两类带渐近扰动的随机过程的若干性质

献给严士健教授 90 华诞

杨慧¹, 周珂², 侯婉婷³, 洪文明^{4*}

1. 中央民族大学理学院, 北京 100081;

2. 对外经济贸易大学统计学院, 北京 100029;

3. 东北大学理学院, 沈阳 110819;

4. 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875

E-mail: yanghui@muc.edu.cn, zhouke@uibe.edu.cn, houwanting@mail.neu.edu.cn, wmhong@bnu.edu.cn

收稿日期: 2018-9-12; 接受日期: 2018-12-24; 网络出版日期: 2019-12-30; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11701083 和 11531001) 和中央民族大学中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2019QNPY70) 资助项目

摘要 本文考虑两类带渐近扰动的随机模型. 一类是带渐近扰动的非紧邻随机游动, 考虑其常返暂留性, 并给出该模型正常返性的判别. 另一类是带渐近扰动的随机环境中分枝过程, 通过分析其相关随机游动的极限行为, 给出分枝过程灭绝和不灭绝的判别条件.

关键词 随机游动 分枝过程 渐近扰动 常返暂留性

MSC (2010) 主题分类 60G50, 60J80

1 引言

随机游动和分枝过程是概率论的两个重要分支, 具有丰富的生物学和物理学背景, 应用广泛, 涉及工程、计算机科学、生物数学和排队论等领域 (参见文献 [1–4]). 随机游动和分枝过程之间有着紧密的联系. Dwass^[5] 于 1975 年揭示了紧邻随机游动的内蕴分枝结构; 之后 Hong 和 Wang^[6,7] 及 Hong 和 Zhang^[8] 分别给出了非紧邻随机游动的内蕴分枝结构. 这为利用分枝过程研究随机游动的性质提供了有力的方法 (参见综述性文献 [9]). 对于带渐近扰动随机过程的研究可追溯至 20 世纪 50 年代, 这里所谓的渐近扰动指的是转移概率具有某种渐近趋势. 在这一假设下, 过程的很多性质都与转移概率齐次的情形大不相同 (参见综述性文献 [10]). 本文研究两类带渐近扰动的随机过程: 一类是带渐近扰动的随机游动; 另一类是带渐近扰动的随机环境中分枝过程.

在简单对称随机游动的转移概率上加一个渐近趋于零的扰动, 使得游动的转移概率渐近趋于对称, 我们称此模型为近临界随机游动 (near critical random walk, NCRW). 此类模型最早由 Harris^[11] 于

英文引用格式: Yang H, Zhou K, Hou W T, et al. Some properties of two classes of stochastic processes with asymptotic perturbation (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 179–196, doi: 10.1360/N012018-00221

20 世纪 50 年代提出. Harris^[11] 证明了所加扰动的大小会使过程的常返暂留性发生相变. 而在临界的 Galton-Watson 过程的后代均值上加一个渐近趋于零的扰动, 使得分枝过程渐近趋于临界, 文献 [12] 研究了此类模型, 并证明了扰动的大小同样使得分枝过程的极限行为发生相变. 可见, 扰动给随机过程带来了许多新的现象. 下面系统介绍两类模型的研究背景和现状.

Lamperti^[13-15] 在 20 世纪 60 年代系统地研究了半直线上的一类转移概率带有某种渐近扰动的 Markov 链, 利用跳幅一阶矩和二阶矩的极限行为给出 Markov 链常返暂留性的判别. 后来人们将与此类转移概率带有某种渐近扰动的 Markov 链有关的问题称为 Lamperti 问题. 值得一提的是, Lamperti^[15] 证明了对不同程度的扰动, 使得首返时的 α 阶矩不存在的那个最大的 α 取决于扰动的大小. 因此, 扰动的阶可在一定程度上刻画游动常返的程度. 近年来, 有大量的文献对该模型进行了研究. Brezis 等^[16]、Székely^[17]、Gallardo^[18] 和 Voit^[19] 证明了该过程的重对数律; Voit^[20] 得到了大数定律; Csáki 等^[21,22] 最近证明了强不变原理, 并研究了局部时的相关性质; Alexander^[23] 研究了其首返时的渐近性. Menshikov 及其合作者通过构造 Lyapunov 函数的方法系统地研究了更一般框架下的 Lamperti 问题^[24-27]. 从已有结果可以看出, 给转移概率加上一个渐近趋于零的扰动之后, 会给游动带来很多新的现象.

本文关注有关 $(1, R)$ - 随机游动 (即游动往左的跳幅为 1, 往右的最大跳幅为 R) 的 Lamperti 问题. 主要研究当游动的转移概率的极限从正常返区域趋于所谓的零常返边界时, 游动常返暂留性的变化. 运用随机游动的内蕴分枝结构, 我们可以计算从 0 出发首次返回 0 时, 各状态访问次数的期望, 进而给出正常返的判别.

时间非齐次的分枝过程, 即变环境中的分枝过程 (branching process in varying environment, BPVE) 最早由 Jagers^[28] 于 1974 年明确提出. 在研究方法上, 因 BPVE 后代分枝机制随时间变化而带来了许多困难. BPVE 不仅展现了许多类似于 Galton-Watson 过程的极限性质, 同时分枝机制的非时齐性也给 BPVE 带来了许多新的现象. 首先是分枝过程的极限行为, 对于经典的 Galton-Watson 过程, 只有两种极限状态 (灭绝或爆炸), 但对于 BPVE, 情形要复杂得多. 最近, Kersting^[29] 证明了在某些矩的条件下, BPVE 将会停留在某个正的状态上. 在灭绝时的渐近估计方面, BPVE 同样展现出许多新的现象. Fujimagari^[12] 就一类后代均值有极限的 BPVE, 证明了其灭绝时的尾概率严重依赖于扰动的大小. 若分枝过程后代均值趋于 1 的速度足够慢时, 灭绝时的尾概率可以与 $1/\log n$ 同阶 (n 表示时间), 这完全不同于 G-W (Galton-Watson) 过程灭绝时的尾概率 (与 $1/n$ 同阶). 上述情形说明扰动使得 BPVE 灭绝的速度变慢. 以上结果的证明主要用到 Agresti^[30] 的结论: 任意具有有限二阶矩的后代分枝机制的母函数都可以用分式线性的后代分枝机制的母函数上下控制. 对于后代分枝机制为分式线性的 BPVE, 我们可以精确地给出其每一代的母函数, 由此给出灭绝时尾概率的精确表达 (参见文献 [31]), 最终给出一般 BPVE 灭绝时尾概率的上下界. 此方法在后续的研究中起到关键作用. 最近, 有关 BPVE 的 Yaglom 定理和 Kesten-Stigum 定理的结果可参见文献 [29]. 同时, Cohn^[32] 于 1996 年同样考虑过上临界变环境中多物种分枝过程的极限定理.

