强迫摆型碰撞振子的弹性周期解

吴吟吟¹, 钱定边^{2*}

1. 无锡职业技术学院基础部, 无锡 214121;

2. 苏州大学数学科学学院, 苏州 215006

E-mail: wuyy@wxit.edu.cn, dbqian@suda.edu.cn

收稿日期: 2017-09-10; 接受日期: 2017-11-14; 网络出版日期: 2018-01-26; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671287) 和无锡职业技术学院青年骨干教师基金 (批准号: 3917013927) 资助项目

摘要 本文考虑一类具有强迫力的摆型碰撞振子无穷多次调和的弹性周期解的存在性. 通过坐标变换的方法把碰撞系统转化为定义在全平面上的等价系统, 再运用相平面分析的方法对变换后系统的解的动力行为进行分析, 通过在改进的 Poincaré 映射上应用 Poincaré-Birkhoff 扭转定理得到了无穷多次调和的弹性周期解的存在性.

关键词 摆型碰撞振子 弹性周期解 Poincaré 映射 Poincaré-Birkhoff 扭转定理

MSC (2010) 主题分类 34C15, 34C25, 34B30, 54H25

1 引言

本文考虑具有强迫力的摆型碰撞振子

$$\begin{cases} x'' + f(t, x) = \varepsilon p(t), & \text{当 } x(t) > 0 \text{ 时,} \\ x(t) \geq 0, \\ x'(t_0+) = -x'(t_0-), & \text{当 } x(t_0) = 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (1.1)$$

的无穷多次调和的弹性周期解的存在性问题, 其中 ε 是小参数; $p(t)$ 是连续的 2π 周期函数; $f(t, x)$ 是连续函数, 关于 t 和 x 都是 2π 周期的, 并存在正常数 α 和 β , 满足

$$(h) \quad \alpha \leq \liminf_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(t, x)}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(t, x)}{x} \leq \beta, \quad \text{对 } t \in \mathbb{R} \text{ 成立.}$$

碰撞振子是非线性振动和非光滑 Hamilton 系统的重要模型, 它的行为与 Fermi 加速器问题^[1]、对偶弹球问题^[2,3] 和天体力学问题^[4] 等相关联, 所以, 研究它具有广泛的实际意义. 同时也为检验一些非光滑动力系统的数学方法提供了一个很好的模型. 但由于系统的非光滑性导致研究的数学工具比较

英文引用格式: Wu Y Y, Qian D B. Bouncing periodic solutions for forced Pendulum-type equations with impact (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 579–588, doi: 10.1360/N012017-00199

缺乏, 而且碰撞问题的弹性解的全体并不封闭, 从而也缺乏适当的泛函框架, 使得解决碰撞系统的相关问题变得困难.

为了更好地叙述问题, 我们先给出在 $x = 0$ 处发生完全碰撞的弹性解的定义.

定义 1.1 连续函数 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 称为方程 (1.1) 的碰撞弹性解, 若以下条件成立:

- (1) $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) \geq 0$;
- (2) 集合 $W = \{t: x(t) = 0\}$ 是离散的且非空;
- (3) $x'(t_0+) = -x'(t_0-), \forall t_0 \in W$;
- (4) 给定区间 I , 若 $I \cap W = \emptyset$, 则 $x \in C^2(I, \mathbb{R}^+)$ 是 (1.1) 的通常意义下的解.

周期弹性解是碰撞振子特有的非平凡的平衡态. 关于碰撞振子的周期解理论的研究方法主要有两类, 一类是应用非光滑临界点理论来研究. 早在 20 世纪 80 年代, Chang^[5,6] 就发展了非光滑临界点理论对障碍问题进行研究. 近期的进展可参见文献 [7] 等. 碰撞振子是一类特殊的障碍问题. Jiang^[8] 克服了一些技术上的难点, 通过一些转换, 用非光滑临界点理论, 证明了在超线性条件下, 无穷多弹性周期解的存在性.

另一类是通过适当的作用 - 角变量的选择来克服非光滑性, 把问题转化为适当的相平面上的保面积同胚进行研究. 这样可以应用保面积同胚的一些重要定理, 例如, Poincaré-Birkhoff 扭转定理得到碰撞振子的无穷多个弹性周期解的存在性 (参见文献 [1,9–11]). Bonheure 和 Fabry^[9] 利用 Poincaré 映射和逼近的方法证明了带有常系数的线性碰撞振子的 2π 周期弹性解的存在性. 接着, Qian 和 Torres^[10,11] 用后继映射直接分析碰撞振子的行为, 对更广泛的模型得到了比文献 [9] 更丰富的结果.

