面向工程约束的小推力转移轨道设计与优化

王旭生^{1,2*}, 彭玉明^{1,2}, 陆希^{1,2}, 施伟璜^{1,2}, 张伟¹, 孟光^{1,3}

1. 上海卫星工程研究所, 上海 201109;

2. 上海市深空探测技术重点实验室, 上海 201109;

3. 上海交通大学机械与动力工程学院, 上海 200240

*联系人, E-mail: deepspace509@126.com

收稿日期: 2019-04-04; 接受日期: 2019-05-10; 网络出版日期: 2019-05-31

科工局民用航天“十三五”技术预先研究项目(编号: D030102)和上海市科委科研项目(编号: 18DZ2272300)资助项目

摘要 针对深空探测任务中电推进系统需要设置多个工作点、推力分级输出的需求, 研究多模式电推进约束下的小行星探测转移轨道优化设计问题, 分析推力分档对转移轨道的影响, 建立小推力转移轨道动力学模型和优化模型; 提出一种基于直接法的轨道优化策略, 包括优化模型离散化、初值生成、序列二次规划(SQP)算法进行局部优化, 并引入粒子群(PSO)算法搭配SQP算法提高初值的搜索效率和解的全局最优性; 通过一次火星借力交会颶神星(1974 QU2)为例进行仿真分析. 结果表明, 所提优化策略能够有效解决多模式约束下的小推力转移轨道优化设计问题, 具有良好的收敛性, 在工作功率区间内, 增加推力档数能够提高能源利用率, 降低燃料消耗量, 缩短推力器的开机时间, 同时在工作功率区间内应避免无效的分档.

关键词 多模式电推进, 小行星探测, 轨道优化, 粒子群, 序列二次规划

PACS: 96.35.-j, 07.05.Dz, 45.10.Db

1 引言

小行星探测是目前国内外航天活动的重点和热点^[1,2], 我国已将包括小行星探测在内的多次任务纳入国家深空探测重大科技专项. 由于复杂遥远的小行星探测任务能量需求大, 传统低比冲的化学推进系统已不适用, 高比冲、长寿命、高可靠的电推进系统成为工程实施的优选动力形式^[3].

电推进对应的小推力轨道设计是小行星探测任务的关键技术之一. 与传统脉冲轨道只需要设计有限个

脉冲参数不同, 小推力轨道需要设计开关机次数、开关机时刻、开机过程中的推力方向变化. 因此, 小推力作用下的深空转移轨道优化本质上是一个最优控制问题, 求解方法目前最常用的有直接法和间接法^[4]. 直接法的根本思想是通过离散将原来的连续动态过程优化问题转化为离散静态参数优化问题. Hargraves和Paris^[5]提出了同时将控制变量和状态变量离散的配点法, Betts^[6]提出的直接转译法以及Fahroo和Ross^[7]提出的伪谱法都是一种特殊的配点法, Herman^[8]利用配点法计算了地月转移轨道. 间接法的根本思想是基于变

引用格式: 王旭生, 彭玉明, 陆希, 等. 面向工程约束的小推力转移轨道设计与优化. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 084509

Wang X S, Peng Y M, Lu X, et al. Design and optimization of low thrust transfer trajectory for engineering constraints (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2019, 49: 084509, doi: [10.1360/SSPMA-2019-0104](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0104)

分法和极大值原理, 将最优控制问题转化为两点边值问题. Jiang等人^[9]提出了协态归一化技术, 提高了协态变量的初值猜测效率. 郭铁丁^[10]系统地给出了多次借力小推力轨迹的间接解法, 设计了地木借力交会天王星小推力轨迹. Yang等人^[11]结合PSO算法和间接法研究了多次借力多目标小行星探测的小推力转移轨道设计与优化. 近年来, 基于数值延拓思想的同伦方法表现出很好的性能, Bertrand和Epenoy^[12]在这方面做出了代表性成果. Chi等人^[13]采用同伦方法研究了变比冲小推力转移轨道的优化方法.

但是以上研究尚有两点不足: 第一, 实际工程应用中为了适应不同日器距离下太阳帆板输出功率的变化, 通常会采用多模式电推进系统, 存在推力分档输出、不连续可变的约束, 然而以上研究都假设推力连续可变, 与实际不符; 第二, 不论直接法还是间接法都不可避免需要提供初值, 目前要想获得合适的初值还存在较多人为干预的成分, 效率极低.

针对以上两点不足, 本文提出一种多模式电推进约束下的小行星探测转移轨道优化策略, 包括3个核心步骤: 首先, 基于直接法的离散思想将原本的最优控制问题转化为离散非线性规划形式的参数优化问题; 其次, 快速生成待优化变量的初值, 并引入PSO算法提高搜索效率同时保证初值的全局性能; 最后, 基于初值采用序列二次规划算法(Sequential Quadratic Programming, SQP)进行局部优化. 最后以一次火星借力交会主带小行星颖神星为例, 以燃料最省为优化指标, 对所提优化策略的有效性进行验证, 同时分析多模式特性对轨道的影响.