Smith 和 Wilkinson^[33] 于 1968 年提出了随机环境中的分枝过程 (branching process in random environment, BPRE), 并研究了该类模型的极限行为. 此后, BPRE 受到了广泛而深入的研究. 本文将随机环境中的分枝过程与带渐近扰动的非时齐分枝过程结合起来, 建立起带渐近扰动的随机环境中的分枝过程. 此类模型在这之前还未曾被研究过. 我们的结果显示, 只有在临界情形下加足够大的扰动, 才能使得分枝过程的极限行为发生改变. 而在上临界和下临界情形, 扰动项无法使分枝过程有所改变. 这说明随机环境在某种意义下更稳定. 我们给出使得带渐近扰动的 BPRE 的极限行为发生相变的判定, 其结果显示扰动临界值的阶为 $n^{-1/2}$ (参见定理 2.4), 这完全不同于非随机环境情形 (即 BPVE),

其扰动临界值的阶为 n^{-1} (参见文献 [12, 定理 4.1]). 由此看出, 环境加扰动使得分枝过程同样展现出许多与以往所研究模型很不一样的行为.

2 模型及主要结果

2.1 带渐近扰动的非紧邻随机游动

考虑半直线上的 $(1, R)$ - 随机游动, 即取值于 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ 上的 Markov 链 $\{X_n\}_{n \geq 0}$, 其中 $X_0 = 0$, 转移概率为, 对于 $n \geq 0, i \geq 0, q(0) = 0$, 有

$$P_{ij} := P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} r(i), & j = i, \\ q(i), & j = i - 1, \\ p_{j-i}(i), & i < j \leq i + R, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $r(i) + q(i) + p_1(i) + p_2(i) + \dots + p_R(i) = 1$. 对于 $i \geq 1$, 假定 $0 < q(i) < 1, r(i), p_1(i), p_2(i), \dots, p_R(i) \geq 0$. 显然, 该 Markov 链是不可约的. 记 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ 为 R 维单位向量, 并记

$$\begin{aligned} \alpha_k &:= p_k(0) + p_{k+1}(0) + \dots + p_R(0), \quad 1 \leq k \leq R, \\ \boldsymbol{\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_R), \\ \theta_k(i) &= \frac{p_k(i) + p_{k+1}(i) + \dots + p_{R-1}(i) + p_R(i)}{q(i)}, \\ N_i &= \begin{pmatrix} \theta_1(i) & \theta_2(i) & \dots & \theta_{R-1}(i) & \theta_R(i) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{R \times R}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

下面给出 $(1, R)$ - 随机游动 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 的平稳测度.

定理 2.1 记

$$\begin{aligned} \mu(0) &= 1, \quad \mu(1) = \frac{1}{q(1)} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{e}_1^T, \\ \mu(i) &= \frac{1}{q(i)} \boldsymbol{\alpha} N_1 N_2 \dots N_{i-1} \mathbf{e}_1^T, \quad i \geq 2. \end{aligned}$$

(1) $\{\mu(i)\}_{i \geq 0}$ 为随机游动 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 的一个平稳测度.

(2) 若 $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(i) < \infty$, 则随机游动 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 正常返. 进一步, 平稳分布可表示为

$$\pi(i) = \frac{\mu(i)}{\sum_{i=0}^{\infty} \mu(i)}, \quad i \geq 0.$$

注 2.1 定理 2.1 包含了状态非齐次紧邻随机游动的经典结果, 具体可参见文献 [34, 第 297 页].

下面来考察当游动的转移概率带有某种渐近扰动时, 游动常返暂留性的变化, 即所谓的 Lamperti 问题. 本文只考虑 $R = 2$ 的情形, 此时我们将在 i 处的转移概率简记为

$$P(i) = (q(i), r(i), p_1(i), p_2(i)), \quad i \geq 0$$

($q(0) = 0, 0 < q(i) < 1, i \geq 1$). 值得一提的是, 若对于 $i \geq 1, P(i) \equiv P = (q, r, p_1, p_2)$, 即 $(1, 2)$ - 随机游动 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 的转移概率是状态齐次的, 记

$$D = \{(q, r, p_1, p_2) : q + r + p_1 + p_2 = 1; 0 < q < 1; p_1 + 2p_2 < q\},$$

$$L = \{(q, r, p_1, p_2) : q + r + p_1 + p_2 = 1; 0 < q < 1; p_1 + 2p_2 = q\}.$$

容易知道,

$$\{X_n\}_{n \geq 0} \text{ 正常返} \Leftrightarrow P = (q, r, p_1, p_2) \in D,$$

$$\{X_n\}_{n \geq 0} \text{ 零常返} \Leftrightarrow P = (q, r, p_1, p_2) \in L.$$

对于非状态齐次的 $(1, 2)$ - 随机游动 $\{X_n\}_{n \geq 0}$, 我们感兴趣的现象是, 即使对于任意的 $i \geq 1, P(i)$ 都属于正常返区域 D , $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 依然可以是零常返的. 为此, 考虑当 $i \rightarrow \infty$ 时, $P(i)$ 从 D 的内部趋于 $P \in L$.

令 $P = (q, r, p_1, p_2)$, 对于 $i \geq 1, P(i) = (q(i), r(i), p_1(i), p_2(i))$ 以下列方式给出:

$$\begin{aligned} p_1(i) &= p_1 - \varepsilon_i, \quad p_2(i) = p_2 - \varepsilon_i, \quad q(i) = q + \varepsilon_i, \\ r(i) &= 1 - p_1(i) - p_2(i) - q(i), \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_i > 0$ 充分小, 且当 $i \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon_i \downarrow 0$. 显然, 当 $i \rightarrow \infty$ 时, $P(i) \rightarrow P$.

定理 2.2 假设对于任意的 $i \geq 1, \varepsilon_i > 0$ 充分小, 使得 $P(i) \in D$, 且当 $i \rightarrow \infty$ 时, $P(i) \rightarrow P \in L$, 那么,

- (1) 如果 $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i < \infty$, 则 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 零常返.
- (2) 假设对于某个 $1 < p \leq 2, \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i^p < \infty$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n = \infty$. 令 $\kappa = \frac{4}{p}$, 则
 - (i) 当 $\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{k=0}^i e^{-\kappa \varepsilon_k} < \infty$ 时, $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 正常返, 且有

$$\log \pi(i) \sim -\kappa \sum_{k=0}^i \varepsilon_k, \quad i \rightarrow \infty.$$

- (ii) 当 $\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{k=0}^i e^{-\kappa \varepsilon_k} = \infty$ 时, $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 零常返.

注 2.2 定理 2.2 中对渐近趋于 0 的扰动所加条件的方式不同于一般 Lamperti 问题中的方式 (其通常是通过跳幅的一阶矩和二阶矩来控制扰动的大小). 我们的结果与文献 [25, 26] 中常返、正常返性和平稳分布阶的结果互不包含.

下面来看一个具体的例子. 特别地, 当 $R = 1$ 时, 即对于近临界的紧邻随机游动, 有如下推论 (参见文献 [34]).

推论 2.1 假设 $P \in L$, 对于任意的 $i \geq 1, \varepsilon_i$ 充分小, 使得 $P(i) \in D$, 且存在一个正常数 C , 使得当 $i \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon_i \sim C i^{-\alpha}$, 则

- (1) 当 $\alpha > 1$ 时, $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 零常返.