对于本文考虑的具有强迫力的摆型碰撞振子, 一个典型的例子就是弹性数学摆

$$\begin{cases} x'' + a(t) \sin x = q(t), & \text{当 } x(t) > 0, \\ x(t) \geq 0, \\ x'(t_0+) = -x'(t_0-), & \text{当 } x(t_0) = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 $a(t)$ 和 $q(t)$ 是 2π 周期函数, $a(t) > 0$. 当 $a(t) = 1$ 和 $q(t) = 0$ 时, 由对称性可知, 其相图就是摆型方程 $x'' + \sin x = 0$ 对应于 $x \geq 0$ 的部分. 如果 $a(t)$ 不是常值函数, 或者具有强迫力 $q(t)$, 则 (1.2) 在相平面上的表现就不那么规则了.

即使是无碰撞的摆方程 $x'' + a(t) \sin x = q(t)$, 其动力行为也不是那么简单. 例如, 当 $a(t)$ 为常数, $a > 0$ 且平均值 $\bar{q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t) dt > a$ 时方程就没有任何周期解. You^[12] 用 Moser 扭转定理证明了方程 (1.2) 所有解都有界的充要条件是 $\bar{q} = 0$. Mawhin 和 Willem^[13] 用变分法证明方程 (1.2) 当 $\bar{q} = 0$ 时至少存在两个周期解. 后来, Franks^[14] 用 Poincaré-Birkhoff 扭转定理也证明了这个结论. 而在一定的非退化条件或者对 $q(t)$ 有一定的限制条件下, 近期也有一些无穷多个次调和解存在性的结果^[15–17].

摆型碰撞振子 (1.2) 的弹性周期解的研究尚未见系统的理论结果. 所以, 一个自然的问题是, 在什么条件下摆型碰撞振子 (1.2) 存在无穷多个次调和的弹性周期解. 由于从 (1.2) 的特例的相图 (如 $q(t) \equiv 0$) 可见, 初速度比较大的解其后继映射是没有定义的, 所以, 我们并不能沿用文献 [1,9–11] 的方法, 必须考虑不同的相平面. 为此, 我们引入文献 [18] 中的坐标变换把碰撞系统转化为定义在全平面上的等价系统, 再运用相平面分析的方法对变换后系统的解的动力行为进行分析, 通过新系统的 Poincaré 映射的性质来研究具有强迫力的摆型碰撞振子的弹性周期解的存在性.

下面是我们的主要结论.

定理 1.1 设 $f(t, x)$ 关于 t 和 x 是 2π 周期的连续函数, 满足条件 (h), $p(t)$ 是连续的 2π 周期函

数, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得当 $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ 时, 有 $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$; 对 $m \geq m_\varepsilon$, $m \in \mathbb{N}$, 碰撞振子 (1.1) 至少有两个 $2m\pi$ 周期的弹性次调和解.

2 坐标变换

由于碰撞振子的解要满足 $x(t) \geq 0$, 所以其对应的相平面只是右半平面. 在这样的相平面上, 经典的研究平面 Hamilton 系统周期解存在性的 Poincaré-Birkhoff 扭转定理无法应用. 因此, 我们引入一个新的极坐标变换, 使得在新坐标下碰撞振子的相平面是全平面. 其几何直观是将负半 y 轴拉到正半 y 轴使它们重合 (对应弹性碰撞). 因此, 碰撞振子的相平面就是全平面了. 在这种坐标下, 方程 (1.1) 的次调和的弹性周期解对应为 Poincaré 映射的周期不动点. 下面介绍所用的极坐标变换.

令 $x' = y$, 碰撞系统 (1.1) 等价于

$$\begin{cases} x' = y, & y' = -f(t, x) + \varepsilon p(t), & \text{当 } x(t) > 0, \\ x(t) \geq 0, \\ x'(t_0+) = -x'(t_0-), & & \text{当 } x(t_0) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

考虑 (2.1) 的辅助系统

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y}, & \text{当 } x(t) > 0, \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x}, & \text{当 } x(t) > 0, \\ x(t) \geq 0, \\ x'(t_0+) = -x'(t_0-), & \text{当 } x(t_0) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 Hamilton 函数 $H = \frac{y^2}{2} + K(\rho^2)[F(t, x) - x\varepsilon p(t)] + [1 - K(\rho^2)]\frac{\alpha}{2}x^2$; $F(t, x) = \int_0^x f(t, s)ds$; $K(\rho^2) = K(x^2 + y^2) \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 为截断函数, 满足

$$K(\rho^2) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \rho \leq \rho_1, \\ 1, & \text{如果 } \rho \geq \rho_2, \end{cases}$$

这里 $\rho_2 > \rho_1 > 0$ 为待定参数. 在 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \rho_2$ 时, (2.2) 与 (2.1) 相同.

