathbf{g}_e dm \\
 &= \delta \dot{\mathbf{R}}_b \cdot m_0 \mathbf{g}_e + \delta \boldsymbol{\omega}_b \cdot (\mathbf{S}_0 \times \mathbf{g}_e). \quad (27)
 \end{aligned}$$

考虑液体晃动中的阻尼作用, 假设最低阶晃动模态对应的固有频率为 ω 、阻尼比为 ζ , 那么晃动质量的阻尼力虚功率可表示为

$$\delta P_p^d = -\delta \boldsymbol{\omega}_p \cdot (\mathbf{C}_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p), \quad (28)$$

其中,

$$\mathbf{C}_p = 2\zeta \omega m_p l_p^2 (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_2), \quad (29)$$

$\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 分别为万向铰对应于广义坐标 α_1 和 α_2 转轴方向的单位矢量, 即有

$$\boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{p}_1 \dot{\alpha}_1 + \mathbf{p}_2 \dot{\alpha}_2. \quad (30)$$

假设液体对贮箱的作用力和作用力矩分别为 $\mathbf{F}_t$ 和 $\mathbf{F}_r$, 其中 $\mathbf{F}_r$ 由姿态机动引起的作用力矩 $\mathbf{F}_{rb}$ 和等效重力变化引起的作用力矩 $\mathbf{F}_{reg}$ 两部分组成. 那么贮箱施加给液体的主动力虚功率可表示为

$$\delta P^a = -\delta \dot{\mathbf{R}}_b \cdot \mathbf{F}_t - \delta \boldsymbol{\omega}_b \cdot \mathbf{F}_{rb} - \delta \boldsymbol{\omega}_{eg} \cdot \mathbf{F}_{reg}. \quad (31)$$

等效系统满足虚功率原理, 即

$$\begin{aligned}
 \delta P_p^I + \delta P_d^I + \delta P_0^I + \delta P_p^{g_e} + \delta P_d^{g_e} + \delta P_0^{g_e} \\
 + \delta P_p^d + \delta P^a = 0. \quad (32)
 \end{aligned}$$

从而可以推导得到等效系统的动力学方程如下:

$$\begin{aligned}
& \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{S}_p + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_p) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} \times m_p \mathbf{r}_h \\
& + m_p \boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\boldsymbol{\omega}_{eg} \times \mathbf{r}_h) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} \times \mathbf{S}_d \\
& + \boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\boldsymbol{\omega}_{eg} \times \mathbf{S}_d) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_b \times (\mathbf{S}_0 - m_0 \mathbf{r}_c) \\
& + \boldsymbol{\omega}_b \times [\boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{S}_0 - m_0 \mathbf{r}_c)] \\
& = (m_p + m_d + m_0) \mathbf{g}_c - \mathbf{F}_l,
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{r}_c \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{S}_p) + \mathbf{r}_c \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_p)] \\
& + m_p \mathbf{r}_c \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} \times \mathbf{r}_h) + m_p \mathbf{r}_c \times [\boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\boldsymbol{\omega}_{eg} \times \mathbf{r}_h)] \\
& + \mathbf{r}_c \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} \times \mathbf{S}_d) + \mathbf{r}_c \times [\boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\boldsymbol{\omega}_{eg} \times \mathbf{S}_d)] \\
& + \mathbf{J}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_b + \boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{J}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_b) \\
& - \mathbf{S}_0 \times [\dot{\boldsymbol{\omega}}_b \times \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\omega}_b \times (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{r}_c)] \\
& = (m_p \mathbf{r}_c + m_d \mathbf{r}_c + \mathbf{S}_0) \times \mathbf{g}_e - \mathbf{F}_{rb},
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{J}_p \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_p \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{S}_p \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} \times \mathbf{r}_h) \\
& + \mathbf{S}_p \times [\boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\boldsymbol{\omega}_{eg} \times \mathbf{r}_h)] \\
& + m_p [(\mathbf{r}_h \cdot \mathbf{r}_h) \mathbf{E} - \mathbf{r}_h \mathbf{r}_h] \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} \\
& + \boldsymbol{\omega}_{eg} \times \left\{ m_p [(\mathbf{r}_h \cdot \mathbf{r}_h) \mathbf{E} - \mathbf{r}_h \mathbf{r}_h] \cdot \boldsymbol{\omega}_{eg} \right\} \\
& + \mathbf{r}_h \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{S}_p) \\
& + \mathbf{r}_h \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_p)] + \mathbf{J}_d \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} + \boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\mathbf{J}_d \cdot \boldsymbol{\omega}_{eg}) \\
& = (m_p \mathbf{r}_h + \mathbf{S}_p + \mathbf{S}_d) \times \mathbf{g}_c - \mathbf{F}_{reg}, \tag{35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_p \times [\dot{\boldsymbol{\omega}}_{eg} \times \mathbf{r}_h + \boldsymbol{\omega}_{eg} \times (\boldsymbol{\omega}_{eg} \times \mathbf{r}_h)] + \mathbf{J}_p \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_p \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{C}_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{S}_p \times \mathbf{g}_e. \end{aligned} \quad (36)$$