(2) 当 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ 时, $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 正常返, 并且

$$\log \pi(i) \sim -\frac{C\kappa}{1-\alpha} i^{1-\alpha}, \quad i \rightarrow \infty.$$

(3) 当 $\alpha = 1$ 时, 如果 $C\kappa < 1$, $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 零常返.

(4) 当 $\alpha = 1$ 时, 如果 $C\kappa > 1$, $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 正常返, 且

$$\log \pi(i) \sim -C\kappa \log i, \quad i \rightarrow \infty,$$

其中 $\kappa = \frac{4}{q}$.

2.2 带渐近扰动的随机环境中的分枝过程

首先, 引入函数 χ 来决定扰动项. 令 χ 为定义在 $[0, \infty)$ 上的非负函数, 且满足

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \chi(x) = 0. \quad (2.2)$$

之后我们将会看到, 性质 (2.2) 决定了扰动渐近趋于 0.

对于每一个 $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, 定义一系列随机变量

$$\Pi_n = \{\Pi_n^{(0)}, \Pi_n^{(1)}, \dots\},$$

满足以下条件:

$$\begin{aligned} \Pi_n^{(i)} &\geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_n^{(i)} &= 1, \end{aligned}$$

则随机变量序列 $\Pi = \{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 构成随机环境. 我们用 P 和 E 表示随机环境 Π 所服从的分布和期望. 给定随机环境 Π 的一个实现 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$, 定义取值于 $\mathbb{N}$ 上的 Markov 过程 $Z := \{Z_0, Z_1, \dots\}$, 满足 $Z_0 = 1$, 且对于任意的 $n \geq 1$, $z \in \mathbb{N}$, 有

$$\mathcal{L}(Z_n \mid Z_{n-1} = z, \Pi = \pi) = \mathcal{L}(\zeta_1 + \dots + \zeta_z), \quad (2.3)$$

其中 $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ 为独立同分布于 π_{n-1} 的随机变量序列. 我们称 Z 为随机环境中的分枝过程. Z_n 表示第 n 代的人口数, Π_{n-1} 表示第 $n-1$ 代的一个个体产生后代的分布.

随机环境中的分枝过程 Z 的极限行为与其相关随机游动 $S := \{S_0, S_1, \dots\}$ 密切相关. 游动的初始状态为 $S_0 = 0$, 增量 $X_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 1$) 有如下定义:

$$X_n := \log \sum_{i=0}^{\infty} i \Pi_{n-1}^{(i)}.$$

根据 (2.3) 可知, 在给定环境 Π 的条件下, Z_n 的条件期望

$$m_n := E(Z_n \mid \Pi)$$

可以用相关随机游动 S 表达为

$$m_n = e^{S_n}.$$

根据随机游动的漂移情形, 我们可以给出分枝过程的极限行为. 首先, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ a.s., 此时, $m_n \rightarrow \infty$ a.s.; 其次, 若 $\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ a.s., 此时, 对于几乎处处环境, 分枝过程依概率 1 灭绝. 此结论立刻可由下式得到: 对于任意的 $l \leq n$, 有

$$P(Z_n > 0 \mid \Pi) \leq P(Z_l > 0 \mid \Pi) \leq m_l,$$

由此可得

$$P(Z_n > 0 \mid \Pi) \leq \min_{l \leq n} m_l = \exp \left(\min_{l \leq n} S_l \right). \quad (2.4)$$

因此, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$, 则 $P(Z_n > 0 \mid \Pi) \rightarrow 0$ a.s., 由此可得, $P(Z_n \rightarrow 0) = 1$.

在以往有关 BPRE 的研究中, 我们通常假定随机环境 $\Pi = \{\Pi_0, \Pi_1, \dots\}$ 是独立同分布或平稳遍历的. 本文在独立同分布随机环境上加一个渐近趋于 0 的扰动. 由上述分析, 我们可以看出分枝过程的极限行为依赖于其相关随机游动的性质, 因此, 我们只需在相关随机游动上加扰动, 假定

$$X_n = \xi_n + b\chi(n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

其中 ξ_n ($n = 1, 2, \dots$) 为独立同分布于 ξ 的随机变量序列, $b \in [-1, 1] \setminus 0$ 为常数. 以 $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$ ($n \geq 1$) 为相关随机游动的 BPRE 称为带渐近扰动的 BPRE.

记分枝过程 Z 在给定随机环境 π 下的灭绝概率为

$$q(\pi) = P(Z_n \rightarrow 0 \mid \Pi = \pi).$$

此外, 某些情形下, 我们还需要随机环境 Π 满足下面的条件 2.1. 令

$$\sigma_n^2 = D(Z_{n+1} \mid Z_n = 1; \Pi = \pi), \quad \mu_n = E(Z_{n+1} \mid Z_n = 1; \Pi = \pi).$$

条件 2.1 对于几乎处处环境 π , 存在常数 B , 使得 $B\sigma_n^2 \leq \mu_n < \infty$.

定理 2.3 (1) 若随机环境 Π 满足条件 2.1 且 $E\xi > 0$, 则 $P(q(\pi) < 1) = 1$;

(2) 若 $E\xi < 0$, 则 $P(q(\pi) = 1) = 1$.

定理 2.4 假设随机变量 ξ 有界, 如果 $E\xi = 0$, 则有

(1) 若存在常数 $c > c_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $-b\chi(n) \geq cn^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\log \log n}$ ($n \geq n_0$), 则 $P(q(\pi) = 1) = 1$;

(2) 若存在常数 $c \leq c_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $|b\chi(n)| \leq cn^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\log \log n}$ ($n \geq n_0$), 则 $P(q(\pi) = 1) = 1$;

(3) 若随机环境 Π 满足条件 2.1 且存在常数 $c > c_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $-b\chi(n) \leq -cn^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\log \log n}$ ($n \geq n_0$), 则 $P(q(\pi) < 1) = 1$,

其中 $c_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $\sigma^2 = D\xi$.

注 2.3 称随机变量 ξ 有界, 指的是存在某个常数 $C \in (0, \infty)$, 使得 $P(|\xi| > C) = 0$.

3 定理的证明

3.1 定理 2.1 和 2.2 的证明

定理 2.1 的证明 令 $T = \inf\{n > 0 : X_n = 0\}$, $Z(i) = \sum_{n=0}^{T-1} 1_{\{X_n=i\}}$ ($i \geq 0$) 表示 T 之前状态 i 的访问次数, E^i 表示从 i 位置出发时的条件期望.

