超图与图公平划分的 l -元组金晶^{1,2*}, 许宝刚²

1. 南京师范大学数学科学学院, 南京 210023;

2. 南京师范大学泰州学院, 泰州 225300

E-mail: jinjing19841@126.com, baogxu@njnu.edu.cn

收稿日期: 2018-03-15; 接受日期: 2018-09-01; 网络出版日期: 2018-12-18; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11571180 和 11331003) 和江苏省高校自然科学基金 (批准号: 17KJB110010) 资助项目

摘要 令 S 为一个图或超图的某顶点子集, 则 $e(S)$ 表示该图中端点全部在 S 内的边数. Fan 和 Hou (2017) 证明了每个最大度为 Δ 的 m 阶图 G 都存在一个 k 部划分 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$, 使得对于任意 $1 \leq i < j \leq k$, 都成立 $e(V_i \cup V_j) \leq \min\{\frac{4}{k^2}m + \frac{4\Delta}{k}, \frac{m}{k-1}\} + o(m^{\frac{7}{8}})$. 令 H 表示最大度为 Δ 的 m 阶 r -一致超图, 本文证明 H 存在一个 k 部划分 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$, 对于任意 $1 \leq i < j \leq k$, 满足 $e(V_i \cup V_j) \leq \frac{r-1}{k-1}m + o(m)$; 也证明当 $\Delta = o(m)$ 时, H 存在一个 k 部划分 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$, 使得对于任意 $l \in [k-1]$ 和每个 l -元组 $(V_{j_1}, \dots, V_{j_l})$, 有 $e(V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_l}) \leq \frac{l^r}{k^r}m + o(m)$.

关键词 公平划分 一致超图 简单图**MSC (2010) 主题分类** 05C65, 05C70

1 引言

令 G 表示一个图 (或超图), 我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 来表示 G 的顶点集合和边集合. 令 S 和 T 为 $V(G)$ 的两个不交子集, $e(S)$ 表示 $E(G)$ 中端点都在 S 中的边数, $d(S)$ 表示 $E(G)$ 中至少有一个端点在 S 中的边数, 而 $e(S, T)$ 表示 $E(G)$ 中与 S 和 T 都有非空交的边数. 令 k 为正整数, $[k]$ 表示集合 $\{1, 2, \dots, k\}$, $V_1, V_2, \dots, V_k$ 为 $V(G)$ 的互不相交的非空子集, 若 $V(G) = \bigcup_{i=1}^k V_i$, 则称 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$ 为 $V(G)$ 的一个 k -部划分或 k -划分.

图划分问题寻求的是具有某种特定性质的划分, 例如, 最大割问题指的是寻找图的一个二部划分满足两部分之间的边数达到最大 (这是 Karp^[1] 提出的最早的 NP (nondeterministic polynomial-time) 完全问题之一). 有关这个问题的更多内容参见文献 [2, 3]. 在实践中, 人们往往需要寻找同时优化多个变量的划分, 这种划分问题被称为公平划分问题. 例如, 瓶颈二部划分问题, 指的是寻找图的一个二部划分 (V_1, V_2) , 要求 $\max\{e(V_1), e(V_2)\}$ 达到最小 (参见文献 [4]). 近年来, 这类问题被广泛研究. Bollobás 和 Scott^[5] 证明了每个 m 条边的图都存在一个 k -划分 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$, 满足

$$\max_{i \in [k]} \{e(V_i)\} \leq \frac{m}{k^2} + \frac{k-1}{2k^2} \left(\sqrt{2m + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right). \quad (1.1)$$

英文引用格式: Jin J, Xu B G. Bounds for l -tuples in judicious partition of hypergraphs and graphs (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1063–1074, doi: 10.1360/SCM-2017-0605

之后, Xu 和 Yu^[6] 证实了 Bollobás 和 Scott^[7] 的一个猜想, 即证明了每个 m 条边的图都存在一个 k -划分 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$, 不仅满足 (1.1), 而且成立

$$m - \sum_{i=1}^k e(V_i) \geq \frac{k-1}{k}m + \frac{k-1}{2k}\sqrt{2m + \frac{1}{4}} + O(k).$$

读者可参见文献 [6, 8–14] 了解更多信息.

在文献 [7] 中, Bollobás 和 Scott 提出以下问题: 对于整数 $k \geq 2$, 是否存在最小正整数 $f(k, m)$, 使得任意一个 m 条边的图都存在满足条件 $e(V_i \cup V_j) \leq f(k, m)$ 的一个 k -划分 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$, 其中 $1 \leq i < j \leq k$? 并提出了如下的猜想:

猜想 1.1 令 $k \geq 2$ 是一个整数, 则任意一个具有 n 个顶点和 m 条边的图都存在一个 k -划分 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$, 使得对于所有 $1 \leq i < j \leq k$, 都有下式成立:

$$e(V_i \cup V_j) \leq \frac{12}{(k+2)(k+1)}m + O(n).$$

Ma 和 Yu^[15] 证明了 $f(k, m) \leq h_k m + O(m^{\frac{4}{5}})$, 其中 $h_k < \frac{1.6}{k}$, 而当 $k \geq 23$ 时, $h_k < \frac{1.5}{k}$. 最近, Fan 和 Hou^[16] 证实了猜想 1.1, 即证明了下面的定理:

定理 1.1^[16] 任意一个具有 n 个顶点和 m 条边的图 G 都存在一个 k -划分 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$, 使得对于任给 $1 \leq i < j \leq k$, 都有下式成立:

$$e(V_i \cup V_j) \leq \min \left\{ \frac{4}{k^2}m + \frac{4\Delta}{k}, \frac{m}{k-1} \right\} + o(m^{\frac{7}{8}}).$$

超图的公平划分问题似乎更加困难, 在文献 [17] 中, Bollobás 和 Scott 提出如下猜想:

猜想 1.2 令 $r \geq 3$ 和 $k \geq 2$ 是正整数, 则任意一个具有 m 条边的 r -一致超图 H 都存在一个 k -划分 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$, 使得对于每个 $i \in [k]$, 都有 $e(V_i) \leq \frac{m}{k^r} + o(m)$ 成立.