其中式(33)为等效系统的平动方程, 式(34)和(35)分别为与转动激励相关和与等效重力变化相关的转动方程, 式(36)为球面摆的晃动方程. 由晃动方程求得球面摆的运动规律, 代入平动和转动方程即可求得晃动力 $\mathbf{F}_t$ 和晃动力矩 $\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{rb} + \mathbf{F}_{reg}$.

对于球形贮箱, 考虑到其内所有液体都发生整体运动的特殊性, 可从上述模型中去除静止质量块。此外, 由于球面摆的悬挂点将始终位于球心, 故可将等效重力坐标系原点选为球心, 针对球形贮箱简化得到的等效系统如图4所示。根据几何简化关系, 代入式(33)–(36)可进一步推导得到适用于球形贮箱内液体大幅晃动的复合等效系统动力学方程, 从而得到晃动力、晃动力矩的求解方法。

图4 球形贮箱复合等效系统示意图

Figure 4 Diagram of composite equivalent system in spherical tanks.

4 算例验证

以部分充液圆柱形贮箱和中高充液比Cassini贮箱为例, 将大幅平动和转动激励下复合等效力学模型对晃动力、晃动力矩、液体质心位置等的计算结果与CFD软件Flow-3D^[23]的仿真结果、传统单摆等效力学模型的计算结果进行对比, 从而对复合等效建模方法进行验证。算例中所用液体为常温下的水, 密度 $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$, 表面张力系数 $\sigma=0.073 \text{ N/m}$, 动力学黏性系数 $\mu=0.001 \text{ N s/m}^2$ 。

4.1 圆柱形贮箱

以圆柱形贮箱为例, 对平动和转动激励下液体大幅晃动的复合等效力学模型进行验证. 假设重力加速度大小为 1 m/s^2 , 贮箱半径 $r=0.5 \text{ m}$, 高度 $h=2 \text{ m}$, 液深为 1 m . 初始时刻本体坐标系 O_bxyz 与惯性坐标系 O_0XYZ 重合, 坐标原点位于贮箱下底面中心. 若该贮箱受到恒定水平加速度激励的作用, 则可以对本文所提出的动平衡位置确定方法进行简单验证. 因此, 首先假设沿 y 轴正向分别作用 3 种不同大小的恒定平动加速度. 将基于 2.1 节动平衡位置确定方法所推导的 y 轴方向液体质心位置结果与 CFD 仿真结果进行对比, 并以 CFD 仿真结果为准给出相对误差. 由表 1 给出的对比结果可见, 本文所提出的动平衡位置确定方法可对大幅平动激励下圆柱形贮箱内的液体质心位置进行准确

表1 圆柱形贮箱恒定平动加速度激励下的y轴质心位置

Table 1 y-axis liquid center of mass in cylindrical tanks under constant translational acceleration

a_y (m/s ²)	本文推导结果 (m)	CFD仿真结果 (m)	相对误差 (%)
0.6	-0.03750	-0.03756	0.1676
0.4	-0.02500	-0.02501	0.0256
0.2	-0.01250	-0.01249	-0.1095

预测.