2 小推力转移轨道优化模型建立

2.1 小推力转移轨道动力学模型

在日心黄道惯性坐标系下, 探测器典型的二体动力学方程为^[14]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{U}}{m} + \mathbf{f}, \\ \dot{m} = -\frac{\|\mathbf{U}\|}{I_{sp}g_0}, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{v}$ 为探测器的位置和速度矢量; $\mathbf{U}$ 是发动机的推力矢量; m 是航天器的瞬时质量; I_{sp} 为发动机比冲; $\mathbf{f}$

为除发动机推力加速度之外的摄动加速度; g_0 为海平面重力加速度. 动力学方程式中 $\mathbf{U}=[F_x, F_y, F_z]$ 是控制变量, $\mathbf{r}, \mathbf{v}, m$ 为状态变量, 记为 $\mathbf{X}=[\mathbf{r}, \mathbf{v}, m]$. 式(1)也可写成如下紧凑形式:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t), \quad t_0 \leq t \leq t_f. \quad (2)$$

对于借力飞行, 探测器在借力行星引力影响球内的飞行时间相对于整个任务的飞行时间可以忽略不计, 因此可以将借力过程视为对探测器施加脉冲. 在借力时刻, 探测器与借力行星重合; 探测器相对借力行星的双曲线超速度大小不变, 方向偏转一定角度. 给定进入双曲线超速度 $\mathbf{v}_\infty^-$ 和借力高度 h , 则可通过下式求解借力后探测器的速度^[15]:

$$\delta = 2\sin^{-1} \frac{\mu_{pl}}{\mu_{pl} + (h + r_p)v_\infty^2}, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_\infty^+ = v_\infty^-[(\sin\delta\cos\psi)\mathbf{k} + (\sin\delta\sin\psi)\mathbf{j} + (\cos\delta)\mathbf{i}], \quad (4)$$

其中, $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 满足

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{v}_\infty^-}{v_\infty^-}, \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{i}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}, \quad (5)$$

δ 为双曲线超速转过角度, h 为借力高度, r_p 为借力行星半径, μ_{pl} 为借力行星的引力常数. ψ 是反映借力飞行轨道的角度参数, 取值范围为 $[0, 2\pi)$.

2.2 小推力转移轨道优化问题描述

为了提高科学效益和节约任务成本, 小推力转移轨道优化一般以飞行时间最短或者燃料最省作为评价指标. 本文以燃料最省为优化指标, 指标函数为

$$J = -\int_{t_0}^{t_f} \dot{m} dt. \quad (6)$$

待优化变量为地球发射时间 t_d 、交会目标小行星时间 t_a 、探测器相对地球的发射速度 $\mathbf{v}(t_d)$ 、转移过程中的推力变化 $\mathbf{U}(t)$. 对于包含借力飞行的情形, 还包括借力时刻 t_{hy} , 借力高度 h 、借力角度参数 ψ .

本文主要考虑的工程约束有: 探测器可提供功率随日器距离变化的约束、电推进系统推力随功率变化分档输出的约束、借力高度存在安全阈值的约束、任务总时间约束和运载能力约束. 除工程约束外, 还需满足由优化模型带来的理论匹配约束. 待设计变量需要满足的约束有以下几个方面.

(1) 发射C3约束: 发射C3由运载保证, 要求不大于 $C3_{\max}$

$$\|\mathbf{v}(t_d) - \mathbf{v}_E(t_d)\|^2 - C3_{\max} \leq 0. \quad (7)$$

(2) 飞行时间约束: 限制总飞行时间在TOF天以内

$$t_a - t_d - \text{TOF} \leq 0. \quad (8)$$

(3) 初末状态约束: 探测器发射时刻与地球位置相同, 到达时刻与目标小行星具有相同的位置和速度. 发射时刻质量为整星质量, 末端质量自由

$$\mathbf{r}(t_d) - \mathbf{r}_{\text{Earth}}(t_d) = 0, \quad m(t_d) - m_0 = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{r}(t_a) - \mathbf{r}_{\text{asteroid}}(t_a) = 0, \quad \mathbf{v}(t_a) - \mathbf{v}_{\text{asteroid}}(t_a) = 0. \quad (10)$$

(4) 动力学方程约束: 探测器任意时刻状态应满足式(2).