当 $r = 3$ 时, Bollobás 和 Scott^[17] 已证实了猜想 1.2, 且在文献 [7] 中证明了任意一个具有 m 条边的 r -一致超图 H 都存在一个划分 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$, 使得对于每个 $i \in [k]$, 都有

$$e(V_i) \leq \frac{a(r)}{k^r} + o(m),$$

其中当 $r \rightarrow \infty$ 时, $a(r) = (1 + o(1))\frac{r}{\log r}$. 最近, Hou 等^[18] 证明了 $r = 4$ 时该猜想正确, 在文献 [19, 20] 证明了当 $\Delta = o(m)$, 或对于任意 $\epsilon > 0$, $m = \Omega(n^{r-3+\epsilon})$ 时, 该猜想也成立. 文献 [19] 也渐近地证明了该猜想在 $k \rightarrow \infty$ 时的正确性.

基于以上结论, 自然地可以提出以下问题: 对于任意正整数 $k \geq 3$, 任意一个具有 m 条边的 r -一致超图 H 是否存在一个划分 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$, 使得对于任意 $l \in [k-1]$ 和每个 l -元组 $(V_{j_1}, \dots, V_{j_l})$, 都有 $e(V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_l}) \leq \frac{l^r}{k^r}m + o(m)$ 成立. 而当 $l = k-1$ 时, 该问题就隐含了 Bollobás 和 Scott^[21] 关于相交问题的如下猜想:

猜想 1.3 令 $r \geq 3$ 和 $k \geq 2$ 为给定的整数, 则任意一个 m 条边的 r -一致超图 H 都存在一个划分 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$, 使得对于每个 $i \in [k]$, 有 $d(V_i) \geq (1 + o(1))(1 - (1 - \frac{1}{k})^r)m$.

我们有条件地解决了猜想 1.3, 证明了下面的定理:

定理 1.2 令 ϵ 为给定的正实数, $r \geq 3$ 和 k 为给定的正整数, H 为任意一个 m 条边的 r -一致超图. 若

$$\Delta(H) \leq \frac{\epsilon^2 m / 3 - k^{l-2r} l^r (k^r - l^r)}{k^{l-r-1} l^{r+1} r},$$

则 H 存在一个 k -划分 $(V_1, \dots, V_k)$, 使得对于任意 $l \in [k-1]$ 和每个 l -元组 $(V_{j_1}, \dots, V_{j_l})$, 有

$$e(V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_l}) \leq \frac{l^r}{k^r} m + \epsilon m.$$

由定理 1.2 可以直接得到推论 1.1.

推论 1.1 令 $r \geq 3$ 和 k 为给定的正整数, H 为任意一个 m 条边的 r -一致超图. 若 $\Delta(H) = o(m)$, 则 H 存在一个 k -划分 $(V_1, \dots, V_k)$, 使得对于任意 $l \in [k-1]$ 和每个 l -元组 $(V_{j_1}, \dots, V_{j_l})$, 有

$$e(V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_l}) \leq \frac{l^r}{k^r} m + o(m).$$

由推论 1.1 可以得到推论 1.2.

推论 1.2 令 $r \geq 3$ 和 k 为给定的正整数, H 为任意一个 m 条边的 r -一致超图. 若 $\Delta(H) = o(m)$, 则 H 存在一个 k -划分 $(V_1, \dots, V_k)$, 使得对于每个 $i \in [k]$, 有 $d(V_i) \geq (1 + o(1))(1 - (1 - \frac{1}{k})^r)m$.

令 H 为任意一个 m 条边的 r -一致超图, Fan 和 Hou^[16] 证明了图 H (即 $r = 2$ 时) 存在一个 k -划分 $(V_1, \dots, V_k)$, 使得对于任意 $1 \leq i < j \leq k$, 有 $e(V_i \cup V_j) \leq \frac{m}{k-1} + o(m^{\frac{7}{8}})$ 成立. 他们还指出星图 $K_{1,n}$ 达到了上界的主项. 本文将此结果推广到了 r -一致超图.

定理 1.3 令 $k \geq 4, r \geq 2$ 为给定的整数, H 为任意一个 m 条边的 r -一致超图, 则 H 存在一个 k -划分 $(V_1, \dots, V_k)$, 使得 $e(V_i \cup V_j) \leq \frac{r-1}{k-1} m + o(m)$ 对于所有的 $1 \leq i < j \leq k$ 都成立.

当考虑简单图且仅考虑 2-元组的支撑的边数时, 我们略微降低了文献 [16] 中上界的尾数部分.

定理 1.4 令 $k \geq 2$ 为整数, G 为含有 n 个顶点 m 条边且最大度为 Δ 的图, 则 G 存在一个 k -划分 $(V_1, \dots, V_k)$, 使得对于任意的 $1 \leq i < j \leq k$, 都有下式成立:

$$e(V_i \cup V_j) \leq \frac{4}{k^2} m + \frac{4\Delta}{k} + o(m^{\frac{5}{6}}).$$

我们将在第 2 节中证明定理 1.2 和 1.3, 在第 3 节中证明定理 1.4.