考虑大幅平动和转动时变激励, 进一步验证圆柱形贮箱内液体晃动的复合等效建模方法. 假设外部激励使贮箱沿y轴平动的同时绕y轴转动, 运动规律为 $y=\sin(0.2\pi t)$ m, $\theta_y=0.5\sin(0.25\pi t)$ rad. 图5给出了该组激励作用下部分时刻液体形态及压强分布的CFD仿真结果, 可见液体在x轴和y轴方向上均发生了较大幅度的晃动, 属于典型的大幅晃动情形.

在该时变激励作用下, 等效模型中的所有参数将随等效重力的变化而变化. 因此, 以初始状态(无激励状态)和最大激励状态的等效模型参数为基准进行插值, 确定其他激励状态下的各个等效模型参数, 其中等效模型各参数由有限元计算得到^[12]. 以自由液面倾角 θ 为横坐标(此处取为绝对值), 球面摆摆长 l_p 、晃动质量 m_p 、动平衡质量 m_d 和静止质量 m_0 等部分参数的插值结果如图6所示. 可以看到, 随着自由液面倾角的增大, 球面摆摆长和晃动质量单调增大、动平衡质量和静止质量单调减小. 同时, 随自由液面倾角增加, 各参数变化更为剧烈, 但在插值点足够密集的情况下, 可近似保证各参数线性插值结果的准确性.

为验证本文所提出的复合等效力学模型在该激励下的有效性和准确性, 将复合等效力学模型对x轴和y

轴晃动力和力矩的计算结果与CFD仿真结果、传统单摆等效力学模型的计算结果进行对比, 晃动力和晃动力矩的对比结果分别如图7和8所示. 其中, 传统单摆等效力学模型的计算结果由参考文献[12]中的建模方法求得, 即假设单摆平衡位置始终沿重力方向. 晃动力方面, 在y轴即平动方向上, 复合等效力学模型与CFD结果基本吻合, 而传统等效力学模型计算结果因液体晃动幅度较大而准确度很低; 绕y轴转动引起x轴方向的晃动力, 而由转动所引起的球面摆摆动幅度较大(摆角幅值约为25°), 因此复合等效力学模型与CFD仿真在部分周期内的幅值计算结果上有所偏差, 但变化趋势基本吻合, 且与传统等效力学模型相比有明显改善.

晃动力矩方面可得到类似结论, 即相比于传统单摆等效力学模型, x和y两轴晃动力矩的复合等效力学模型计算结果与CFD仿真结果在幅值和变化趋势上明显都有更高的吻合度. 由此, 可认为复合等效力学模型在部分充液圆柱形贮箱受大幅平动和转动激励下的准确性和有效性得到了验证, 且相比于传统等效力学模型在晃动力和力矩的计算精度上有明显改善.

4.2 Cassini贮箱

对两轴平动激励下Cassini贮箱内液体大幅晃动的复合等效力学模型进行验证. 仍假设重力加速度大小为 1 m/s^2 , 贮箱半径 $r=0.5 \text{ m}$, 柱段高度 $h=1.2 \text{ m}$, 本体坐标系原点位于下半球球心. 初始时刻自由液面相对于坐标原点的高度为 1.1 m , 在大幅晃动下接触线将从柱段移动至上半球范围内, 因此属于中高充液比情形. 因此, 动平衡位置跟随等效重力而变的液体应表示为部分球体与部分旋转椭球体的组合体, 此处以1/4球体与1/4旋转椭球体的组合体作为近似. 平动加速度幅值为

图5 (网络版彩图)圆柱形贮箱部分时刻液体形态及压强分布. (a) $t=22 \text{ s}$; (b) $t=42 \text{ s}$; (c) $t=78 \text{ s}$; (d) $t=98 \text{ s}$
Figure 5 (Color online) Liquid configuration and pressure distribution at some moments in the cylindrical tank. (a) $t=22 \text{ s}$; (b) $t=42 \text{ s}$; (c) $t=78 \text{ s}$; (d) $t=98 \text{ s}$.