(5) 推力约束: 探测器在*t*时刻推力大小应不大于此时推力器所能提供的最大推力 $F_{\max}(t)$

$$\|U(t)\| - F_{\max}(t) \leq 0. \quad (11)$$

最大 $F_{\max}$ 与日器距离 r 、比冲 I_{sp} 、推力器工作效率 η 有关, 可通过下式计算得到

$$\begin{cases} P = \frac{P_0}{r^2}, \\ F_{\max} = \frac{2\eta P}{g I_{\text{sp}}}, \end{cases} \quad (12)$$

其中, P_0 为1 AU(AU为天文单位, 表示日地平均距离, 本文取1 AU=149597870 km)处探测器接收到的总功率, ηP 为实际电池阵提供功率.

对于包含借力飞行的情形, 还应满足以下约束.

(6) 借力高度约束: 借力飞行应满足不小于给定的安全高度 h_{safe} , 且借力时刻应在借力行星引力影响球 $r_{\text{influence}}$ 内

$$h_{\text{safe}} - h_p \leq 0, \quad h_p - r_{\text{influence}} \leq 0. \quad (13)$$

(7) 借力速度约束: 借力瞬时前后探测器相对借力行星速度的大小应相等

$$\|\mathbf{v}_{\infty}^{-}\| - \|\mathbf{v}_{\infty}^{+}\| = 0. \quad (14)$$

至此, 小推力转移轨道优化问题可以描述为求解一组满足式(7)–(14)的最优的待优化变量, 使得性能指标(6)取最小值.

3 小推力转移轨道优化求解策略

对于上述最优控制问题的求解, 本文基于直接法的离散思想将最优控制问题转化为非线性规划(Non-linear Programming, NLP)问题, 然后提出一种基于PSO和SQP的串联混合优化算法求解新的非线性规划问题. 其中, PSO算法搜索脉冲形式的转移轨道, 获得全局近似最优解, 为局部优化提供初值; SQP算法则基于初值输入进行局部精细优化, 获得问题的精确解.

3.1 基于直接法的模型离散化

假设探测器从地球发射时刻为 t_d , 此时地球的日心位置和速度矢量为 $\mathbf{r}_E(t_d)$ 和 $\mathbf{v}_E(t_d)$, 质量为 m_d . 探测器脱离地球引力影响球时的日心速度为 $\mathbf{v}(t_d)$, 忽略地球逃逸段时间, 认为探测器离开地球引力影响球时的位置与地球位置相同. 令探测器到达目标时刻为 t_a , 从 t_d 到 t_a 等时间间隔分为 N 段, 则每段的时间间隔为

$$\delta t = \frac{t_d - t_a}{N}. \quad (15)$$

每段的端点称为节点, 则从地球到目标小行星共有 $N+1$ 个节点, 记为

$$t_i = t_d + i * \delta t, \quad i = 0, \dots, N. \quad (16)$$

令节点 t_i 上的状态变量和控制变量分别为 $\mathbf{X}_i$ 和 $\mathbf{U}_i$, 则由式(2)可求得 $\dot{\mathbf{X}}_i$. 以任意一段 $t \in [t_i, t_{i+1}]$ 为例进行分析, 令

$$S = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad (17)$$

则有 $S \in [0, 1]$. 对状态变量进行三阶Hermite插值, 控制变量采用线性插值. 以 x 代表状态变量的任一分量, 则有

$$x = C_0 + C_1 S + C_2 S^2 + C_3 S^3, \quad (18)$$

$$\dot{x} = C_1 + 2C_2 S + 3C_3 S^2. \quad (19)$$

式(18)和(19)满足 $x(0) = x_i$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_i$, $\dot{x}(1) = \dot{x}_{i+1}$, 易求得

$$\begin{cases} C_0 = x(0), \\ C_1 = \dot{x}(0), \\ C_2 = -3x(0) - 2\dot{x}(0) + 3x(1) - \dot{x}(1), \\ C_3 = 2x(0) + \dot{x}(0) - 2x(1) + \dot{x}(1). \end{cases} \quad (20)$$

任意时间 t 对应的 $x(t)$ 均可代入式(17), (18)和(20)求出, 对于状态变量中的任一分量均可执行上述操作.

离散形式下, 转移过程的总速度增量可表示为

$$\Delta v_{\text{total}} = \sum_{i=1}^N \Delta v_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{U}_i^T \mathbf{U}_i)^{1/2} / m_i * \delta t. \quad (21)$$