假定 $X_0 = 0$, 为了计算 $E^0 Z(i)$, 需要使用随机游动中的内蕴分枝结构, 参见文献 [6].
定义

$$\begin{aligned} U_k^1 &= \#\{0 \leq j < T : X_j \leq k, X_{j+1} = k+1\}, \quad k \geq 0, \\ U_k^2 &= \#\{0 \leq j < T : X_j \leq k, X_{j+1} = k+2\}, \quad k \geq 0, \\ U_k^3 &= \#\{0 \leq j < T : X_j = k, X_{j+1} = k\}, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

并令

$$\mathbf{U}_k = (U_k^1, U_k^2, U_k^3), \quad k \geq 0.$$

引理 3.1 如果随机游动 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 是常返的, 则有

(1) $\{\mathbf{U}_n\}_{n=0}^\infty$ 是一个三物种的分枝过程, 其中

$$\begin{aligned} P(\mathbf{U}_0 = (1, 0, 0)) &= p_1(0), \\ P(\mathbf{U}_0 = (0, 1, 0)) &= p_2(0), \\ P(\mathbf{U}_0 = (0, 0, 1)) &= r(0). \end{aligned} \quad (3.1)$$

对于 $k \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} P(\mathbf{U}_{k+1} = (a, b, c) \mid U_k = \mathbf{e}_1) &= \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!} r(k)^a p_1(k)^b p_2(k)^c q(k), \\ P(\mathbf{U}_{k+1} = (a+1, b, c) \mid U_k = \mathbf{e}_2) &= \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!} r(k)^a p_1(k)^b p_2(k)^c q(k), \\ P(\mathbf{U}_{k+1} = (0, 0, 0) \mid U_k = \mathbf{e}_3) &= 1. \end{aligned}$$

(2) 记 $\tilde{N}_k$ 为分枝过程 $\{\mathbf{U}_n\}_{n=0}^\infty$ 的后代均值矩阵, 则 $\tilde{N}_k$ 是一个 3×3 的矩阵, 其第 l 行为 $E(\mathbf{U}_{k+1} \mid \mathbf{U}_k = \mathbf{e}_l)$, $k \geq 0, l = 1, 2, 3$. 我们有

$$\tilde{N}_k = \begin{pmatrix} \frac{p_1(k)}{q(k)} & \frac{p_2(k)}{q(k)} & \frac{r(k)}{q(k)} \\ 1 + \frac{p_1(k)}{q(k)} & \frac{p_2(k)}{q(k)} & \frac{r(k)}{q(k)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \geq 1.$$

运用 $(1, R)$ - 随机游动的内蕴分枝结构, 我们可以计算游动从状态 0 出发, 首次返回 0 之前, 各个状态占位时的期望, 即 $\mu(i) = E^0 Z(i)$.

引理 3.2 我们有 $E^0 Z(0) = 1$,

$$\begin{aligned} E^0 Z(1) &= \frac{1}{q(1)} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{e}_1^T = \frac{p_1(0) + p_2(0)}{q(1)}, \\ E^0 Z(i) &= \frac{1}{q(i)} \boldsymbol{\alpha} N_1 N_2 \cdots N_{i-1} \mathbf{e}_1^T, \quad i > 1, \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 N_i 由 (2.1) 给出.

证明 由随机游动的内蕴分枝结构不难推出, $E^0 Z(0) = 1$, 而对于 $i \geq 1$, 有 $Z(i) = U_{i-1}^1 + |\mathbf{U}_i|$ (其中 $|\mathbf{U}_i| = U_i^1 + U_i^2 + U_i^3$). 由引理 3.1(2) 可知,

$$E^0 Z(1) = p_1(0) + E^0 \mathbf{U}_0 \tilde{N}_1(1, 1, 1)^T$$

$$\begin{aligned}
 &= p_1(0) + E^0 \mathbf{U}_0 \left(\frac{1}{q(1)} - 1, \frac{1}{q(1)}, 0 \right)^T \\
 &= p_1(0) + p_1(0) \left(\frac{1}{q(1)} - 1 \right) + p_2(0) \frac{1}{q(1)} \\
 &= \frac{p_1(0) + p_2(0)}{q(1)}.
 \end{aligned}$$

对于 $i > 1$, 由分枝过程 $\{\mathbf{U}_n\}_{n=0}^\infty$ 的 Markov 性可得

$$E^0(Z(i) \mid \mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-2}, \dots, \mathbf{U}_0) = U_{i-1}^1 + |\mathbf{U}_{i-1} \tilde{N}_i|.$$

因此,

$$\begin{aligned}
 E^0 Z(i) &= E^0 \mathbf{U}_{i-1} \mathbf{e}_1^T + E^0 \mathbf{U}_{i-1} \tilde{N}_i(1, 1, 1)^T \\
 &= E^0 \mathbf{U}_{i-2} \tilde{N}_{i-1} \mathbf{e}_1^T + E^0 \mathbf{U}_{i-2} \tilde{N}_{i-1} \tilde{N}_i(1, 1, 1)^T \\
 &= E^0 \mathbf{U}_0 \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \cdots \tilde{N}_{i-1} \mathbf{e}_1^T + E^0 \mathbf{U}_0 \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \cdots \tilde{N}_{i-1} \tilde{N}_i(1, 1, 1)^T.
 \end{aligned}$$

再由 (3.1) 可知, $\beta := E^0 U_0 = (p_1(0), p_2(0), r(0))$, 则

$$\begin{aligned}
 E^0 Z(i) &= \beta \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \cdots \tilde{N}_{i-1} \mathbf{e}_1^T + \beta \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \cdots \tilde{N}_{i-1} \tilde{N}_i(1, 1, 1)^T \\
 &= \frac{1}{q(i)} \beta \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 \cdots \tilde{N}_{i-1} (1, 1, 0)^T.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

定义

$$\hat{N}_i = \begin{pmatrix} \frac{p_1(i)+p_2(i)}{q(i)} & \frac{p_2(i)}{q(i)} & \frac{r(i)}{q(i)} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

注意到

$$\tilde{N}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \hat{N}_k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

把上式代入到 (3.2), 通过计算可知,

$$\begin{aligned}
 E^0 Z(i) &= \frac{1}{q(i)} \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{N}_1 \hat{N}_2 \cdots \hat{N}_{i-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} (1, 1, 0)^T \\
 &= \frac{1}{q(i)} \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} N_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} (1, 1, 0)^T
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{q(i)}(p_1(0) + p_2(0), p_2(0))N_1 N_2 \cdots N_{i-1}(1, 0)^T.$$

证毕. □

一般 Markov 链 (正) 常返和平稳分布有如下相关结果.

命题 3.1 ^[34] 对于一般的 Markov 链 $\{X_n\}_{n \geq 0}$, $\mu(i) = E^0 Z(i)$ ($i \geq 0$) 定义了 Markov 链的一个平稳测度. 如果 $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(i) < \infty$, 则 Markov 链是正常返的, 平稳分布可以表示为

$$\pi(i) = \frac{\mu(i)}{\sum_{i=0}^{\infty} \mu(i)}.$$

运用上述命题, 我们立即得到定理 2.1.

考虑二阶的线性差分系统

$$y_{k+1} = [\Lambda + R_k]y_k, \quad k \geq 0, \quad (3.3)$$

其中 $y_k \in \mathbb{R}^2$, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$, R_n 是对系统的一个小的扰动. 假定 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$,

$$\|R_n\| = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 |r_{ij}|.$$

经典的差分系统解的渐近性是以系统的基础解矩阵的形式给出的:

$$Y_k = [I + o(1)] \prod_{i=0}^{k-1} \tilde{\Lambda}_i,$$

其中 I 为单位矩阵, $\tilde{\Lambda}_i$ 是一个对角矩阵, 它的主项来自于 Λ . 若考虑一个差分方程组 $y_{k+1} = A_k y_k$, 运用解的渐近表示, 则可给出非齐次矩阵乘积 $A_n A_{n-1} \cdots A_{k_0}$ 的精确估计. 此处, 我们只考虑 (3.3) 中 R_n 的 l^1 -扰动和 l^p -扰动, 其中 $1 < p \leq 2$. 而对于 $p > 2$, 结果非常复杂, 这里将不予考虑.