定义极坐标变换 $\mathcal{T}: (r, \theta) \mapsto (x, y)$ 如下:

当 $\pi/2 < \theta < 5\pi/2$, $r > 0$ 时, 定义 $\mathcal{T}_1: (r, \theta) \mapsto (x = x_1(r, \theta), y = y_1(r, \theta))$ 为

$$x_1 = \sqrt{2}r \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} - \pi\right), \quad y_1 = \sqrt{2}r \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} - \pi\right), \quad (2.3)$$

则 $\mathcal{T}_1$ 是从 $\{(r, \theta): r > 0, \pi/2 < \theta < 5\pi/2\}$ 到碰撞相平面 $\{(x, y): x > 0\}$ 上的 1-1 的连续映射; 当 $-3\pi/2 < \theta < \pi/2$, $r > 0$ 时, 定义 $\mathcal{T}_2: (r, \theta) \mapsto (x = x_2(r, \theta), y = y_2(r, \theta))$ 为

$$x_2 = \sqrt{2}r \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad y_2 = \sqrt{2}r \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.4)$$

$\mathcal{T}_2$ 也是从 $\{(r, \theta) : r > 0, -3\pi/2 < \theta < \pi/2\}$ 到碰撞相平面 $\{(x, y) : x > 0\}$ 上的 1-1 的连续映射. 再定义覆盖空间 $\{(r, \theta) : 0 < r < +\infty, \theta \in \mathbb{R}\}$ 到碰撞相平面 $\{(x, y) : x > 0\}$ 上的连续映射 $\mathcal{T}$ 满足

$$\mathcal{T} = \begin{cases} \mathcal{T}_1, & \frac{\pi}{2} < \theta \pmod{4\pi} < \frac{5\pi}{2}, \\ \mathcal{T}_2, & -\frac{3\pi}{2} < \theta \pmod{4\pi} < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

即 $\theta \neq 2k\pi + \pi/2, \forall k \in \mathbb{Z}$, 而且当 $\pi/2 < \theta \pmod{4\pi} < 5\pi/2$ 时,

$$x = \sqrt{2}r \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} - \pi\right), \quad y = \sqrt{2}r \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} - \pi\right) \quad (\text{此时称为情形 1});$$

当 $-3\pi/2 < \theta \pmod{4\pi} < \pi/2$ 时,

$$x = \sqrt{2}r \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad y = \sqrt{2}r \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{此时称为情形 2}).$$

$\theta = 2k\pi + \pi/2, \forall k \in \mathbb{Z}$ 时的定义由 $\mathcal{T}$ 的连续性确定, $\mathcal{T}$ 对 θ 也是 2π 周期的.

此时 (2.2) 在 $\mathcal{T}$ 下的方程为

$$\begin{cases} r' = \frac{x \frac{\partial H}{\partial y} - y \frac{\partial H}{\partial x}}{2r}, \\ \theta' = \frac{-x \frac{\partial H}{\partial x} - y \frac{\partial H}{\partial y}}{r^2}. \end{cases} \quad (2.5)$$

设方程 (2.2) 的解在 $t = t_0$ 时发生碰撞, 则存在 $\bar{r} > 0$, 当 $t \rightarrow t_0 -$ 时, 有

$$x(t) \rightarrow 0, \quad y(t) \rightarrow -\sqrt{2}\bar{r} < 0, \quad (2.6)$$

对应于方程 (2.5) 的解, 当 $t \rightarrow t_0 -$ 时, 有

$$r(t) \rightarrow \bar{r}, \quad \theta(t) \rightarrow 4k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{情形 1})$$

或者

$$r(t) \rightarrow \bar{r}, \quad \theta(t) \rightarrow 4k\pi - \frac{3\pi}{2} \quad (\text{情形 2}),$$

其中 k 可以是任意整数.

与 (2.6) 相对应, 当 $t \rightarrow t_0 +$ 时, 方程 (2.2) 的解有

$$x(t) \rightarrow 0, \quad y(t) \rightarrow \sqrt{2}\bar{r} > 0.$$

此时, 对于方程 (2.5) 的解, 当 $t \rightarrow t_0 +$ 时, 有

$$r(t) \rightarrow \bar{r}, \quad \theta(t) \rightarrow 2j\pi + \frac{\pi}{2},$$

其中 j 可取任意整数. 当情形 1 发生时, 取 $j = 2k$, 则有

$$\theta(t_0 -) = \theta(t_0 +) = 4k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

因此可以补充 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 在 t_0 时刻的定义分别为

$$r(t_0) = \bar{r}, \quad \theta(t_0) = 4k_0\pi + \frac{\pi}{2},$$

使得 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 在碰撞时刻 t_0 处是连续函数. 当情形 2 发生时, 取 $j = 2k - 1$, 我们可以通过类似的方法补充 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 在 t_0 时刻的定义使其是连续函数.