2 r -一致超图的划分

本节将用概率方法证明定理 1.2 和 1.3, 证明中将会用到以下来自文献 [22] 的引理.

引理 2.1^[22] 令 $X_1, \dots, X_n$ 为相互独立的随机变量, 满足 $P(X_i = 1) = p_i, P(X_i = 0) = 1 - p_i$. 令 $X = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ 和 $\nu = \sum_{i=1}^n a_i^2 p_i$ ($a_i \geq 0$), 则对于 $\lambda > 0$, 有下式成立:

$$\begin{aligned} P(X \leq EX - \lambda) &\leq \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2\nu} \right\}, \\ P(X \geq EX + \lambda) &\leq \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2(\nu + a\lambda/3)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 $a = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $EX = \sum_{i=1}^n a_i p_i$ 表示 X 的期望.

我们先证明以下引理 2.2.

引理 2.2 令 $l \geq 1, k \geq 3, r \geq 2$ 和 Δ 为整数, H 是任意一个 m 条边最大度为 Δ 的 r -一致超图 H . 令 $\omega: V(H) \rightarrow \mathbb{R}$ 为非负函数. 令 $T = \sum_{v \in V(H)} \omega(v)$, $a = \max_{v \in V(H)} \omega(v)$,

$$\Gamma(k, r, l, \Delta, m) = \left(\frac{k^r - l^r}{k^r} + \frac{lr\Delta}{k} \right) \frac{l^r}{k^r} m. \quad (2.2)$$

若对于某些常数 $C > 0$ 和 $\alpha < 1$, 有 $a \leq CT^\alpha$ 成立, 则 H 存在一个 k - 划分 $(V_1, \dots, V_k)$, 使得对于任意 $l \in [k-1]$ 和每个 l - 元组 $(V_{j_1}, \dots, V_{j_l})$, 都有

$$e(V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_l}) \leq \frac{l^r}{k^r} m + \sqrt{3 \binom{k}{l} \Gamma(k, r, l, \Delta, m)}, \quad (2.3)$$

且对于每个 $i \in [k]$, 都有

$$\left| \omega(V_i) - \frac{T}{k} \right| \leq \sqrt{4aT \ln k}, \quad (2.4)$$

其中 $\omega(V_i) = \sum_{v \in V_i} \omega(v)$.

证明 我们用 $(U_1, \dots, U_k)$ 来表示 $V(H)$ 的一个随机的 k - 划分, 其中每个顶点都以等概率 $1/k$ 均匀地落在 U_i 内. 显然, 对于每个 $l \in [k-1]$, 都有 $\binom{k}{l}$ 个不同的 l - 元组. 假设 $(U_{j_1}, \dots, U_{j_l})$ 是一个 l - 元组, 其中 $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k$.

我们用随机变量 $X_{j_1, \dots, j_l}$ 表示 $E(H)$ 中所有端点都在 $U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_l}$ 内的边数. 对于边 e , 令 I_e 为一个特征变量, 满足当且仅当 e 的所有端点都落在 $U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_l}$ 内时取值为 1, 其他情况时都取 0. 显然, $E(I_e) = \frac{l^r}{k^r}$. 所以, $X_{j_1, \dots, j_l}$ 的期望为 $\frac{l^r}{k^r} m$.

现在来计算 $X_{j_1, \dots, j_l}$ 的方差:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_{j_1, \dots, j_l}] &= E[(X_{j_1, \dots, j_l} - E[X_{j_1, \dots, j_l}])^2] \\ &= E\left[\left(\sum_{e \in E(H)} (I_e - E[I_e])\right)^2\right] \\ &= E\left[\sum_{e \in E(H)} (I_e - E[I_e])^2 + \sum_{e_1 \neq e_2 \in E(H)} (I_{e_1} - E[I_{e_1}])(I_{e_2} - E[I_{e_2}])\right] \\ &= \sum_{e \in E(H)} (E[I_e^2] - E[I_e]^2) + \sum_{e_1 \neq e_2 \in E(H)} (E[I_{e_1} I_{e_2}] - E[I_{e_1}] \cdot E[I_{e_2}]). \end{aligned} \quad (2.5)$$

注意到对于任意 $e \in E(H)$, 有下式成立:

$$E[I_e^2] - E[I_e]^2 = \frac{l^r}{k^r} - \frac{l^{2r}}{k^{2r}} = \frac{k^r - l^r}{k^{2r}} l^r. \quad (2.6)$$

若 e_1 和 e_2 没有公共的顶点, 则 $E[I_{e_1} I_{e_2}] - E[I_{e_1}] \cdot E[I_{e_2}] = 0$. 若对于某个 $i \in [r-1]$, e_1 和 e_2 有 i 个公共顶点, 则

$$\frac{l^r}{k^r} \times \frac{l^{r-i}}{k^{r-i}} - \frac{l^{2r}}{k^{2r}} = \frac{k^i l^{2r-i} - l^{2r}}{k^{2r}}.$$