综上所述, 离散形式下的待优化变量为 $\mathbf{Z}=\{t_d, t_a, \mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{i+1}, \dots, \mathbf{X}_N, \mathbf{U}_0, \dots, \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, \dots, \mathbf{U}_N\}$, 共 $10N+12$ 个优化变量, 本文以燃料最省为优化指标, 可通过式(21)和齐氏公式换算得出, 且满足速度增量需求与燃料消耗成正比关系, 因此取优化指标为

$$J = \Delta v_{\text{total}}. \quad (22)$$

在有行星借力情况下, 分成借力前和借力后两段考虑. 假设探测器出发时刻为 t_{dep} , 借力时刻为 t_{fly} , 此时借力行星的位置和速度矢量为 $\mathbf{r}_p(t_{\text{fly}}), \mathbf{v}_p(t_{\text{fly}})$. 借力前探测器的瞬时日心速度为 $\mathbf{v}^-(t_{\text{fly}})$, 借力后瞬时日心速度为 $\mathbf{v}^+(t_{\text{fly}})$. 借力后, 探测器于 t_{arr} 时刻飞行至目标小行星轨道并与之交会, 此时小行星的日心位置和速度矢量为 $\mathbf{r}_a(t_{\text{arr}})$ 和 $\mathbf{v}_a(t_{\text{arr}})$. 将 $[t_{\text{dep}}, t_{\text{fly}}]$ 和 $[t_{\text{fly}}, t_{\text{arr}}]$ 时间段等时间间隔分别离散为 N_1 和 N_2 段, 则每段的时间间隔分别为

$$\delta t_1 = \frac{t_{\text{fly}} - t_{\text{dep}}}{N_1}, \quad \delta t_2 = \frac{t_{\text{arr}} - t_{\text{fly}}}{N_2}. \quad (23)$$

从出发到交会共有 N_1+N_2+1 个节点, 记为

$$\begin{cases} t_j = t_{\text{dep}} + j * \delta t_1, & j = 0, \dots, N_1, \\ t_k = t_{\text{fly}} + k * \delta t_2, & k = N_1, \dots, N_1 + N_2. \end{cases} \quad (24)$$

其余插值近似的推导过程与无借力情形相同. 离散形式下, 整个转移过程的总速度增量可表示为

$$\begin{cases} \Delta v_{1\text{total}} = \sum_{j=1}^{N_1} \Delta v_j = \sum_{j=1}^{N_1} (\mathbf{U}_j^T \mathbf{U}_j)^{1/2} / m_j * \delta t_1, \\ \Delta v_{2\text{total}} = \sum_{k=N_1+1}^{N_1+N_2} \Delta v_k = \sum_{k=N_1+1}^{N_1+N_2} (\mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k)^{1/2} / m_k * \delta t_2, \end{cases} \quad (25)$$

其中, 离散形式下的待优化变量为 $\{t_{\text{dep}}, t_{\text{fly}}, t_{\text{arr}}, \mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_{N_1}, \dots, \mathbf{X}_{N_1+N_2}, \mathbf{U}_0, \dots, \mathbf{U}_{N_1}, \dots, \mathbf{U}_{N_1+N_2}\}$, 共 $10(N_1+N_2)+13$ 个优化变量. 同理优化指标为

$$J = \Delta v_{1\text{total}} + \Delta v_{2\text{total}}. \quad (26)$$

离散形式下推力约束和动力学方程约束的表达形式发生了变化. 对于推力约束, 离散形式的表达为

$$\|\mathbf{U}^{j,k}\| - F_{\text{max}}^{j,k} \leq 0, \quad j = 0, \dots, N_1, \quad k = N_1, \dots, N_1 + N_2. \quad (27)$$

对于动力学约束, 离散形式下一般选取某一点作为强制匹配点, 构建残差方程替代原微分方程. 本文选取各节点的中点作为强制匹配点, 将 $S=0.5$ 分别代入式(18)和(19)可得

$$x_{0.5} = \frac{(x_0 + x_1)}{2} - \delta t \frac{(\dot{x}_0 + \dot{x}_1)}{8}, \quad (28)$$

$$\dot{x}_{0.5} = -3 \frac{x_1 - x_0}{2\delta t} - \frac{\dot{x}_0 + \dot{x}_1}{4}. \quad (29)$$

将式(28)代入式(2)可得 $f_{0.5}$, 则有

$$f_{0.5} - \dot{x}_{0.5} = 0. \quad (30)$$

3.2 初值生成

初值直接影响问题最终解的性能优劣, 初值的生成需要更多地考虑两点: 第一, 提高搜索效率, 需要对原问题进行一定的简化以减小计算量, 同时采用高效的搜索策略; 第二, 保证全局性能, 小推力转移轨道有多个局部最优解, 初值应尽量保证落在全局最优解附近.