首先介绍对该问题研究的历史. Levinson^[35] 研究了带扰动的线性微分系统解的渐近性理论, 并给出了一个基本定理. 这个结果对研究扰动微分系统解的渐近问题有着重要作用. Benzaid 和 Lutz^[36] 考察了带扰动的线性差分系统, 给出了上述结果的离散版本. 他所考虑的 Λ 更为一般: Λ 可以依赖于 k , 同时需要 Λ 满足一个二分性的条件, 并对扰动 R_k 的增长进行限制.

命题 3.2 (参见文献 [36, 定理 2.2]) 考虑 n 阶的线性差分系统 $y_{k+1} = [\Lambda + R_k]y_k$, 其中

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\},$$

对于任意的 $1 \leq i \leq n$, 有 $\lambda_i \neq 0$, 如果存在某个正整数 k_0 , 使得 $\sum_{k=k_0}^{\infty} \|R_k\| < \infty$, 则差分系统的基础解矩阵 Y_k 满足, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$Y_k = [I + o(1)]\Lambda^k.$$

Levinson 定理^[35] 的离散版本只给出了 (3.3) 中 Λ 的 l^1 -扰动, Hartman 和 Wintner^[37] 考虑了线性微分系统的 l^p -扰动. 之后, Benzaid 和 Lutz^[36] 及 Harris 和 Lutz^[38] 对于线性差分系统的 l^p -扰动同样得到了相似的结果, 证明的想法主要是对差分系统作一个所谓的 Q -变换.

需要说明的是, 对于 $p > 2$, 解的渐近性是非常复杂的, 我们所说的 l^p -扰动都要求 $1 < p \leq 2$.

命题 3.3 (参见文献 [36, 定理 3.4]) 考虑 n 阶的线性差分系统 $y_{k+1} = [\Lambda + R_k]y_k$, 其中

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\},$$

$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$, 对于某个 $1 < p \leq 2$, 存在某个正整数 k_0 , 使得 $\sum_{k_0}^{\infty} \|R_k\|^p < \infty$, 则差分系统的基础解矩阵满足, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$Y_k = [I + o(1)] \prod_{i=0}^{k-1} [\Lambda + \text{diag} R_i],$$

其中 $\text{diag} R_i$ 是提取矩阵 R_i 的对角线元素, 构成一个对角矩阵.

证明定理 2.2 的关键是要考察当 $P(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P \in L$ 时, 矩阵的乘积 $N_1 N_2 \dots N_n$ 的渐近表示. 为此, 考虑下面的差分方程:

$$y_{n+1} = N_n^T y_n = [N^T + R_n^T] y_n, \quad (3.4)$$

其中 $R_n = N_n - N$,

$$N = \begin{pmatrix} \frac{p_1+p_2}{q} & \frac{p_2}{q} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_n = \begin{pmatrix} \frac{p_1(n)+p_2(n)}{q(n)} & \frac{p_2(n)}{q(n)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易看出矩阵 N 的两个特征根 λ_1 和 λ_2 满足 $1 = \lambda_1 > 0 > \lambda_2 > -1$. 因此, 矩阵 N 可对角化, 即存在非奇异的矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

使得

$$T^{-1} N T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$

令 $y_n = (T^{-1})^T z_n$, 则 (3.4) 可化为

$$z_{n+1} = [\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) + T^T R_n^T (T^{-1})^T] z_n. \quad (3.5)$$

引理 3.3 在定理 2.2 的假定条件下, 存在常数 K_1 和 K_2 , 使得

$$K_1 \varepsilon_n \leq \|T^T R_n^T (T^{-1})^T\| \leq K_2 \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

证明 对于取定的 T , 由文献 [39, 第 295 页, 定理 5.6.7] 知, $\|T^{-1} \cdot T\|_{\diamond} = \|\cdot\|_{\diamond}$. 同样是矩阵的一个范数. 而由范数的等价性知, 存在常数 c_1 和 c_2 , 使得

$$c_1 \|R_n\| \leq \|R_n\|_{\diamond} \leq c_2 \|R_n\|.$$

我们可以看出

$$\|R_n\| = \left| \frac{p_1(n) + p_2(n)}{q(n)} - \frac{p_1 + p_2}{q} \right| + \left| \frac{p_2(n)}{q(n)} - \frac{p_2}{q} \right|.$$

利用 $p_1(n) \sim p_1 - \varepsilon_n$, $p_2(n) \sim p_2 - \varepsilon_n$, $q(n) \sim q + \varepsilon_n$, 我们可以找到常数 C' , 使得 $\|R_n\| \sim C'\varepsilon_n$. 所以存在 K_1 和 K_2 满足

$$K_1\varepsilon_n \leq \|T^T R_n^T (T^{-1})^T\| \leq K_2\varepsilon_n.$$

证毕. $\square$

由 (3.4)、(3.5)、引理 3.3 和上述的分析, 我们可以由命题 3.2 和 3.3 推得下面的引理.

引理 3.4 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, 则差分系统 (3.4) 存在一个基础解矩阵满足, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$Y_k = (T^{-1})^T [I + o(1)] \text{diag}(1, \lambda_2^k). \quad (3.6)$$

证明 由引理 3.3, 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, 我们对差分系统 (3.5) 运用命题 3.2, 可知

$$Z_k = [I + o(1)] \text{diag}(1, \lambda_2^k).$$

将上式代入 $y_n = (T^{-1})^T z_n$, 即可得 (3.6), 这样就完成了证明. $\square$

引理 3.5 若存在 $p \in (1, 2]$, 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^p < \infty$, 则差分系统 (3.4) 存在一个基础解矩阵满足, 当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$Y_k = (T^{-1})^T [I + o(1)] \prod_{i=0}^{k-1} [\text{diag}(T^{-1} N_i T)]. \quad (3.7)$$

证明 证明与引理 3.4 的证明类似,

$$\begin{aligned} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) + \text{diag}(T^T R_n^T (T^{-1})^T) &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) + \text{diag}(T^T N_n^T (T^{-1})^T) - \text{diag}(T^T N^T (T^{-1})^T) \\ &= \text{diag}(T^T N_n^T (T^{-1})^T) = \text{diag}(T^{-1} N_n T). \end{aligned}$$

证毕. $\square$

定理 2.2 的证明 显然, $\tilde{Y}_i := N_{i-1}^T \cdots N_1^T$ 是 (3.4) 的一个基础解矩阵, 而 (3.6) 和 (3.7) 中的 Y_i 同样是 (3.4) 的基础解矩阵. 因此存在一个非奇异的矩阵 $\tilde{C}$ 使得 $\tilde{Y}_i = Y_i \cdot \tilde{C}$.