图6 (网络版彩图)圆柱形贮箱部分等效力学模型参数插值结果. (a) l_p ; (b) m_p ; (c) m_d ; (d) m_0

Figure 6 (Color online) Interpolation results of some equivalent mechanical model parameters in the cylindrical tank. (a) l_p ; (b) m_p ; (c) m_d ; (d) m_0 .

图7 (网络版彩图)圆柱形贮箱晃动力对比. (a) x 轴; (b) y 轴

Figure 7 (Color online) Comparisons of slosh forces in the cylindrical tank. (a) x -axis; (b) y -axis.

0, 0.4和0.8 m/s^2 时的组合体形态及网格划分情况分别如图9(a)–(c)所示.

假设贮箱同时沿 x 轴和 y 轴正弦平动, 运动规律表

示为 $x=4\sin(0.1\pi t)$ m, $y=1.5\sin(0.2\pi t)$ m. 由图10给出的部分时刻液体形态及压强分布的CFD仿真结果可见, 液体在 x 轴和 y 轴方向上均发生了大幅晃动.

图8 (网络版彩图)圆柱形贮箱晃动力矩对比. (a) x轴; (b) y轴

Figure 8 (Color online) Comparisons of slosh moments in the cylindrical tank. (a) x-axis; (b) y-axis.

图9 (网络版彩图)中高充液比Cassini贮箱组合体形态及网格划分情况. (a) $a=0$ m/s²; (b) $a=0.4$ m/s²; (c) $a=0.8$ m/s²

Figure 9 (Color online) Configuration and mesh generation of the combination in the medium-high fill ratio Cassini tank. (a) $a=0$ m/s²; (b) $a=0.4$ m/s²; (c) $a=0.8$ m/s².

图10 (网络版彩图) Cassini贮箱部分时刻液体形态及压强分布. (a) $t=33$ s; (b) $t=67$ s; (c) $t=97$ s

Figure 10 (Color online) Liquid configuration and pressure distribution at some moments in the Cassini tank. (a) $t=33$ s; (b) $t=67$ s; (c) $t=97$ s.

类似地, 给出两轴晃动力的复合等效力学模型和CFD仿真对比结果, 如图11所示. 此外, 由于质心位置变化是液体晃动的主要表现形式之一, 图12给出了液

体在x轴和y轴上质心位置的计算结果对比.

由两组对比结果可见, 在x轴方向对应的大幅激励下, 复合等效力学模型对晃动力和质心位置都有着较

图11 (网络版彩图) Cassini贮箱晃动力对比. (a) x 轴; (b) y 轴

Figure 11 (Color online) Comparisons of slosh forces in the Cassini tank. (a) x -axis; (b) y -axis.

图12 (网络版彩图) Cassini贮箱液体质心位置对比. (a) x 轴; (b) y 轴

Figure 12 (Color online) Comparisons of liquid center of mass position in the Cassini tank. (a) x -axis; (b) y -axis.

为准确的预测. 而在 y 轴方向对应的更大加速度幅值的平动激励下, 复合等效力学模型的结果与CFD仿真结果之间存在一定误差, 但变化范围和变化趋势基本吻合. 综上, 可认为该复合等效建模方法在中高充液比Cassini贮箱受两轴平动激励而发生液体大幅晃动情形下的有效性得到了验证.

5 结论

本文建立了适用于常重力和低重力环境下部分充液轴对称贮箱内液体大幅晃动的复合等效力学模型. 该模型采用球面摆形式, 考虑液体的动平衡位置变化, 将自由液面附近液体的大幅晃动分解为整体运动和小幅晃动. 基于该复合等效建模方法, 推导了等效系统动

力学方程, 并给出了晃动力和力矩的求解方法.