PSO算法具有全局优化和并行计算的能力, 相比于经典的基于梯度的优化算法具有更好的全局收敛性^[16], 能很好地适应以上两点需求. 传统的PSO算法仍有较大概率出现早熟现象以致收敛于局部最优解, 为此, 本文通过线性减少惯性权重系数和局部学习因子, 增大全局学习因子的方法, 使得算法在初期具备较强的探索能力, 而在后期又有较好的收敛性使其在最优解附近精细搜索. 本文以脉冲轨道数据作为初值, 初值生成过程如下:

步骤1: 初始化粒子群位置 p 和速度 v , 粒子位置信息包含脉冲作用时刻和脉冲作用矢量;

步骤2: 对每个粒子用构造的位置函数Fitness进行评价, 本文以总速度增量为评价指标;

步骤3: 更新每个粒子的历史最优位置 p_b 和群体的全局最优位置 g_b ;

步骤4: 分别按照式(31)和(32)更新每个粒子的速度和位置;

$$v_{i+1} = w * v_i + c_1 * \text{rand}() * (p_b - p) + c_2 * \text{rand}() * (g_b - p_b), \quad (31)$$

$$p_{i+1} = p_i + v_{i+1}, \quad (32)$$

式中, w 为粒子的惯性权重系数, c_1 为局部学习因子, c_2 为全局学习因子, $\text{rand}()$ 表示 0–1 之间的随机数, 同时设置粒子学习速度在 $[-v_{\max}, v_{\max}]$ 内, 如果更新后的速度超出边界则取相应的边界值. w, c_1, c_2 按如下公式更新:

$$w = w_{\max} - \frac{c}{c_{\max}}(w_{\max} - w_{\min}), \quad (33)$$

$$c_1 = -(c_{1\max} - c_{1\min})\frac{c}{c_{\max}} + c_{1\max}, \quad (34)$$

$$c_2 = (c_{2\max} - c_{2\min})\frac{c}{c_{\max}} + c_{2\min}, \quad (35)$$

此处 c 代表运行代数, $c_{\max}$ 代表最大运行代数;

步骤5: 循环执行 2–4 步直到最大运行代数, 输出结果;

步骤6: 生成初值 $\{t_d, t_a, X_0, \dots, X_N, U_0, \dots, U_N\}_0$. 其中, $\{t_d, t_a\}$ 和 $\{X_0, \dots, X_N\}$ 中的位置和速度分量可以直接从结果中生成, 质量可基于其消耗特性按等差递减生成; $\{U_0, \dots, U_N\}_0$ 可在 $[0, F_{\max}]$ 内随机猜测. 为避免随机性对结果带来的影响, 本文一律取 $U_{i0} = F_{\max}[0.5, 0.5, 0.5]$.

算法相关参数设置如表 1 所示.

3.3 序列二次规划算法

SQP 算法是求解 NLP 问题的一种有效算法^[17], 但是由于 SQP 算法是基于可行方向搜索的一种约束优化方法, 因此只具有局部优化能力, 通过与 PSO 算法结合, 组成混合优化算法, 可以充分发挥二者的优势. 算法主要流程如下:

步骤1: 给定 PSO 算法搜索后生成的初值 Z_0 , 选定正定矩阵 H_0 ;

步骤2: 解二次规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & d^T \nabla \text{obj}(Z_k) + \frac{1}{2} d^T H_k d, \\ \text{s. t.} \quad & \text{con}(Z_k) + d^T \nabla \text{con}(Z_k) \leq 0, \end{aligned} \quad (36)$$

其中, obj 为目标函数, con 为约束, d_k 为搜索方向, 当 $\|d_k\| < 10^{-6}$ 时迭代结束;

步骤3: 更新 $Z_{k+1} = Z_k + \alpha_k d_k$, 其中 α_k 通过线性搜索确定;

步骤4: 修正 H_k , 使 H_{k+1} 保持正定;

步骤5: 判断是否满足迭代终止条件, 若迭代次数超过 2000 次或者 $\|d_k\| < 10^{-6}$ 时迭代结束, 若不满足重复步骤 2–4.

目前市场上已有成熟的基于 SQP 算法的工具箱, 比如 SNOPT^[17], Fmincon 函数^[18]等. 本文采用了 Fmincon 函数.

完整优化流程如图 1 所示.

4 仿真分析

假设探测器发射质量为 1500 kg, 1 AU 处探测器可提供的功率为 10 kW, 探测器平台运行功耗 250 W, 推力器比冲恒定为 3500 s, 工作功率 2000–4000 W 之间. 最小借力高度 500 km, 飞行时间最大 2000 d. 以一次火星借力交会探测第 9 号主带小行星颖神星 (1974 QU2) 为例, 验证上述优化策略的有效性, 同时分析多模式特性对轨道的影响, 发射窗口在 2021–2023 年之间搜索. 颖神星轨道参数如表 2 所示.

表 1 粒子群算法参数

Table 1 Parameters of PSO Algorithm

参数	数值
粒子个数 n	40
迭代次数 $c_{\max}$	2000
运行次数	5
惯性权重上限 $w_{\max}$	0.9
惯性权重下限 $w_{\min}$	0.4
局部学习因子上限 $c_{1\max}$	2.5
局部学习因子下限 $c_{1\min}$	0.5
全局学习因子上限 $c_{2\max}$	2.5
全局学习因子下限 $c_{2\min}$	0.5
最大学习速度 $v_{\max}$	0.8

图 1 (网络版彩图) 优化流程

Figure 1 (Color online) The procedure of optimization.