注意到每对 e_1 和 e_2 在 $\sum_{e_1 \neq e_2 \in E(H)} (E[I_{e_1} I_{e_2}] - E[I_{e_1}] \cdot E[I_{e_2}])$ 中都被计算 2 次, 因此可以得到

$$\begin{aligned} \sum_{e_1 \neq e_2 \in E(H)} (E[I_{e_1} I_{e_2}] - E[I_{e_1}] \cdot E[I_{e_2}]) &= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{|e_1 \cap e_2|=i} \frac{k^i l^{2r-i} - l^{2r}}{k^{2r}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{|e_1 \cap e_2|=i} \frac{k^{r-1} l^{r+1} - l^{2r}}{k^{2r}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k^{r-1}l^{r+1} - l^{2r}}{k^{2r}} \sum_{e_1 \cap e_2 \neq \emptyset} 1 \\
&= \frac{k^{r-1}l^{r+1} - l^{2r}}{k^{2r}} \sum_{v \in V(H)} [d(v) \times (d(v) - 1)] \\
&< \frac{l^{r+1}}{k^{r+1}} \sum_{v \in V(H)} d^2(v).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

将 (2.5)–(2.7) 合并后, 我们得到

$$\begin{aligned}
\text{Var}[X_{j_1, \dots, j_l}] &< \frac{k^r - l^r}{k^{2r}} l^r m + \frac{l^{r+1}}{k^{r+1}} \sum_{v \in V(H)} d^2(v) \\
&\leq \frac{k^r - l^r}{k^{2r}} l^r m + \frac{l^{r+1}}{k^{r+1}} r \Delta m \\
&= \left(\frac{k^r - l^r}{k^r} + \frac{lr\Delta}{k} \right) \frac{l^r}{k^r} m = \Gamma(k, r, l, \Delta, m).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

由 Chebyshev 不等式推出, 对于 $\lambda > 0$, 有

$$\mathbb{P}(X_{j_1, \dots, j_l} \geq \mathbb{E}[X_{j_1, \dots, j_l}] + \lambda) \leq \frac{\text{Var}[X_{j_1, \dots, j_l}]}{\lambda^2}.$$

将 $\lambda = \sqrt{3 \binom{k}{l} \Gamma(k, r, l, \Delta, m)}$ 代入到上式, 我们得到

$$\mathbb{P}\left(X_{j_1, \dots, j_l} \geq \mathbb{E}[X_{j_1, \dots, j_l}] + \sqrt{3 \binom{k}{l} \Gamma(k, r, l, \Delta, m)}\right) \leq \frac{\text{Var}[X_{j_1, \dots, j_l}]}{3 \binom{k}{l} \Gamma(k, r, l, \Delta, m)} < \frac{1}{3 \binom{k}{l}}. \tag{2.9}$$

因为 $(U_1, \dots, U_k)$ 共有 $\binom{k}{l}$ 个不同的 l -元组, 所以,

$$\mathbb{P}(\text{至少有 1 个 } l\text{-元组 } (U_1, \dots, U_k) \text{ 满足 (2.9)}) < \frac{1}{3}. \tag{2.10}$$

最后, 我们估计 $\omega(U_i) = \sum_{v \in U_i} \omega(v)$. 对于每个 $i \in [k]$, 由 $T = \sum_{v \in V(H)} \omega(v)$ 可得

$$\mathbb{E}(\omega(U_i)) = \frac{T}{k}.$$

令 $\nu = \sum_{v \in V(H)} \omega^2(v) \frac{1}{k}$. 由 $a = \max_{v \in V(H)} \omega(v)$ 可得

$$\nu \leq \frac{a}{k} \sum_{v \in V(H)} \omega(v) = \frac{a}{k} T.$$

由引理 2.1 可得

$$\mathbb{P}\left(\left|\omega(U_i) - \frac{T}{k}\right| \geq \lambda\right) \leq 2 \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2(\nu + a\lambda/3)}\right\}.$$

令 $\lambda = \sqrt{4aT \ln k}$, 由 $a \leq CT^\alpha$ 和 $\alpha < 1$, 可得

$$\lambda \leq \sqrt{4C \ln k} T^{\frac{1+\alpha}{2}} = o(T).$$

所以,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\omega(U_i) - \frac{T}{k}\right| \geq \sqrt{4aT \ln k}\right) &\leq 2 \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2a(T/k + o(T)/3)}\right\} \\ &\leq 2 \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2aT}\right\} \\ &= \frac{2}{k^2}. \end{aligned}$$

因此, 至少有一个 U_i 满足 $|\omega(U_i) - \frac{T}{k}| \geq \sqrt{4aT \ln k}$ 的概率至多是 $k \cdot \frac{2}{k^2} = \frac{2}{k} \leq \frac{2}{3}$. 再由 (2.10), 可以推出, 对于每个 $l \in [k-1]$ 和每个 $i \in [k]$, 每个 l - 元组 $(U_1, \dots, U_k)$ 都满足 (2.3) 且 U_i 都满足 (2.4) 的概率为正数. $\square$

下面证明定理 1.2 和 1.3.

定理 1.2 的证明 由引理 2.2 可知, 我们只需证明 $\sqrt{3\binom{k}{l}\Gamma(k, r, l, \Delta, m)} \leq \epsilon m$. 因为

$$\Delta \leq \frac{\epsilon^2 m / 3 - k^{l-2r} l^r (k^r - l^r)}{k^{l-r-1} l^{r+1} r},$$

所以,

$$\begin{aligned} \Gamma(k, r, l, \Delta, m) &\leq \frac{k^r - l^r}{k^{2r}} l^r m + \frac{l^{r+1}}{k^{r+1}} r m \times \frac{\epsilon^2 m / 3 - k^{l-2r} l^r (k^r - l^r)}{k^{l-r-1} l^{r+1} r} \\ &= \frac{k^r - l^r}{k^{2r}} l^r m + \frac{\epsilon^2 m / 3 - k^{l-2r} l^r (k^r - l^r)}{k^l} m \\ &= \frac{\epsilon^2 m^2}{3k^l}. \end{aligned}$$