(1) 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. 由定理 2.1、引理 3.4 和 (3.4) 可得

$$\begin{aligned} \mu(i) &= \frac{1}{q(i)} \alpha N_1 N_2 \cdots N_{i-1} e_1^T = \frac{1}{q(i)} e_1 N_{i-1}^T N_{i-2}^T \cdots N_1^T \alpha^T \\ &= \frac{1}{q(i)} e_1 Y_{i-1} \tilde{C} \alpha^T \\ &= \frac{1}{q(i)} e_1 (T^{-1})^T [I + o(1)] \text{diag}(1, \lambda_2^{i-1}) \tilde{C} \alpha^T. \end{aligned}$$

因为 $|\lambda_2| < 1$, 所以, 当 $i \rightarrow \infty$ 时, $\mu(i)$ 有正的极限. 因此, $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(i) = \infty$, X_n 是零常返的 (X_n 显然是常返的, 因为所有的转移概率 P_i 都在正常返区域 D 中).

(2) 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n = \infty$, 且存在 $p \in (1, 2]$, 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^p < \infty$. 我们可以计算 $\text{diag}(T^{-1} N_i T)$ 得

$$\text{diag}(T^{-1} N_i T) = \frac{1}{1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \frac{p_1(n)+2p_2(n)}{q(n)} - \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2(1 - \frac{p_1(n)+2p_2(n)}{q(n)}) - \frac{p_2(n)}{q(n)} \end{pmatrix}$$

$$\sim \frac{1}{1-\lambda_2} \begin{pmatrix} 1-\kappa\varepsilon_n - \lambda_2 & 0 \\ 0 & -\lambda_2\kappa\varepsilon_n - \frac{p_2(n)}{q(n)} \end{pmatrix}.$$

由引理 3.5, 运用 (1) 中同样的办法可得, 存在常数 c , 使得

$$\mu(i) \sim \frac{c}{(1-\lambda_2)q(i)} \prod_{k=0}^{i-1} (1-\kappa\varepsilon_k).$$

由于当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, $\log(1-\alpha) \sim -\alpha$, 所以有

$$\log \prod_{k=0}^{i-1} (1-\kappa\varepsilon_k) \sim -\sum_{k=0}^{i-1} \kappa\varepsilon_k, \quad k \rightarrow \infty.$$

由此可得

$$\mu(i) \sim \frac{c}{(1-\lambda_2)q(i)} e^{-\sum_{k=0}^{i-1} \kappa\varepsilon_k}. \quad (3.8)$$

注意到 $\frac{c}{(1-\lambda_2)q(i)}$ 是一个有界的序列. 如果 $\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{k=0}^i e^{-\kappa\varepsilon_k} < \infty$, 由 (3.8) 可知, $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(i) < \infty$, 游动是正常返的. 如果 $\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{k=0}^i e^{-\kappa\varepsilon_k} = \infty$, 由 (3.8) 可知, $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(i) = \infty$, 游动是零常返的. 当游动正常返时,

$$\log \pi(i) = \log \frac{\mu(i)}{\sum_{i=0}^{\infty} \mu(i)} \sim -\kappa \sum_{k=0}^i \varepsilon_k.$$

证毕. □

推论 2.1 的证明 前面已经定义 $\kappa = \frac{4}{q}$. 假定

$$p_1(0) = p_1 - Cn^{-\alpha}, \quad p_2(0) = p_2 - Cn^{-\alpha},$$

而对于 $n > 0$, 有

$$\begin{aligned} p_1(n) &= p_1 - Cn^{-\alpha}, \quad p_2(n) = p_2 - Cn^{-\alpha}, \quad q(n) = q + Cn^{-\alpha}, \\ r(n) &= 1 - p_1(n) - p_2(n) - q(n), \end{aligned}$$

其中 p_1 、 p_2 和 q 满足 $p_1 + 2p_2 = q$.

(1) 若 $\alpha > 1$, 则有 $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. 由定理 2.2(1) 可得 X_n 是零常返的.

(2) 若 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, 则存在 $1 < p \leq 2$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^p < \infty$, 而且

$$\prod_{k=0}^i e^{-\kappa\varepsilon_k} \sim e^{-\frac{C\kappa}{1-\alpha} i^{1-\alpha}}.$$

所以,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{k=0}^i e^{-\kappa\varepsilon_k} < \infty.$$

由定理 2.2(2) 可得, 过程是正常返的, 且有

$$\log \pi(i) \sim -\frac{C\kappa}{1-\alpha} i^{1-\alpha}, \quad i \rightarrow \infty.$$

(3) 若 $\alpha = 1$, 容易看出 $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 < \infty$, 且

$$\prod_{k=0}^i e^{-\kappa \varepsilon_k} \sim e^{-C\kappa \log i} = i^{-C\kappa}.$$

所以, 由定理 2.2(2) 可得, 如果 $C\kappa < 1$, $\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{k=0}^i e^{-\kappa \varepsilon_k} = \infty$, X_n 是零常返的; 如果 $C\kappa > 1$, $\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{k=0}^i e^{-\kappa \varepsilon_k} < \infty$, X_n 是正常返的, 并且有

$$\log \pi(i) \sim -C\kappa \log i, \quad i \rightarrow \infty.$$

证毕. □

3.2 定理 2.3 和 2.4 的证明

定理 2.3 的证明 (1) 证明思路主要来自文献 [31]. 利用分式线性母函数控制一般分枝机制母函数的方法, Fujimagari^[12] 给出了分枝过程第 n 代个体不灭绝概率的下界 (参见文献 [12, 定理 3.2(b)]): 若随机环境 Π 满足条件 2.1, 则

$$P(Z_n > 0 \mid \Pi) \geq \left[1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^n e^{-S_i} \right]^{-1}, \quad (3.9)$$

其中 B 为条件 2.1 中的常数. 回顾 (2.5), 有

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n (\xi_i + b\chi(i)).$$

记 $d = E\xi > 0$, 由强大数定律可得

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} d > 0,$$

即对于几乎所有的 ω , 都存在 $N_0(\omega)$ 满足 $P(N_0(\omega) < \infty) = 1$, 使得当 $n > N_0$ 时,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} \geq \frac{d}{2} > 0.$$

此外, 由 $b\chi(n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 可得, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N_1$ 时,

$$|b\chi(n)| < \frac{d}{4},$$

即 $-\frac{d}{4} < b\chi(n) < \frac{d}{4}$.

取 $M(\omega) = \max\{N_0(\omega), N_1\}$, 则当 $n > M(\omega)$ 时,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n (\xi_i + b\chi(i)) \geq \frac{d}{2}n - \frac{d}{4}(n - M) + K = \frac{d}{4}n + K(\omega),$$

其中 $K(\omega)$ 是与 ω 有关的常数.

因此, 对于几乎所有的环境, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{-S_i} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-S_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{\{-(\frac{d}{4}n + K)\}} < \infty.$$

再由 (3.9) 可知, 对于几乎所有的环境 π , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n > 0 \mid \Pi = \pi) > 0,$$

即对于几乎所有的环境 π , 有

$$q(\pi) = P(Z_n \rightarrow 0 \mid \Pi = \pi) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n > 0 \mid \Pi = \pi) < 1,$$

即分枝过程依正概率不灭绝.