表 2 颖神星轨道参数(MJD=58000.0)**Table 2** Orbit parameters of metis (MJD=58000.0)

参数	数值
半长轴 (AU)	2.3863
偏心率	0.1220
轨道倾角 (°)	5.5743
平近点角 (°)	68.9317
升交点黄经 (°)	74.9285
近日点幅角 (°)	265.8840

将“地球-火星”转移段离散为50个轨道段,“火星-颖神星”转移段离散为100个轨道段.不同推力分档工况下的优化结果如表3所示.从表中可以看出:(1)在工作功率范围内,设置更多的工作档位,能够明显降低总速度增量需求和燃料消耗量,同时缩短开机时间;(2)在本文给定的推力器参数下,各种工况下的飞行时间均达到了上限,因此在2000 d内完成颖神星交会任务还需提高推力器性能或者放宽飞行时间上限.

各种工况下所得结果的功率变化过程如图2所示.从图2中可以看出.

(1)采用本文的优化策略得到的结果,能够较为清晰地看出电推进系统的开关机时刻以及推力档位切换时刻.对比表3中的结果可以发现,在工作功率区间内,增加推力分档的精细程度,可以提高能源的利用率,使之更贴近电池阵所能提供的功率上限,从而缩短转移过程中的开机时间,同时,在非工作功率区间内应避免无效的分档.

(2)从电推进系统的工作过程可以看出,所得结果符合理论推导的小推力转移轨道最优控制形式bang-bang控制^[4],从而验证了本文优化策略的有效性.在考虑功率约束和推力分档约束时,最优控制形式表现为在任意时刻推力器或者以电推进系统所能提供的最大推力开机,或者关机.

(3)对于推力分2档和3档工作情形,存在4个推进段,其中火星借力前1个,火星借力后3个,主要开机时间在借力完成后.对于推力分5档和11档工作情形,存在3个推进段,全都在借力完成后.由此可见,对于小行星探测任务,应更多地在日器距离遥远电池阵功率较小时,保障电推进系统长时间稳定工作.

下面针对燃料消耗量最小的11档工作模式的转移过程对转移轨道的特性进行分析.11档工作模式下的燃料最优转移轨道如图3所示,相关具体参数如表4所示.

从图3和表4中可以看出,探测器在空间中转移相位角超过360°,用于探测器主推进的燃料消耗质量占总质量比15.38%.以日心黄道惯性坐标系下的黄经黄纬表示推力方向,转移过程中的推力变化过程如图4所示.从图4中可以看出,11档工作模式下优化所得轨道推力矢量的黄经在-180°-177°之间变化,黄纬在-58°-33°之间变化.借力后的推力器工作序列为“滑-推-滑-推-滑-推-滑”,三个推进段中,开机时间依次为84, 550, 484 d.

探测器飞行过程部分参数如图5所示.从图5可以看出:(1)探测器的日心距在1.01-2.24 AU之间、日心

表 3 不同推力分档工况下的优化结果**Table 3** Optimization results under different thrust grading conditions

工作档数	分档工况	总速度增量 (km/s)	燃料消耗量 (kg)	开机时间 (d)	飞行时间 (d)
2档	$P \geq 4000$ W, 133 m N 2000 W $\leq P \leq 4000$ W, 67 m N	6.4896	258.5700	1496	2000
3档	$P \geq 4000$ W, 133 m N 3000 W $\leq P < 4000$ W, 100 m N 2000 W $\leq P < 3000$ W, 67 m N	6.1108	244.7840	1321	2000
5档	$P \geq 4000$ W, 133 m N 推力随着功率的变化线性减小 每相差500 W为一档 $P < 2000$ W不工作	5.8380	234.7610	1201	2000
11档	$P \geq 4000$ W, 133 m N 推力随着功率的变化线性减小 每相差200 W为一档 $P < 2000$ W不工作	5.7297	230.7598	1118	2000

图 2 (网络版彩图)不同推力分档工况的功率变化过程. (a) 2档; (b) 3档; (c) 5档; (d) 11档

Figure 2 (Color online) Power change process under different thrust grading conditions. (a) 2 grades; (b) 3 grades; (c) 5 grades; (d) 11 grades.

图 3 (网络版彩图)11档工况时的最优转移轨道

Figure 3 (Color online) Optimal transfer trajectory of 11 grading condition.