通过在每个碰撞时刻补充定义, 方程 (2.5) 的解 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 在其最大存在区间上是连续函数. 容易看出, $\theta'(t_0) = -2 < 0$, 因此振子不会在 $\theta(t) = 2k\pi + \pi/2$ ($k \in \mathbb{Z}$) 处停留, 并且碰撞前后解满足的方程在情形 1 与 2 之间相互交替. 反过来, 如果方程 (2.4) 的解存在时刻 $\tilde{t}$ 满足 $\theta(\tilde{t}) = 2k\pi + \pi/2$, 显然, 方程 (2.1) 对应的解将在 $t = \tilde{t}$ 时发生碰撞.

当 $\theta \in (-3\pi/2, \pi/2)$ 时, 有 $\theta + 2\pi \in (\pi/2, 5\pi/2)$, 由此容易验证, 在方程 (2.2) 中, $x(r, \theta)$ 和 $y(r, \theta)$ 关于 θ 是 2π 周期的.

如果 Hamilton 系统

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

满足解对初值的存在唯一性, 那么除去原点外, 方程 (2.2) 也满足解对初值的存在唯一性. 如果解都是全局存在的, 则容易证明其 Poincaré 映射

$$\mathcal{P}_0 : (x_0, y_0) \mapsto (x(2\pi; x_0, y_0), y(2\pi; x_0, y_0))$$

是有定义的, 而且是保面积同胚. 故由极坐标

$$\mathcal{P} : (r_0, \theta_0) \mapsto (r(2\pi; r_0, \theta_0), \theta(2\pi; r_0, \theta_0))$$

表示的 $(u = r \cos \theta, v = r \sin \theta)$ 相平面的 Poincaré 映射也是有定义的, 在变换 (2.3) 和 (2.4) 的极坐标下, 原来的 (x, y) 相平面有面积元 $r dr d\theta$. 而在变换后的 $(u = r \cos \theta, v = r \sin \theta)$ 相平面也有面积元 $r dr d\theta$, 而且其 Poincaré 映射也是保面积同胚.

3 相平面分析

由于我们是在一个特定的环域内应用 Poincaré-Birkhoff 扭转定理, 因此, 我们的相平面分析可以归结在一个紧区域内, 所以, 不妨假设在定理 1.1 的条件下, 二阶 Hamilton 方程 $x'' + f(t, x) = \varepsilon p(t)$ 和 Hamilton 系统

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

的初值问题的解是存在唯一的, 否则可以像文献 [19] 那样先考虑解析的方程, 然后用一点紧性讨论, 逼近到原方程问题的解.

下面的引理说明我们可以通过极坐标系 (2.5) 来研究碰撞振子 (2.2) 的次调和解.

引理 3.1 如果 $(r(t; r_0, \theta_0), \theta(t; r_0, \theta_0))$ 是方程 (2.5) 的一个 $2m\pi$ 周期的次调和解, 满足

$$\theta(2m\pi; r_0, \theta_0) - \theta_0 = -2\pi, \quad r(t; r_0, \theta_0) > 0, \quad t \in [0, 2m\pi],$$

则方程 (2.2) 对应有一个 $2m\pi$ 周期的弹性次调和解, 其恰好在 $[0, 2m\pi)$ 时段内有一次碰撞.

证明 不失一般性, 令 $\theta_0 \in (\pi/2, 5\pi/2)$, 则由 $\theta(t; r_0, \theta_0)$ 关于 t 的连续性可知, 必然存在某一时刻 $\bar{t} \in (0, 2m\pi)$, 使得

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}-} \theta(t; r_0, \theta_0) = \frac{\pi}{2}.$$

设 t_1 是 $(0, 2\pi)$ 内第一个满足该性质的时刻, 于是, $\theta(t; r_0, \theta_0) \in (\pi/2, 5\pi/2)$, $t \in [t_0, t_1)$. 由于

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} \theta'(t; r_0, \theta_0) = -2.$$

因此, 对充分小的正数 δ , $\theta(t; r_0, \theta_0)$ 在 $(t_1 - \delta, t_1)$ 严格递减. 从而, $\theta(t_1; r_0, \theta_0) = \pi/2$. 利用碰撞点的性质, 在大于 t_1 的一个较短时段内, 有 $\theta(t; r_0, \theta_0) < \pi/2$, 若存在下一次碰撞, 则类似可证存在 $t_2 \in (t_1, 2m\pi)$, 使得 $\theta(t_2; r_0, \theta_0) = -3\pi/2$. 并且由方程 (2.5) 给出的碰撞时刻的导函数左右极限的性质可证当 $t'_1 < t_1$ 和 $t'_2 > t_2$ 时,

$$\theta(t'_1; r_0, \theta_0) > \theta(t_1; r_0, \theta_0), \quad \theta(t'_2; r_0, \theta_0) < \theta(t_2; r_0, \theta_0).$$