因此可以推出

$$\sqrt{3\binom{k}{l}\Gamma(k, r, l, \Delta, m)} \leq \sqrt{3k^l \Gamma(k, r, l, \Delta, m)} \leq \epsilon m.$$

证毕. $\square$

推论 1.2 的证明 由 $\Delta(H) = o(m)$ 和推论 1.1 可得, H 存在一个 k - 划分 $(V_1, \dots, V_k)$ 使得对于每个 $(k-1)$ - 元组 $(V_{j_1}, \dots, V_{j_{k-1}})$, 都有 $e(V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_{k-1}}) \leq \frac{(k-1)^r}{k^r} m + o(m)$ 成立. 这就说明每个 V_i 与至少

$$m - \left(\frac{(k-1)^r}{k^r} m + o(m)\right) = (1 + o(1)) \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^r\right) m$$

条边相交. $\square$

定理 1.3 的证明 根据定理 1.1, 可以假设 $r \geq 3$.

若 $\Delta = o(m)$, 由定理 1.2 可得, H 存在一个 k - 划分 $(V_1, \dots, V_k)$, 使得对于每对 $1 \leq i < j \leq k$, 有

$$e(V_i \cup V_j) \leq \frac{2^r}{k^r} m + o(m) \leq \frac{r-1}{k-1} m + o(m)$$

成立. 所以, 假设 $\Delta = \Theta(m)$.

令 A 为度数至少为 $\Delta^{\frac{r}{r+1}}$ 的顶点集合, 令 $B = V(H) \setminus A$, $\Delta(B) = \Delta(H[B])$, 则

$$\Delta(B) < \Delta^{\frac{r}{r+1}} = o(m). \quad (2.11)$$

因为

$$rm = \sum_{i=1}^n d(v_i) \geq \sum_{i=1}^{|A|} d(v_i) \geq |A| \Delta^{\frac{r}{r+1}} = |A| \theta(m^{\frac{r}{r+1}}),$$

所以,

$$|A| = O(m^{\frac{1}{r+1}}) = o(m),$$

由此推出

$$e(A) \leq \binom{|A|}{r} \leq O(m^{\frac{r}{r+1}}) = o(m). \quad (2.12)$$

若 $e(A, B) = o(m)$, 则 $e(B) = m - e(A) - e(A, B) = m - o(m) = O(m)$. 再由 (2.11) 可得

$$\Delta(B) = o(e(B)). \quad (2.13)$$

由定理 1.2 可得, 存在一个 B 的划分 $(B_1, B_2, \dots, B_k)$ 使得对于每对 $1 \leq i < j \leq k$, 有

$$\begin{aligned} e(B_i \cup B_j) &\leq \frac{2^r}{k^r} e(B) + o(e(B)) \\ &= \frac{2^r}{k^r} (m - o(m)) + o(m) \\ &= \frac{2^r}{k^r} m + o(m) \\ &\leq \frac{r-1}{k-1} m + o(m) \end{aligned} \quad (2.14)$$

成立. 令 $V_1 = A \cup B_1$, 令 $V_i = B_i$ 对所有 $i \in \{2, 3, \dots, k\}$ 成立, 则对于 $2 \leq i \neq j \leq k$, 有

$$e(V_i \cup V_j) = e(B_i \cup B_j) \leq \frac{r-1}{k-1} m + o(m).$$

由 (2.12)、(2.14) 和 $e(A, B) = o(m)$ 可得, 对于每个 $j \geq 2$, 有

$$\begin{aligned} e(V_1 \cup V_j) &= e(A \cup B_1 \cup B_j) \\ &\leq e(A) + e(A, B) + e(B_1 \cup B_j) \\ &\leq \frac{r-1}{k-1} m + o(m). \end{aligned}$$

现假设 $e(A, B) = \Theta(m)$. 对于每个顶点 $v \in B$, 令 $\omega(v) = e(v, A)$. 令

$$a = \max_{v \in B} \omega(v), \quad T = \sum_{v \in V(B)} \omega(v).$$

显然, $e(A, B) \leq T \leq (r-1)e(A, B)$, 即 $T = \Theta(m)$. 对于某些常数 c 和 c' , 有

$$a \leq \max_{v \in B} d_H(v) < \Delta^{\frac{r}{r+1}} = cm^{\frac{r}{r+1}} = c'e(A, B)^{\frac{r}{r+1}} \leq c'T^{\frac{r}{r+1}}.$$

由引理 2.2 知, $H[B]$ 存在一个 B 的 $(k-1)$ -划分 $(B_1, \dots, B_{k-1})$ 使得

$$e(B_i) \leq \frac{e(B)}{(k-1)^r} + \sqrt{\Gamma(k-1, r, 1, \Delta(B), e(B))} \quad \text{对 } i \in [k-1] \text{ 成立}, \quad (2.15)$$

$$e(B_i \cup B_j) \leq \frac{2^r}{(k-1)^r} e(B) + \sqrt{\Gamma(k-1, r, 2, \Delta(B), e(B))} \quad \text{对 } 1 \leq i \neq j \leq k-1 \text{ 成立}, \quad (2.16)$$

且

$$\begin{aligned} \omega(B_i) &\leq \frac{T}{k-1} + \sqrt{6aT \ln(k-1)} \\ &\leq \frac{T}{k-1} + \sqrt{c''T^{2-\frac{1}{r+1}}} \\ &\leq \frac{(r-1)e(A, B)}{k-1} + o(m) \end{aligned} \quad (2.17)$$