表 4 11 档工况时的轨道参数

Table 4 Orbit parameters of 11 grading condition

描述量	结果
地球出发时刻 (YY.MM.DD)	2022.08.22
地球出发C3 (km^2/s^2)	17.0057
火星借力时刻 (YY.MM.DD)	2023.07.20
火星借力高度 (km)	500
借力提供速度增量 (km/s)	3.1911
颖神星到达时刻 (YY.MM.DD)	2028.02.12
总飞行时间 (d)	2000
总速度增量需求 (km/s)	5.7297
总燃料消耗 (kg)	230.7610

图 4 (网络版彩图)推力矢量变化过程. (a) 推力幅值; (b) 推力黄经; (c) 推力黄纬

Figure 4 (Color online) Change of thrust vector. (a) Thrust amplitude; (b) thrust longitude; (c) thrust latitude.

速度在19.97–33.22 km/s之间变化; (2) 通过借力, 提高了探测器的日心轨道半长轴, 降低了其偏心率和轨道

图 5 (网络版彩图)飞行过程. (a) 日器距离; (b) 日心速度; (c) 半长轴; (d) 偏心率; (e) 轨道倾角

Figure 5 (Color online) Flight process. (a) Heliocentric distance; (b) heliocentric velocity; (c) semimajor axis; (d) eccentricity; (e) inclination.

倾角; (3) 通过电推进系统三次开机工作, 逐渐提高探测器的轨道倾角, 在第一个推进段, 半长轴稍有减小,

之后逐渐增大; (4) 偏心率的变化比较复杂, 第一个推进段使偏心率减小, 在后两个推进段偏心率的变化都是先减小后增大.

至此, 完成了一次火星借力交会颶神星任务转移轨道的设计. 通过仿真分析可以看出, 采用本文的优化策略能够得到满足考虑多模式电推进约束的小行星探测转移轨道, 且所提出的混合优化算法对初值敏感性低, 具有良好的收敛性. 基于多模式电推进系统的转移轨道最优推力曲线总体上依然符合理论推导的 Bang-Bang 控制形式, 推力器在任意时刻只存在两种状态: 或者关机, 或者以该时刻所能提供的最大推力开机工作. 合理的推力分档能够减小总速度增量需求, 降低燃料消耗量, 缩短推力器开机时间.

5 结论

针对多模式电推进系统需要设置多个工作点的工

程需求, 以及由此带来的推力分档输出、不连续可变的约束, 提出了基于多模式电推进系统的小行星探测转移轨道优化策略, 分析了推力分档特性对轨道的影响. 首先基于直接法将最优控制问题离散化, 转化为非线性规划问题, 然后采用 PSO-SQP 串联混合优化算法进行求解. 其中, PSO 算法在全局范围内随机搜索, 能快速定位到全局最优解附近, 为局部优化提供初值; SQP 算法基于初值进行局部精细优化, 最终得到满足所有约束的轨道. 经过仿真验证, 本文提出的基于直接法、PSO+SQP 混合优化算法的策略能够有效解决基于多模式电推进系统的小推力转移轨道优化设计问题, 具有良好的收敛性. 在工作功率区间内, 提高推力分档的精细程度带来的效益是可观的; 在非工作功率区间内, 应避免无效的分档. 本文的研究成果能为我国未来小行星探测任务的工程实施提供有益参考. 由于解的精度受限于离散程度, 因此开关机时刻无法准确获知, 解的精度还有待于进一步提升.

参考文献

- 1 Rayman M D, Williams S N. Design of the first interplanetary solar electric propulsion mission. *J Spacecraft Rockets*, 2002, 39: 589–595
- 2 Watanabe S, Tsuda Y, Yoshikawa M, et al. Hayabusa2 mission overview. *Space Sci Rev*, 2017, 208: 3–16
- 3 Sun X J, Zhang X M, Tian L C. Scheme design of electric propulsion system for asteroid sample and return mission (in Chinese). *Vacuum*, 2018, 1: 40–45 [孙小菁, 张兴民, 田立成. 小行星探测及采样返回任务电推进系统方案设计. *真空*, 2018, 1: 40–45]
- 4 Zhu Z F, Gao Y. Survey of two classes of continuation methods for solving optimal Bang-Bang control of low-thrust space trajectories (in Chinese). *J Deep Space Explor*, 2017, 4: 101–110 [朱政帆, 高扬. 空间小推力最优 Bang-Bang 控制的两类延拓解法综述. *深空探测学报*, 2017, 4: 101–110]
- 5 Hargraves C R, Paris S W. Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation. *J Guidance Control Dyn*, 1987, 10: 338–342
- 6 Betts J T. Optimal interplanetary orbit transfers by direct transcription. *J Astronaut Sci*, 1994, 42: 247–268
- 7 Fahroo F, Ross I M. Direct trajectory optimization by a Chebyshev pseudospectral method. *J Guidance Control Dyn*, 2002, 25: 160–166
- 8 Herman A L, Conway B A. Direct optimization using collocation based on high-order Gauss-Lobatto quadrature rules. *J Guidance Control Dyn*, 1996, 19: 592–599
- 9 Jiang F, Baoyin H, Li J. Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach. *J Guidance Control Dyn*, 2012, 35: 245–258
- 10 Guo T D. Study of indirect and pseudospectral methods for low thrust trajectory optimization in deep space exploration (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Beijing: Tsinghua University, 2012. 50–53 [郭铁丁. 深空探测小推力轨迹优化的间接法与伪谱法研究. 博士学位论文. 北京: 清华大学, 2012. 50–53]
- 11 Yang H, Li J, Baoyin H. Low-cost transfer between asteroids with distant orbits using multiple gravity assists. *Adv Space Res*, 2015, 56: 837–847
- 12 Bertrand R, Epenoy R. New smoothing techniques for solving bang-bang optimal control problems—Numerical results and statistical interpretation. *Optim Control Appl Meth*, 2002, 23: 171–197
- 13 Chi Z, Yang H, Chen S, et al. Homotopy method for optimization of variable-specific-impulse low-thrust trajectories. *Astrophys Space Sci*, 2017, 362: 216