通过将复合等效力学模型的数值仿真结果与CFD软件的仿真结果进行对比, 验证了复合等效力学模型的准确性和该建模方法的有效性. 此外, 通过与传统单摆模型仿真结果的对比, 进一步揭示了复合等效力学模型在大幅晃动仿真中的优势. 但在4.2节中高充液比Cassini贮箱的大幅平动激励算例对比中, 液体晃动力和质心位置结果与CFD仿真结果相比均有一定误差, 考虑为以1/4球体与1/4旋转椭球体的组合体作为动平衡位置跟随等效重力而变的液体的近似所导致. 后续将以Cassini贮箱和水滴形贮箱等轴对称贮箱为例, 探索复合等效力学模型中模型参数更为精确的描述和确定方法, 并为推广至任意充液情形及任意形状三维贮箱奠定重要基础.

致谢 感谢清华大学李俊峰教授、王天舒教授和宝音贺西教授在本研究中给予的支持和帮助.

参考文献

- 1 Ibrahim R A, Singh B. Assessment of ground vehicle tankers interacting with liquid sloshing dynamics. *Int J Heavy Veh Syst*, 2018, 25: 23
- 2 Wu G X. The sloshing of stratified liquid in a two-dimensional rectangular tank. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2011, 54: 2–9
- 3 Stephen J J, Sannasiraj S A, Sundar V. Numerical modeling of nonlinear sloshing of liquid in a container coupled with barge subjected to regular excitation. *J Hydrodyn*, 2019, 31: 999–1010
- 4 Yue B Z, Ahmad S, Song X J. Casimir method for attitude stability analysis of liquid-filled spacecraft (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2013, 43: 401–406 [岳宝增, Ahmad S, 宋晓娟. 充液航天器姿态稳定分析的Casimir方法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 401–406]
- 5 Zhong S, Chen Y S. Modeling and chaos of the liquid nonlinear sloshing in the engineering liquid-filled cavity (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2013, 43: 372–379 [钟顺, 陈予恕. 工程充液腔体中液体非线性晃动模型及混沌分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 372–379]
- 6 Tang Y, Yue B Z, Yan Y L. Improved method for implementing contact angle condition in simulation of liquid sloshing under microgravity. *Int J Numer Meth Fluids*, 2019, 89: 123–142
- 7 Yue B Z. Construction of Micro-Gravitational Environment for Spacecraft Operation (in Chinese). Beijing: Science Press, 2011 [岳宝增. 液体大幅晃动动力学. 北京: 科学出版社, 2011]
- 8 Yu Q, Wang T S. Dynamic analysis of large-scale amplitude liquid sloshing in the spacecraft (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2019, 49: 024514 [于强, 王天舒. 航天器贮箱内液体大幅晃动动力学分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 024514]
- 9 Qin H R, Hua Y, Wang Z. Numerical investigation on the large amplitude sloshing roof impact in a tank with SPH-FEM coupling algorithm (in Chinese). *Chin J Hydrodyn*, 2019, 34: 384–394 [覃颢然, 华渊, 王庄. 大幅晃动液体冲击贮箱顶盖SPH-FEM数值模拟研究. 水动力学研究与进展, 2019, 34: 384–394]
- 10 Atif M M, Chi S W, Grossi E, et al. Evaluation of breaking wave effects in liquid sloshing problems: ANCF/SPH comparative study. *Nonlinear Dyn*, 2019, 97: 45–62
- 11 Dodge F T. The New “Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers”. Technical Report. San Antonio, TX: Southwest Research Institute, 2000
- 12 Li Q. Dynamic Analysis of Liquid-Filled Flexible Systems and Its Application Studies on Aerospace Engineering (in Chinese). Dissertation for