从而,

$$\theta_0 = \theta(0; r_0, \theta_0) > \frac{\pi}{2}, \quad \theta(2m\pi; r_0, \theta_0) < -\frac{3\pi}{2}.$$

我们得到

$$\theta(2m\pi; r_0, \theta_0) - \theta_0 < -\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -2\pi,$$

与引理的假设矛盾. 所以在 $(0, 2m\pi)$ 时段内恰好只有 t_1 一个碰撞时刻.

又从 $(r(t; r_0, \theta_0), \theta(t; r_0, \theta_0))$ 关于 t 的 $2m\pi$ 周期性可证从变换 $\mathcal{T}$ 产生的方程 (2.2) 的解也是 $2m\pi$ 周期的. 引理结论成立. $\square$

引理 3.2 假设条件 (h) 成立, 则极坐标系 (2.5) 的解 $(r(t; r_0, \theta_0), \theta(t; r_0, \theta_0))$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在. 由于 (2.2) 的不从原点出发的解都不到达原点, 故当 $r_0 \neq 0$ 时, 解 $(r(t; r_0, \theta_0), \theta(t; r_0, \theta_0))$ 不经过原点.

证明 对于极坐标平面的解, 如果它不是全局存在, 由延拓定理, 则必定在有限时段内趋于定义域的边界, 即趋于无穷或者原点.

在 $r(t)$ 充分大时, 只需要考虑 (2.5) 对应到 (2.1) 的情形. 由题设可知, $f(t, x)$ 是双周期的连续函数, 所以是有界函数, 故存在 M , 对 $|\varepsilon| \leq 1$, 有 $|f(t, x) + \varepsilon p(t)| \leq M$. 故当 $r \geq R_0$ 时, 有

$$|r'| = \left| \frac{xy - y(f(t, x) + \varepsilon p(t))}{2r} \right| \leq \frac{|xy| + M|yx|}{2r} \leq (1 + M)r.$$

再由 Gronwall 不等式, 有

$$r(t_0)\exp(-(1 + M)(t - t_0)) \leq r(t; r_0, \theta_0) \leq r(t_0)\exp((1 + M)(t - t_0)). \quad (3.1)$$

在 $r(t)$ 足够小时, $\frac{\partial H}{\partial x} = \alpha x$, 故有

$$|r'| = \left| \frac{xy - \alpha yx}{2r} \right| \leq \frac{|xy| + \alpha|yx|}{2r} \leq (1 + \alpha)r.$$

由 Gronwall 不等式, 可得

$$r(t_0)\exp(-(1 + \alpha)(t - t_0)) \leq r(t; r_0, \theta_0) \leq r(t_0)\exp((1 + \alpha)(t - t_0)). \quad (3.2)$$

若解不是全局存在, 可设解的最大存在区间为 (a, b) . 若 $b < +\infty$, 则当 $t \rightarrow b^-$ 时, $r(t)$ 趋于无穷或者趋于原点. 而估计式 (3.1) 和 (3.2) 表明 $r(t)$ 既不趋于无穷也不趋于原点, 与前一句的陈述矛盾. 所以 $b = +\infty$. 同理 $a = -\infty$, 从而解是全局存在的. $\square$

解的全局存在性保证前面定义的 Poincaré 映射是有意义的, 且是保面积同胚 (Hamilton 系统的 Poincaré 映射是保面积的).

下面在相平面 $(u = r \cos \theta, v = r \sin \theta)$ 上构造环域 $\mathcal{A} = \{r_- \leq r \leq r_+\}$, 使得在 $\mathcal{A}$ 上 Poincaré 映射 $\mathcal{P}$ 是扭转的.

首先确定一下 ρ_1 和 ρ_2 . 不妨 $\alpha \leq 2$. 由 (h) 知, 存在 $\tilde{r} > 0$, 当 $0 < x \leq \tilde{r}$ 时, 有 $\alpha/2 \leq x \leq 2\beta$. 取

$$\rho_2 = \exp\left(- (1 + 3\beta) \frac{12\pi}{\alpha}\right) \tilde{r}, \quad \rho_1 = \frac{\rho_2}{2}.$$