(2) 此时 $d := E\xi < 0$. 与定理 2.3(1) 的证明类似, 利用独立同分布随机变量列的强大数定律可得, 对于几乎所有的 ω , 都存在 $M(\omega) > 0$, 使得当 $n > M(\omega)$ 时,

$$S_n \leq \frac{d}{4}n + K(\omega),$$

其中 $K(\omega)$ 是与 ω 有关的常数. 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$, 根据 (2.4) 可得, 对于几乎所有的环境 π , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n > 0 \mid \Pi = \pi) \rightarrow 0,$$

则

$$q(\pi) = P(Z_n \rightarrow 0 \mid \Pi = \pi) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n > 0 \mid \Pi = \pi) = 1,$$

即分枝过程依概率 1 灭绝. □

为叙述方便, 记 $\log_1(x) := \log(x)$, $\log_k(x) := \log(\log_{k-1}(x))$, $k = 2, 3$. 记 n_2 为使得 $\log_3(n_2) \geq 0$ 的最小的正整数. 令 φ 为取值在 $[0, \infty)$ 上的函数 (此函数将会出现在重对数律中), 其定义如下: 对任意的 $x \in [n_2, \infty)$, $d \in \mathbb{R}$, 有

$$\varphi(x; d) := (2 \log_2 x + (3 + d) \log_3 x)^{\frac{1}{2}}.$$

利用独立同分布随机变量和的重对数律, 使得游动 S 的极限行为发生相变的扰动 χ 的临界值与重对数律表达中的函数 φ 有关.

在定理 2.4 的证明中, 我们需要用到 Feller^[40] 有关重对数律的结果. 下面的引理 3.6 可由文献 [40, 定理 7] 直接得到, 同时可参见文献 [41, 引理 3].

引理 3.6 若独立同分布随机变量序列 X_i 是有界的, 即存在某个常数 $C \in (0, \infty)$, 使得 $P(|X_i| > C) = 0$, 且 $E(X_i) = 0$, $E(X_i^2) = \sigma^2$. 令 $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, 则有

$$P(S_n > \sigma \sqrt{n} \varphi(n; \varepsilon) \text{ i.o.}) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \varepsilon < 0, \\ 0, & \text{若 } \varepsilon > 0. \end{cases}$$

下面的引理是文献 [41, 引理 6] 的一种特殊情形, 这里引用如下.

引理 3.7 (1) 存在常数 $c \leq c_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $|b|\chi(n) \leq \frac{c\sqrt{\log \log n}}{\sqrt{n}}$ ($n \geq n_0$), 则对于除有限个之外的所有的 n , 都有

$$\sum_{i=1}^n |b|\chi(i) \leq \sigma \sqrt{n} \varphi\left(n; -\frac{1}{3}\right);$$

(2) 若存在常数 $c > c_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $|b|\chi(n) \geq \frac{c\sqrt{\log \log n}}{\sqrt{n}}$ ($n \geq n_0$), 则对于除有限个之外的所有的 n , 都有

$$\sum_{i=1}^n |b|\chi(i) \geq \sigma\sqrt{n}\varphi\left(n; \frac{1}{3}\right),$$

其中 $c_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $\sigma^2 = D(\xi_n)$.

定理 2.4 的证明 (1) 若存在常数 $c > c_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$-b\chi(n) \geq \frac{c\sqrt{\log \log n}}{\sqrt{n}} \quad (n \geq n_0),$$

则根据引理 3.7(2) 可得, 对于除有限个之外的所有的 n , 都有

$$\sum_{j=1}^n -b\chi(j) \geq \sigma\sqrt{n}\varphi\left(n, \frac{1}{3}\right),$$

再根据引理 3.6 可得, 对于除有限个之外的所有的 n , 都有

$$\sum_{j=1}^n \xi_j \leq \sigma\sqrt{n}\varphi\left(n, \frac{1}{4}\right).$$

因此, 对于除有限个之外的所有的 n , 都有

$$S_n = \sum_{j=1}^n (\xi_j + b\chi(j)) \leq \sigma\sqrt{n}\varphi\left(n, \frac{1}{4}\right) - \sigma\sqrt{n}\varphi_2\left(n, \frac{1}{3}\right) \leq -C_1\sqrt{n},$$

其中 $C_1 \in (0, \infty)$ 是某个不依赖于环境的常数. 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$. 根据 (2.4) 可得, 对于几乎所有的环境 π , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n > 0 \mid \Pi = \pi) = 0,$$

因此,

$$q(\pi) = P(Z_n \rightarrow 0 \mid \Pi = \pi) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n > 0 \mid \Pi = \pi) = 1,$$

即分枝过程依概率 1 灭绝.

(2) 当存在常数 $c \leq c_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $|b|\chi(n) \leq \frac{c\sqrt{\log \log n}}{\sqrt{n}}$ ($n \geq n_0$), 由引理 3.7(1) 可得, 对于除有限个之外的所有的 n , 有

$$\sum_{i=1}^n |b|\chi(i) \leq \sigma\sqrt{n}\varphi\left(n, -\frac{1}{3}\right).$$

再根据引理 3.6 可得, 对于几乎所有的 ω , 都存在无穷多个 n , 使得

$$\sum_{i=1}^n (-\xi_i) \geq \sigma\sqrt{n}\varphi\left(n, -\frac{1}{4}\right).$$

因此, 若 $b > 0$, 则对于几乎所有的 ω , 都存在无穷多个 n , 使得

$$S_n = \sum_{i=1}^n (\xi_i + b\chi(i)) \leq \sigma\sqrt{n}\varphi\left(n, -\frac{1}{3}\right) - \sigma\sqrt{n}\varphi\left(n, -\frac{1}{4}\right) \leq -C_2\sqrt{n},$$

其中 $C_2 \in (0, \infty)$ 是某一常数. 若 $b < 0$, 则对于几乎所有的 ω , 都存在无穷多个 n , 使得对于某个常数 $C_3 \in (0, \infty)$, 都有

$$S_n = \sum_{i=1}^n (\xi_i + b\chi(i)) \leq -\sigma\sqrt{n}\varphi_2\left(n, -\frac{1}{4}\right) \leq -C_3\sqrt{n}.$$

综上可得 $\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$. 因此, 对于几乎所有的环境, 分枝过程依概率 1 灭绝.

(3) 由 (3.9), 我们只需证

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-S_i} < \infty.$$

根据引理 3.7(2) 可得, 对于除有限个之外的所有的 n , 都有

$$\sum_{j=1}^n b\chi(j) \geq \sigma\sqrt{n}\varphi\left(n, \frac{1}{3}\right),$$

即只存在有限多个 n , 使得

$$\sum_{j=1}^n b\chi(j) \leq \sigma\sqrt{n}\varphi\left(n, \frac{1}{3}\right).$$

再根据引理 3.6 可得, 对于几乎所有的 ω , 只存在有限多个 n , 使得

$$\sum_{i=1}^n (-\xi_i) \geq \sigma\sqrt{n}\varphi\left(n, \frac{1}{4}\right).$$

因此, 对于几乎所有的 ω , 只存在有限多个 n , 使得对于某个不依赖于环境的常数 $C_4 \in (0, \infty)$, 都有

$$-S_n = \sum_{i=1}^n (-\xi_i - b\chi(i)) \geq \sigma\sqrt{n}\varphi\left(n, \frac{1}{4}\right) - \sigma\sqrt{n}\varphi\left(n, \frac{1}{3}\right) \geq -C_4 n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

所以, 对于几乎所有的 ω , 存在依赖于环境的常数 $C_5 \in (0, \infty)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-S_i} \leq C_5 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-C_4 n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) < \infty.$$

证毕. □

致谢 恭祝严士健先生 90 华诞, 感谢严先生的教导及在工作和生活中的关爱和帮助. 祝愿严先生幸福安康.