- Doctoral Degree. Beijing: Tsinghua University, 2010 [李青. 充液挠性系统动力学分析及在航天工程中的应用研究. 博士学位论文. 北京: 清华大学, 2010]
- 13 Yu D, Chu J. Comparative research on two equivalent mechanical models of liquid sloshing in tanks. *Int J Eng Syst Modell Simul*, 2018, 10: 159–168
 - 14 Sun Y, Zhou D, Wang J. An equivalent mechanical model for fluid sloshing in a rigid cylindrical tank equipped with a rigid annular baffle. *Appl Math Model*, 2019, 72: 569–587
 - 15 Li Y C, Gou H L. Modeling problem of equivalent mechanical models of a sloshing fluid. *Shock Vib*, 2018, 2018: 1–13
 - 16 Farid M, Gendelman O V. Response regimes in equivalent mechanical model of moderately nonlinear liquid sloshing. *Nonlinear Dyn*, 2018, 92: 1517–1538
 - 17 Deng M L, Yue B Z, Huang H. Study on the equivalent mechanical model for large amplitude slosh (in Chinese). *J Astronaut*, 2016, 37: 631–638 [邓明乐, 岳宝增, 黄华. 液体大幅晃动类等效力学模型研究. 宇航学报, 2016, 37: 631–638]
 - 18 Miao N, Li J F, Wang T S. Equivalent mechanical model of large-amplitude liquid sloshing under time-dependent lateral excitations in low-gravity conditions. *J Sound Vib*, 2017, 386: 421–432
 - 19 Miao N, Li J F, Wang T S. Large-amplitude sloshing analysis and equivalent mechanical modeling in spherical tanks of spacecraft. *J Spacecr Rockets*, 2016, 53: 500–506
 - 20 Miao N. Research on the Equivalent Modeling of Liquid Sloshing Under Complex Excitation in Microgravity (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Beijing: Tsinghua University, 2016 [苗楠. 微重环境复杂激励下液体晃动等效建模研究. 博士学位论文. 北京: 清华大学, 2016]
 - 21 Liu F, Yue B Z, Tang Y, et al. 3DOF-rigid-pendulum analogy for nonlinear liquid slosh in spherical propellant tanks. *J Sound Vib*, 2019, 460: 114907
 - 22 Liu F, Yue B Z, Zhao L Y. Attitude dynamics and control of spacecraft with a partially filled liquid tank and flexible panels. *Acta Astronaut*, 2018, 143: 327–336
 - 23 Marsell B, Griffin D, Schallhorn P, et al. Integrated CFD and controls analysis interface for high accuracy liquid propellant slosh prediction. In: 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. Nashville, 2012

Composite equivalent mechanical models for large-amplitude liquid sloshing in axisymmetrical tanks

MIAO Nan^{*}, LIU ZhanHe, WANG XiaoLu, WANG Jing & LI GuoJu

School of Aeronautical Engineering, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450046, China

Equivalent mechanical models are widely used to describe the dynamics of liquid sloshing in aerospace engineering, but the traditional equivalent mechanical models based on linear theory have poor applicability and accuracy in large-amplitude sloshing. The composite equivalent modeling method suitable for large-amplitude sloshing in normal and low-gravity is proposed in this paper. By considering the change of liquid equilibrium position in sloshing, the large-amplitude motion of the liquid relative to the tank is decomposed into bulk motion following the equivalent gravity and additional small-amplitude sloshing, thus greatly expands the application scope of the linear equivalent mechanical model. Taking the axisymmetrical tanks as examples, the liquid dynamic equilibrium position following the equivalent gravity under large-amplitude sloshing is determined, and the composite equivalent mechanical model in the form of a spherical pendulum is established. For spherical tanks, all liquid is assumed to be involved in bulk motion and the model parameters are found constant during sloshing. For non-spherical tanks such as cylindrical and Cassini tanks, liquid near the tank wall is assumed motionless relative to the tank, and the time-dependent model parameters are approximated by linear interpolation based on equivalent gravity and inclination of the liquid surface. Based on the spherical pendulum model, the dynamic equation of the equivalent system is derived, thus the slosh forces, moments and positions of the liquid center of mass under large translational and rotational excitations are calculated in 3D axisymmetrical tanks. To verify the validity of the modeling method and the accuracy of the composite model, the results of the composite equivalent mechanical model, the traditional equivalent mechanical model as well as the computational fluid dynamics (CFD) software are compared and analyzed. As shown by the results, the composite equivalent mechanical model proposed can accurately predict the dynamic responses of large-amplitude liquid sloshing in axisymmetrical tanks.

large-amplitude liquid sloshing, composite equivalent modelling, dynamic equilibrium position, axisymmetrical tank

PACS: 45.50.Jf, 45.05.+x, 47.11.-j, 47.35.-i, 45.20.da

doi: [10.1360/SSPMA-2019-0394](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0394)