对 $i \in [k-1]$ 成立, 其中

$$\Gamma(k-1, r, l, \Delta(B), e(B)) = \left(\frac{(k-1)^r - l^r}{(k-1)^r} + \frac{lr\Delta(B)}{k-1} \right) \frac{l^r}{(k-1)^r} e(B).$$

因为 $e(B) = O(m)$ 和 $\Delta(B) = o(m)$, 所以,

$$\sqrt{\Gamma(k-1, r, l, \Delta(B), e(B))} = o(m). \quad (2.18)$$

令当 $i \in [k-1]$ 时, $V_i = B_i$, $V_k = A$. 由 (2.15)–(2.17) 可得, 当 $1 \leq i \neq j \leq k-1$ 时,

$$\begin{aligned} e(V_i \cup V_j) &= e(B_i \cup B_j) \\ &\leq \frac{2^r}{(k-1)^r} m + o(m) \\ &\leq \frac{r-1}{k-1} m + o(m), \end{aligned}$$

且当 $i \in [k-1]$ 时,

$$\begin{aligned} e(V_i \cup V_k) &= e(V_i) + e(V_i, V_k) + e(V_k) \\ &\leq \frac{e(B)}{(k-1)^r} + o(m) + \frac{(r-1)e(A, B)}{k-1} + o(m) + o(m) \\ &\leq \frac{r-1}{k-1} m + o(m), \end{aligned}$$

因为由 (2.12) 可知 $e(A) = o(m)$ 且 $e(V_i, V_k) \leq \omega(V_i) = \omega(B_i)$. □

3 图的划分

本节将讨论简单图的 k - 划分, 使得任意两部分导出子图的边数尽量少. Fan 和 Hou^[16] 已证实猜想 1.1, 事实上, 他们证明了一个更强一些的结论, 即证明了每个 m 条边且最大度为 Δ 的图 G 都存在一个 k - 划分 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$, 使得 $e(V_i \cup V_j) \leq \frac{4}{k^2} m + \frac{4\Delta}{k} + o(m^{\frac{7}{8}})$ 对 $1 \leq i \neq j \leq k$ 成立. 我们将尾项 $o(m^{\frac{7}{8}})$ 降低至 $o(m^{\frac{5}{6}})$. 这里所用的技巧与文献 [16] 类似. 以下是两个有用的引理, 一是 Azuma-Hoeffding 不等式, 另一个来自于文献 [16].

引理 3.1 (Azuma-Hoeffding 不等式^[17, 23–25]) 令 $Z_1, \dots, Z_n$ 为在 $\{1, \dots, k\}$ 中取值的相互独立且服从均匀分布的随机变量, $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$. 令 $f: \{1, \dots, k\}^n \rightarrow \mathbb{N}$, 满足对任意仅在第 i 个坐标

不同的变量 $Y, Y' \in \{1, \dots, k\}^n$, 有 $|f(Y) - f(Y')| \leq c_i$ 成立, 那么对于任意 $z > 0$, 有

$$\begin{aligned} P(f(Z) \geq E(f(Z)) + z) &\leq \exp \left\{ -\frac{z^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right\}, \\ P(f(Z) \leq E(f(Z)) - z) &\leq \exp \left\{ -\frac{z^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

引理 3.2^[16] 设 G 为含有 n 个顶点和 m 条边的简单图, $k \geq 3$ 为给定的整数, 则 G 存在一个 k -划分 $(V_1, \dots, V_k)$ 使得对于 $l \in [k-1]$ 和每个 l -元组 $(V_{j_1}, \dots, V_{j_l})$, 都有

$$e(V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_l}) \leq \frac{l^2}{k^2} m + 4\sqrt{2\Delta(G)m \ln n}.$$

定理 1.4 的证明 只需证明对于任意小的实数 $\epsilon > 0$, 若 n 充分大, 则图 G 都存在一个 k -划分 $(V_1, \dots, V_k)$, 使得对于任意 $i, j \in [k]$, 有

$$e(V_i \cup V_j) \leq \frac{4}{k^2} m + \frac{4\Delta}{k} + \epsilon m^{\frac{5}{6}}. \quad (3.2)$$

假设 G 不含孤立点. 由引理 3.2 可知, G 存在一个 k -划分 $(V_1, \dots, V_k)$ 使得对于 $1 \leq i \neq j \leq k$, 我们有

$$e(V_i \cup V_j) \leq \frac{4}{k^2} m + 4\sqrt{2\Delta m \ln n}.$$

当 $4\sqrt{2\Delta m \ln n} < \epsilon m^{\frac{5}{6}}$ 时, 问题已经解决. 所以, 假设 $4\sqrt{2\Delta m \ln n} \geq \epsilon m^{\frac{5}{6}}$, 可以推出,

$$\Delta \geq \frac{\epsilon^2 m^{\frac{2}{3}}}{32 \ln^2 n}. \quad (3.3)$$

我们将 G 的顶点排序为 $v_1 v_2 \dots v_n$ 使得 $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$, 然后选择 $V(G)$ 的一个极大子集 $A = \{v_1, \dots, v_t\}$ 满足 $d(v_t) \geq m^{\frac{3}{5}}$, 那么, $d(v_{t+1}) < m^{\frac{3}{5}}$. 令 $B = V(G) \setminus A = \{u_1, u_2, \dots, u_{n-t}\}$. 再令 $e(A) = m_1$, $e(A, B) = m_2$, $e(B) = m_3$. 由 (3.3) 可得 $t \geq 1$. 由握手定理可知,