参考文献

- 1 Athreya K B, Ney P E. Branching Processes. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1972
- 2 Harris T E. The Theory of Branching Processes. Berlin: Springer, 1963
- 3 Howard C B. Random Walk in Biology. Princeton: Princeton University Press, 1993

- 4 Spitzer F. Principles of Random Walk, 2nd ed. Berlin: Springer, 1976
- 5 Dwass M. Branching processes in simple random walk. Proc Amer Math Soc, 1975, 51: 270–274
- 6 Hong W M, Wang H M. Intrinsic branching structure within $(L - 1)$ random walk in random environment and its applications. Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top, 2013, 16: 1350006
- 7 Wang H M, Hong W M. Intrinsic branching structure within random walk on $\mathbb{Z}$. Theory Probab Appl, 2014, 58: 640–659
- 8 Hong W M, Zhang L. Branching structure for the transient $(1, R)$ -random walk in random environment and its applications. Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top, 2010, 13: 589–618
- 9 Hong W M, Wang H M. Branching structures within random walks and their applications. In: Branching Processes and Their Applications. Lecture Notes in Statistics, vol. 219. Cham: Springer, 2016, 57–73
- 10 Menshikov M V, Popov S Y, Wade A R. Non-Homogeneous Random Walks-Lyapunov Function Methods for Near-Critical Stochastic Systems. New York: Cambridge University Press, 2016
- 11 Harris T E. First passage and recurrence distributions. Trans Amer Math Soc, 1952, 73: 471–486
- 12 Fujimagari T. On the extinction time distribution of a branching process in varying environments. Adv Appl Probab, 1980, 12: 350–366
- 13 Lamperti J. Criteria for the recurrence or transience of stochastic process, I. J Math Anal Appl, 1960, 1: 314–330
- 14 Lamperti J. A new class of probability limit theorems. Bull Amer Math Soc, 1961, 67: 239–331
- 15 Lamperti J. Criteria for stochastic processes, II: Passage-time moments. J Math Anal Appl, 1963, 7: 127–145
- 16 Brezis H, Rosenkrantz W, Singer B. An extension of Khintchine's estimate for large deviations to a class of Markov chains converging to a singular diffusion. Comm Pure Appl Math, 1971, 24: 705–726
- 17 Székely G J. On the asymptotic properties of diffusion processes. Ann Univ Sci Budapest Eötvös Sect Math, 1974, 17: 69–71
- 18 Gallardo L. Comportement asymptotique des marches aleatoires associees aux polynomes de Gegenbauer et applications. Adv Appl Probab, 1984, 16: 293–323
- 19 Voit M. A law of the iterated logarithm for a class of polynomial hypergroups. Monatsh Math, 1990, 109: 311–326
- 20 Voit M. Strong laws of large numbers for random walks associated with a class of one-dimensional convolution structures. Monatsh Math, 1992, 113: 59–74
- 21 Csáki E, Földes A, Révész P. Transient nearest neighbor random walk on the line. J Theoret Probab, 2009, 22: 100–122
- 22 Csáki E, Földes A, Révész P. Transient nearest neighbor random walk and Bessel process. J Theoret Probab, 2009, 22: 992–1009
- 23 Alexander K S. Excursions and local limit theorems for Bessel-like random walks. Electron J Probab, 2011, 16: 1–44
- 24 MacPhee I M, Menshikov M V, Wade A R. Angular asymptotics for multi-dimensional non-homogeneous random walks with asymptotically zero drift. Markov Process Related Fields, 2010, 16: 351–388
- 25 Menshikov M V, Asymont I M, Iasnogorodski R. Markov processes with asymptotically zero drifts. Problemy Peredachi Informatsii, 1995, 31: 60–75
- 26 Menshikov M V, Popov S Y. Exact power estimates for countable Markov chains. Markov Process Related Fields, 1995, 1: 57–78
- 27 Menshikov M V, Wade A R. Rate of escape and central limit theorem for the supercritical Lamperti problem. Stochastic Process Appl, 2010, 120: 2078–2099
- 28 Jagers P. Galton-Watson processes in varying environments. J Appl Probab, 1974, 11: 174–178
- 29 Kersting G. A general approach to branching processes in varying environment. ArXiv:1703.01960, 2017
- 30 Agresti A. Bounds on the extinction time distribution of a branching process. Adv Appl Probab, 1974, 6: 322–335
- 31 Agresti A. On the extinction times of varying and random environment branching processes. J Appl Probab, 1975, 12: 39–46
- 32 Cohn H. On the asymptotic patterns of supercritical branching processes in varying environments. Ann Appl Probab, 1996, 6: 896–902
- 33 Smith W L, Wilkinson W E. On branching processes in random environments. Ann of Math Stud, 1969, 40: 814–827
- 34 Durrett R. Probability: Theory and Examples, 3rd ed. Boston: Duxbury, 2004
- 35 Levinson N. The asymptotic nature of solutions of linear differential equations. Duke Math J, 1948, 15: 111–126
- 36 Benzaid Z, Lutz D A. Asymptotic representation of solutions of perturbed systems of linear difference equations. Stud Appl Math, 1987, 77: 195–221
- 37 Hartman P, Wintner A. Asymptotic integrations of linear differential equations. Amer J Math, 1955, 77: 45–86
- 38 Harris Jr W A, Lutz D A. On the asymptotic integration of linear differential systems. J Math Anal Appl, 1974, 48: 1–16
- 39 Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1985

- 40 Feller W. The general form of the so-called law of the iterated logarithm. Trans Amer Math Soc, 1943, 54: 373–402
- 41 Menshikov M V, Wade A R. Random walk in random environment with asymptotically zero perturbation. J Eur Math Soc (JEMS), 2006, 8: 491–513

Some properties of two classes of stochastic processes with asymptotic perturbation

Hui Yang, Ke Zhou, Wanting Hou & Wenming Hong

Abstract In this paper, we consider two kinds of stochastic models with asymptotic perturbation. One is the non-nearest neighbor random walk with asymptotic perturbation, for which we consider the transience and recurrence of the random walk. We give the criterion for positive recurrent of the random walk. The other is the branching process in random environment with asymptotic perturbation, for which by analyzing the limit behavior of the associated random walk, we give the criterion of extinction and non-extinction of the branching process.

Keywords random walk, branching process, asymptotic perturbation, recurrence and transience

MSC(2010) 60G50, 60J80

doi: 10.1360/N012018-00221