同时注意到

$$y \frac{\partial H}{\partial y} > 0, \quad \text{当 } x = 0, \quad y \neq 0.$$

从这个不等式可以得到碰撞时刻 t' 的导函数左右极限的符号. 从而说明系统 (2.5) 的解 $(r(t; r_0, \theta_0), \theta(t; r_0, \theta_0))$ 在 $\theta(t'; r_0, \theta_0) = 2k\pi + \pi/2, \forall k \in \mathbb{Z}$ 时有 $\theta'_\pm(t'; r_0, \theta_0) < 0$. 从相平面轨线看, 角函数 $\theta(t; r_0, \theta_0)$ 在 $\theta = 2k\pi + \pi/2 (\forall k \in \mathbb{Z})$ 时只能正向顺时针增加, 并且角函数相差 2π 时至少遇到一次碰撞时刻. 因此, 对任意 $t_2 > t_1$, 有

$$\theta(t_2; r_0, \theta_0) < \theta(t_1; r_0, \theta_0) + 2\pi. \quad (3.3)$$

引理 3.3 假设条件 (h) 成立, 则存在 $\varepsilon_0 > 0, m_0 \in \mathbb{N}$ 和 $r_- > 0$, 使得当 $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ 和 $m \geq m_0 \in \mathbb{N}$ 时, 系统 (2.5) 从 $r_0 = r_-$ 出发的解满足

$$\theta(2m\pi; r_0, \theta_0) - \theta_0 < -4\pi,$$

即解在 $2m\pi$ 时段内至少顺时针转 2 圈.

证明 先分析 $r(t; r_0, \theta_0)$ 位于 $E = \{\delta_- \leq r \leq \delta_+\}$ 的情形, 其中 $\delta_\pm = \exp(\pm(1 + 3\beta) \frac{12\pi}{\alpha}) \tilde{r}$, 并取 $\varepsilon_0 = \alpha\delta_-/(2\sqrt{2})$. 当 $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ 时, 从系统 (2.5) 可得

$$\begin{cases} |r'(t)| = \left| \frac{xy - y(f(t, x) - \varepsilon p(t))}{2r} \right| \leq (1 + 2\beta)r + \sqrt{2}\varepsilon p(t) \leq (1 + 3\beta)r, \\ \theta'(t) \leq -2\left(\sin^2 \theta + \frac{1}{2}\alpha \cos^2 \theta\right) + \frac{\sqrt{2}\varepsilon p}{r} \leq -\frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

故系统 (2.5) 从 $(r_0 = \tilde{r}, \theta_0)$ 出发的解满足

$$\begin{aligned} \delta_- \leq r(t; r_0, \theta_0) \leq \delta_+, \quad t \in \left[0, \frac{12\pi}{\alpha}\right], \\ \theta\left(\frac{12\pi}{\alpha}; r_0, \theta_0\right) - \theta_0 < -6\pi. \end{aligned}$$

于是, 取 $r_- = \tilde{r}, m_0 = [\frac{6}{\alpha}] + 1$. 当 $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ 和 $m \geq m_0 \in \mathbb{N}$ 时, 系统 (2.5) 从 $r_0 = r_-$ 出发的解满足

$$\theta(2m\pi; r_0, \theta_0) - \theta_0 = \theta(2m\pi; r_0, \theta_0) - \theta\left(\frac{12\pi}{\alpha}; r_0, \theta_0\right) + \left(\theta\left(\frac{12\pi}{\alpha}; \theta_0, r_0\right) - \theta_0\right) < 2\pi - 6\pi = -4\pi,$$

其中 $\theta(2m\pi; r_0, \theta_0) - \theta(12\pi/\alpha; r_0, \theta_0) < 2\pi$ 用到 (3.3). 因此, 解在 $2m\pi$ 时段内至少顺时针转 2 圈. $\square$

引理 3.4 存在 r_+ , 使得当 $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ 和 $m \geq m_0 \in \mathbb{N}$ 时, 系统 (2.5) 从 $r_0 = r_+$ 出发的解满足

$$\theta(2m\pi; r_0, \theta_0) - \theta_0 > -2\pi.$$

证明 取 $m \geq m_0$, 由题设可知, $f(t, x)$ 是双周期的连续函数, 所以 $f(t, x)$ 是有界函数, 故对正数 $\delta < 1/(4m\pi)$, 存在 $r_m > 0$, 使得

$$\left| \frac{f(t, x) + \varepsilon p(t)}{x} \right| < \delta^2, \quad \text{当 } x \geq \frac{r_m}{\sqrt{2}} \text{ 和 } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \text{ 时.}$$