- 14 Ren Y. Design and optimization of low-thrust interplanetary transfer trajectory (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2007. 19–20 [任远. 星际探测中的小推力转移轨道设计与优化方法研究. 博士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007. 19–20]
- 15 Zhao Z H, Shang H B, Cui P Y. Low thrust gravity assist transfer trajectory design and optimization based on hybrid optimization method (in Chinese). In: Control Theory Committee of China Automation Society Volume C. Beijing, 2011. 1910–1914 [赵遵辉, 尚海滨, 崔平远. 基于混合优化方法的小推力借力转移轨道设计与优化. 见: 中国自动化学会控制理论专业委员会C卷. 北京, 2011. 1910–1914]
- 16 Zhou Z Y, Tan T L. Optimization for asteroids spacecraft trajectory (in Chinese). Aerosp Shanghai, 2014, 31: 57–64 [周誌元, 谭天乐. 小行星探测器轨迹优化方法. 上海航天, 2014, 31: 57–64]
- 17 Gill P E, Murray W, Saunders M A. SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization. [SIAM Rev](#), 2005, 47: 99–131
- 18 Xie C Q, Zhang Y C H. Optimal control problems for the low-thrust orbit. In: Proceedings of the 2016 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference. 2016. 2684–2689

Design and optimization of low thrust transfer trajectory for engineering constraints

WANG XuSheng^{1,2*}, PENG YuMing^{1,2}, LU Xi^{1,2}, SHI WeiHuang^{1,2},
ZHANG Wei¹ & MENG Guang^{1,3}

¹ Shanghai Institute of Satellite Engineering, Shanghai 201109, China;

² Shanghai Key Laboratory of Deep Space Exploration Technology, Shanghai 201109, China;

³ School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China

Multimode electric propulsion system is widely used in deep space exploration. Its thrust is output in stages with the change of input power, which also means that continuous power changes lead to discontinuous thrust changes. In the design and optimization of low-thrust trajectory, the discontinuity of thrust is often neglected and regarded as a continuous parameter. The optimal design of low-thrust transfer trajectory constrained by multimode electric propulsion is studied, and the influence of thrust grading characteristics on the trajectory is analyzed in this paper. A specific optimization strategy is proposed, including three main steps: model discretization based on direct method, fast generation of initial value based on particle swarm optimization (PSO), and optimization based on sequential quadratic programming (SQP). The dynamic model and optimization model of low-thrust transfer trajectory is established. Then, the optimization model is discretized based on the direct method and the original optimal control problem is transformed into a parameter optimization problem in the form of nonlinear programming (NLP). A hybrid optimization algorithm based on PSO and SQP is proposed to solve the new NLP problem. PSO is used to search the initial value efficiently and guarantee the global performance of the initial value and SQP is used for local optimization based on initial value, which can give full play to the excellent global optimization performance of PSO and the outstanding local optimization performance of SQP. The effectiveness of the proposed optimization strategy is verified by a simulation example of the main belt asteroid Metis (1974 QU2) rendezvous mission with once Mars gravity assist. The results show that the optimal control curve obtained is in accordance with the optimal control form of bang-bang control derived from the theory, and the thruster has just two situations at any time: shutdown or startup with maximum thrust. In the working power range, increasing the number of thrust stages can improve the rate of energy utilization, thereby improving the efficiency of thruster, shortening the startup time and reducing fuel consumption. Meanwhile, ineffective grading should be avoided in the non-working power range.

multimode electric propulsion, asteroid exploration, trajectory optimization, particle swarm, sequential quadratic programming

PACS: 96.35.-j, 07.05.Dz, 45.10.Db

doi: [10.1360/SSPMA-2019-0104](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0104)