$$2m = \sum_{i=1}^n d(v_i) \geq \sum_{i=1}^t d(v_i) \geq tm^{\frac{3}{5}},$$

可得 $t \leq 2m^{\frac{2}{5}}$, 所以,

$$m_1 \leq \binom{t}{2} \leq 2m^{\frac{4}{5}}. \quad (3.4)$$

这就说明

$$m \leq 2m^{\frac{4}{5}} + m_2 + m_3. \quad (3.5)$$

我们选择 A 的一个划分 $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ 满足 $e(A_1, B) \geq \dots \geq e(A_k, B)$, 且 $e(A_1, B) - e(A_k, B)$ 的值最小. 为了方便起见, 令 $e(A_i, B) = a_i = \frac{m_2}{k} + y_i$, $i \in [k]$. 根据 $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ 的定义, $e(A_1, B) - e(A_k, B) \leq \Delta$, 否则, 我们可以将一个顶点从 A_1 移至 A_k 来改进这个划分. 因此,

$$|y_i| \leq \Delta. \quad (3.6)$$

令 $(B_1, B_2, \dots, B_k)$ 为 B 的一个随机划分, 其中 B 的每个顶点都随机且独立均匀地落在 B_i ($i \in [k]$) 中. 对于 $i \in [n-t]$ 和 $j \in [k]$, 令 X_i 为随机变量, 满足取值为 j 当且仅当 u_i 落在 B_j 中.

令 $V_i = A_i \cup B_i$. 对于每个 A_i 和每条边 $e \in E(A_i, B)$, 我们有 $P(e \in E(A_i, B_j)) = \frac{1}{k}$ 对每个 $j \in [k]$ 成立. 这就说明

$$E(e(A_i, B_j)) = \frac{a_i}{k}.$$

显然, B 中顶点 v 影响 $e(A_i, B_j)$ 至多 $d(v)$. 令 $X = (X_1, \dots, X_{n-t})$, $f(X) = e(A_i, B_j)$, 常数 $x > 0$, 根据引理 3.1 可得

$$\begin{aligned} P(e(A_i, B_j) \geq E(e(A_i, B_j)) + x) &\leq \exp \left\{ -\frac{x^2}{2 \sum_{i=1}^{n-t} d^2(u_i)} \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{x^2}{2d(v_{t+1}) \sum_{i=1}^{n-t} d(u_i)} \right\} \\ &< \exp \left\{ -\frac{x^2}{4m^{\frac{3}{5}} \cdot m} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{x^2}{4m^{\frac{8}{5}}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

将 $x = 2m^{\frac{4}{5}}\sqrt{\ln n}$ 代入 (3.7) 中, 我们有

$$P\left(e(A_i, B_j) \geq \frac{a_i}{k} + 2m^{\frac{4}{5}}\sqrt{\ln n}\right) < \exp\{-\ln n\} = \frac{1}{n} = o(1). \quad (3.8)$$

对于每边 $e \in E(G[B])$, 有 $P(e \in E(B_i \cup B_j)) = \frac{4}{k^2}$. 因此,

$$E(e(B_i \cup B_j)) = \frac{4}{k^2}m_3.$$

注意到改变 B 中 v 的位置对 $e(B_i \cup B_j)$ 的影响至多为 $d(v)$. 类似上部分 $e(A_i, B_j)$, 由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned} P(e(B_i \cup B_j) \geq E(e(B_i \cup B_j)) + 2m^{\frac{4}{5}}\sqrt{\ln n}) &\leq \exp \left\{ -\frac{(2m^{\frac{4}{5}}\sqrt{\ln n})^2}{2 \sum_{i=1}^{n-t} d^2(u_i)} \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{2m^{\frac{8}{5}} \ln n}{d(v_{t+1}) \sum_{i=1}^{n-t} d(u_i)} \right\} \\ &< \exp \left\{ -\frac{2m^{\frac{8}{5}} \ln n}{2m^{\frac{8}{5}}} \right\} \\ &= \exp\{-\ln n\} = \frac{1}{n} = o(1). \end{aligned} \quad (3.9)$$

将 (3.8) 与 (3.9) 结合, 我们得到以下事件发生的概率为正: 存在一个 B 的划分 $(B_1, \dots, B_k)$ 使得任意一个对 $i, j \in [k]$, 满足

$$\begin{aligned} e(A_i, B_j) &\leq \frac{a_i}{k} + 2m^{\frac{4}{5}}\sqrt{\ln n} \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{m_2}{k} + y_i \right) + 2m^{\frac{4}{5}}\sqrt{\ln n} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{m_2}{k^2} + \frac{\Delta}{k} + 2m^{\frac{4}{5}}\sqrt{\ln n},$$

以及任意 $1 \leq i \neq j \leq k$, 满足

$$e(B_i \cup B_j) \leq \frac{4m_3}{k^2} + 2m^{\frac{4}{5}}\sqrt{\ln n}.$$

再加上 (3.4) 和 (3.5), 可以推出当 $1 \leq i \neq j \leq k$ 时,

$$\begin{aligned} e(V_i \cup V_j) &= e((A_i \cup B_i) \cup (A_j \cup B_j)) \\ &= e(A_i, B_i) + e(A_i, B_j) + e(A_j, B_i) + e(A_j, B_j) + e(A_i \cup A_j) + e(B_i \cup B_j) \\ &\leq 4\left(\frac{m_2}{k^2} + \frac{\Delta}{k} + 2m^{\frac{4}{5}}\sqrt{\ln n}\right) + m_1 + \frac{4m_3}{k^2} + 2m^{\frac{4}{5}}\sqrt{\ln n} \\ &\leq \frac{4m}{k^2} + \frac{4\Delta}{k} + 10m^{\frac{4}{5}}\sqrt{\ln n} + m_1. \end{aligned}$$