由解的全局存在性知, 解具有弹性性质. 故存在 r_+ , 使得当 $r_0 \geq r_+$ 时,

$$r(t; r_0, \theta_0) \geq r_m, \quad \text{对 } t \in [0, 2m\pi] \text{ 成立,}$$

即解在充分大圆盘 $r \leq r_m$ 外. 再设

$$D := \left\{ |\theta| < \delta, |x| \geq \frac{r_m}{\sqrt{2}} \right\}.$$

D 是圆盘 $r \leq r_m$ 外的一个圆心角为 2δ 的扇形区域. 如果解绕原点顺时针转动满一圈, 其必定在某个时段 $[t_1, t_2] \subset [0, 2m\pi]$ 顺时针转过扇形区域 D . 在此区域有

$$|\theta'| = \left| 2 \left(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \frac{f(t, x) + \varepsilon p(t)}{x} \right) \right| < 4\delta^2.$$

因此就有

$$t_2 - t_1 \geq \frac{2\delta}{\max_{t_1 \leq t \leq t_2} |\theta'(t)|} > \frac{2\delta}{4\delta^2} > 2m\pi,$$

与 t_1 和 t_2 均在 $2m\pi$ 时段内矛盾. 这说明从 $r_0 = r_+$ 出发的解在 $[0, 2m\pi]$ 时段内不可能绕原点顺时针转动满一圈, 即

$$\theta(2m\pi; \theta_0, r_0) - \theta_0 > -2\pi.$$

证毕. □

4 定理 1.1 的证明

考虑的 Poincaré 映射在原点处是例外的, 所以, 我们需要用到一个 Poincaré-Birkhoff 扭转定理的新形式 (参见文献 [11, 定理 2.1]), 它是在 Ding^[20] 和 Franks^[14] 得到的 Poincaré-Birkhoff 扭转定理的基础上改进的. 这个形式的特点是, 只需要 Poincaré 映射在某一个包含原点的圆盘外有定义.

取 $m \geq m_0$, 综合引理 3.3 和 3.4 可知, 存在环域 $\mathcal{A} = \{r_- \leq r \leq r_+\}$, 使得从内边界 r_- 上出发的解在 $2m\pi$ 时段内至少顺时针转 2 圈, 而从外边界 r_+ 上出发的解在 $2m\pi$ 时段内转不到 1 圈. 由于解的全局存在性, 因此存在 $0 < r_-^{(m)} < r_- < r_+ < r_+^{(m)}$, 使得当 $(r_0, \theta_0) \in \mathcal{A}$ 时, 对 $t \in [0, 2m\pi]$, 有

$$(r(t; r_0, \theta_0), \theta(t; r_0, \theta_0)) \in \mathcal{B}_m = \{r_-^{(m)} \leq r \leq r_+^{(m)}\}.$$

由于 Poincaré 映射 $\mathcal{P}$ 是保面积的, 所以, $\mathcal{B}_m \setminus \mathcal{P}^m(\mathcal{A})$ 中两个连通分支的面积分别等于 $\mathcal{B}_m \setminus \mathcal{A}$ 中相应两个连通分支的面积. 应用 Poincaré-Birkhoff 扭转定理 (参见文献 [11, 定理 2.1]) 可得 $\mathcal{P}^m$ 在 $\mathcal{A}$ 中至少有 2 个几何不同的不动点 $(r_0^{(i)}, \theta_0^{(i)})$, $i = 1, 2$. 系统 (2.5) 以它们为初始值出发的解就是 $2m\pi$ 周期解, 它们的角函数满足

$$\theta(2m\pi; r_0^{(i)}, \theta_0^{(i)}) - \theta_0^{(i)} = -2\pi, \quad i = 1, 2. \quad (4.1)$$

它们对应到碰撞系统 (2.2) 的 2 个 $2m\pi$ 弹性周期解, 并且分别在 $2m\pi$ 时段内恰好有一次碰撞. 所以, 它们必定是 $2m\pi$ 弹性次调和的周期解. 对每一个 m , 取不同的 r_+ 可以构造不同的环域, 得到系统对每个 $m \geq m_0$ 有至少 2 个 $2m\pi$ 弹性次调和的周期解.

下面需证明这些周期解是系统 (2.1) 的. 也就是证明这些周期解位于圆盘 $r \leq \rho_1$ 之外. 为此, 注意到由 Poincaré-Birkhoff 扭转定理得到的周期解从 $\mathcal{A}$ 中出发, 如果其达到圆盘 $r \leq \rho_1$ 必定在某个时刻 t_1 与内边界 $r = r_-$ 相交, 然后又在 t_2 时刻与 $r = \rho_1$ 相交. 引理 3.3 实际上证明了从内边界 $r = r_-$ 出发的解到达 $r = \rho_1$ 至少需要用 $12\pi/\alpha$ 长的时间, 故 $2m\pi > t_2 > t_1 + 12\pi/\alpha$. 而引理 3.3 实际上也证明了在 $12\pi/\alpha$ 时段内解至少顺时针转了 3 圈. 于是, 结合 (3.3) 可得