因为 G 无孤立点, $m \geq n/2$, 且 (3.4) 成立, 所以, 当 n 充分大时,

$$10m^{\frac{4}{5}}\sqrt{\ln n} + m_1 < \epsilon m^{\frac{5}{6}}.$$

所以, (3.2) 成立. 从而完成了定理 1.4 的证明. $\square$

致谢 感谢审稿人的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Karp R M. Reducibility among combinatorial problems. In: Complexity of Computer Computations. New York: Plenum Press, 1972, 85–103
- 2 Bollobás B, Scott A. Better bounds for max cut. Contemp Combin, 2002, 10: 185–246
- 3 Poljak S, Tuza Z. Maximum cuts and large bipartite subgraphs. DIMACS Ser Discrete Math Theoret Comput Sci, 1995, 20: 181–244
- 4 Shahrokhi F, Székely L A. The complexity of the bottleneck graph bipartition problem. J Combin Math Combin Comput, 1994, 15: 221–226
- 5 Bollobás B, Scott A. Exact bounds for judicious partitions of graphs. Combinatorica, 1999, 19: 473–486
- 6 Xu B, Yu X. Better bounds for k -partitions of graphs. Combin Probab Comput, 2011, 20: 631–640
- 7 Bollobás B, Scott A. Problems and results on judicious partitions. Random Structures Algorithms, 2002, 21: 414–430
- 8 Fan G, Hou J, Zeng Q. A bound for judicious k -partitions of graphs. Discrete Appl Math, 2014, 179: 86–99
- 9 Hou J, Zeng Q. Judicious partitioning of hypergraphs with edges of size at most 2. Combin Probab Comput, 2017, 26: 267–284
- 10 Lee C, Loh P S, Sudakov B. Bisections of graphs. J Combin Theory Ser B, 2013, 103: 599–629
- 11 Liu M, Xu B. On judicious partitions of graphs. J Comb Optim, 2016, 31: 1383–1398
- 12 Xu B, Yu X. Judicious k -partitions of graphs. J Combin Theory Ser B, 2009, 99: 324–337
- 13 Xu B, Yu X. On judicious bisections of graphs. J Combin Theory Ser B, 2014, 106: 30–69
- 14 Xu B. Graph partitions: Recent progresses and some open problems. Adv Math, 2016, 45: 1–20
- 15 Ma J, Yu X. Bounds for pairs in partitions of graphs. Discrete Math, 2010, 310: 2069–2081
- 16 Fan G, Hou J. Bounds for pairs in judicious partitioning of graphs. Random Structures Algorithms, 2017, 50: 59–70
- 17 Bollobás B, Scott A. Judicious partitions of hypergraphs. J Combin Theory Ser A, 1997, 78: 15–31
- 18 Hou J, Wu S, Zeng Q, et al. The Bollobás-Scott conjecture for 4-uniform hypergraphs. SIAM J Discrete Math, 2018, 32: 505–521
- 19 Hou J, Wu S, Yan G. On judicious partitions of uniform hypergraphs. J Combin Theory Ser A, 2016, 141: 16–32
- 20 Wu S, Hou J. Partitioning dense uniform hypergraphs. J Comb Optim, 2018, 35: 48–63
- 21 Bollobás B, Scott A. Judicious partitions of 3-uniform hypergraphs. European J Combin, 2000, 21: 289–300
- 22 Chung F, Lu L. Connected components in random graphs with given expected degree sequences. Ann Comb, 2002, 6: 125–145

- 23 Azuma K. Weighted sums of certain dependent random variables. *Tohoku Math J* (2), 1967, 19: 357–367
- 24 Hoeffding W. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J Amer Statist Assoc*, 1963, 58: 13–30
- 25 Ma J, Yen P, Yu X. On several partitioning problems of Bollobás and Scott. *J Combin Theory Ser B*, 2010, 100: 631–649

Bounds for l -tuples in judicious partition of hypergraphs and graphs

Jing Jin & Baogang Xu

Abstract For a subset S of vertex set of a graph (or a hypergraph), $e(S)$ denotes the number of edges with all their ends in S . Fan and Hou (2017) proved that every graph G with m edges and maximum degree Δ admits a k -partition $(V_1, V_2, \dots, V_k)$ such that $e(V_i \cup V_j) \leq \min\{\frac{4}{k^2}m + \frac{4\Delta}{k}, \frac{m}{k-1}\} + o(m^{\frac{7}{8}})$ for each pair of $1 \leq i < j \leq k$. Let H be an r -uniform hypergraph with m edges and maximum degree Δ . In this paper, we show that H admits a k -partition $(V_1, \dots, V_k)$ such that $e(V_i \cup V_j) \leq \frac{r-1}{k-1}m + o(m)$ for each pair of $1 \leq i < j \leq k$, and show that if $\Delta = o(m)$ then H admits a k -partition $(V_1, \dots, V_k)$ such that $e(V_{j_1} \cup \dots \cup V_{j_l}) \leq \frac{l^r}{k^r}m + o(m)$ for each l -tuple $(V_{j_1}, \dots, V_{j_l})$ with $1 \leq l \leq k-1$, and $d(V_i) \geq (1 + o(1))(1 - (1 - \frac{1}{k})^r)m$ for each $i \in [k]$.

Keywords judicious partition, uniform hypergraph, simple graph

MSC(2010) 05C65, 05C70

doi: 10.1360/SCM-2017-0605