$$\begin{aligned} \theta(2m\pi; r_0^{(i)}, \theta_0^{(i)}) - \theta_0^{(i)} &= \left(\theta(2m\pi; r_0^{(i)}, \theta_0^{(i)}) - \theta\left(t_1 + \frac{12\pi}{\alpha}; r_0^{(i)}, \theta_0^{(i)}\right) \right) \\ &\quad + \left(\theta\left(t_1 + \frac{12\pi}{\alpha}; r_0^{(i)}, \theta_0^{(i)}\right) - \theta(t_1; r_0^{(i)}, \theta_0^{(i)}) \right) + (\theta(t_1; r_0^{(i)}, \theta_0^{(i)}) - \theta_0^{(i)}) \\ &< 2\pi - 6\pi + 2\pi = -2\pi, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

与 (4.1) 矛盾.

我们证明了所得的 $2m\pi$ 弹性次调和的周期解是系统 (2.1) 的, 也即证明了对每个 $m \geq m_0$, 碰撞振子 (1.1) 至少有两个 $2m\pi$ 弹性次调和的周期解.

参考文献

- 1 Lamba H. Chaotic, regular and unbounded behaviour in the elastic impact oscillator. *Phys D*, 1995, 82: 117–135
- 2 Boyland P. Dual billiards, twist maps and impact oscillators. *Nonlinearity*, 1996, 9: 1411–1438
- 3 Zharnitsky V. Invariant tori in Hamiltonian systems with impacts. *Comm Math Phys*, 2000, 211: 289–302
- 4 Corbera M, Llibre J. Periodic orbits of a collinear restricted three body problem. *Celestial Mech Dynam Astronom*, 2003, 86: 163–183
- 5 Chang K C. The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities. *Comm Pure Appl Math*, 1980, 33: 117–146
- 6 Chang K C. Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial equations. *J Math Anal Appl*, 1981, 80: 102–129
- 7 Jiang Q, Tang C L. Periodic and subharmonic solutions of a class of subquadratic second-order Hamiltonian systems. *J Math Anal Appl*, 2007, 328: 380–389
- 8 Jiang M Y. Periodic solutions of second order differential equations with an obstacle. *Nonlinearity*, 2006, 19: 1165–1183
- 9 Bonheure D, Fabry C. Periodic motions in impact oscillators with perfectly elastic bounces. *Nonlinearity*, 2002, 15: 1281–1297
- 10 Qian D, Torres P J. Bouncing solutions of an equation with attractive singularity. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2004, 134: 210–213
- 11 Qian D, Torres P J. Periodic motions of linear impact oscillators via the successor map. *SIAM J Math Anal*, 2005, 36: 1707–1725
- 12 You J. Invariant tori and Lagrange stability of pendulum-type equations. *J Differential Equations*, 1990, 85: 54–65
- 13 Mawhin J, Willem M. Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some forced pendulum-type equations. *J Differential Equations*, 1984, 52: 264–287
- 14 Franks J. Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem. *Ann of Math (2)*, 1988, 128: 139–151
- 15 Fonda A, Willem M. Subharmonic oscillations of forced pendulum-type equations. *J Differential Equations*, 1989, 81: 215–220
- 16 Martinez-Amores P, Mawhin J, Ortega R, et al. Generic results for the existence of nondegenerate periodic solutions of some differential systems with periodic nonlinearities. *J Differential Equations*, 1991, 91: 138–148

- 17 Boscaggin A, Ortega R, Zanolin F. Subharmonic solutions of the forced pendulum equation: A symplectic approach. Arch Math, 2014, 102: 459–468
- 18 孙西滢. 弹性碰撞振子的动态行为. 硕士学位论文. 苏州: 苏州大学, 2003
- 19 Ding T, Zanolin F. Periodic solutions of Duffing's equations with superquadratic potential. J Differential Equations, 1992, 97: 328–378
- 20 Ding W. A generalization of the Poincaré-Birkhoff theorem. Proc Amer Math Soc, 1983, 88: 341–346

Bouncing periodic solutions for forced Pendulum-type equations with impact

Yinyin Wu & Dingbian Qian

Abstract In this paper, we discuss the existence for infinity of bouncing subharmonic periodic solutions of pendulum-type equations with impact. We transform the impact phase-plane into a whole phase-plane by a coordinate transformation. After analyzing the motions of the transformed system on the phase-plane, we prove the existence of infinite many subharmonic solutions of pendulum-type equations with impact by applying the Poincaré-Birkhoff twist theorem on the improved Poincaré map.

Keywords pendulum-type equations with impact, bouncing periodic solutions, Poincaré map, Poincaré-Birkhoff twist theorem

MSC(2010) 34C15, 34C25, 34B30, 54H25

doi: 10.1360/N012017-00199