上临界超过程的一类强极限的性质

献给王梓坤教授 90 华诞

任艳霞¹, 宋仁明^{2,3}, 张蕊^{4*}

1. 北京大学数学科学学院, 北京 100871;

2. Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, IL 61801, USA;

3. 南开大学数学科学学院, 天津 300071;

4. 首都师范大学数学科学学院, 北京 100048

E-mail: yxren@math.pku.edu.cn, rsong@illinois.edu, zhangrui27@cnu.edu.cn

收稿日期: 2018-03-02; 接受日期: 2018-06-20; 网络出版日期: 2019-02-22; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671017, 11731009 和 11601354)、Simons Foundation (批准号: 429343) 和首都师范大学青年科研创新团队资助项目

摘要 假设 $X = \{X_t, t \geq 0; \mathbb{P}_\mu\}$ 是局部紧可分距离空间 E 上的上临界超过程, ϕ_0 是 X 的均值半群的生成元的与第一特征值 λ_0 对应的正特征函数, 则 $M_t := e^{-\lambda_0 t} \langle \phi_0, X_t \rangle$ 是非负鞅. 令 M_∞ 是 M_t 的极限, 则 M_∞ 是非退化的当且仅当 $L \log L$ 条件成立. 当 $L \log L$ 条件不一定成立时, 最近, Ren 等 (2017) 证明了存在定义在 $[0, \infty)$ 上的非负函数 γ_t 及非退化随机变量 W 使得对任意 E 上非零 Borel 有限测度 μ , 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t \langle \phi_0, X_t \rangle = W$, a.s.- $\mathbb{P}_\mu$. 本文主要研究 W 的性质, 证明 W 在 $(0, \infty)$ 上存在严格正的密度函数, 并研究 W 的小值概率问题和尾概率问题.

关键词 超过程 上临界 非退化强极限 绝对连续 小值概率 尾概率

MSC (2010) 主题分类 60J68

1 引言

考虑后代分布为 $\{p_n : n \geq 0\}$ 的上临界 Galton-Watson 过程 $\{Z_n, n \geq 0\}$. Seneta^[1] 在 1968 年证明了存在一组正常数 $\{c_n, n \geq 1\}$ 使得 $c_n Z_n$ 依分布收敛到一个非退化的随机变量 W ; 接着, Heyde^[2] 证明了这个极限是几乎必然成立的. 之后, 寻找 $\{c_n, n \geq 1\}$ 使得 $c_n Z_n$ 收敛到一个非退化的极限问题, 称为 Seneta-Heyde 问题, $\{c_n\}$ 称为规范常数. Harris^[3] 证明了当 $\{p_n : n \geq 0\}$ 的二阶矩存在时, 随机变量 W 的分布函数在 $(0, \infty)$ 上是绝对连续的; Stigum^[4] 证明了当 $\{p_n : n \geq 0\}$ 满足 $L \log L$ 条件时, W 的分布函数在 $(0, \infty)$ 上是绝对连续的; Athreya^[5] 最终证明了这一结论对任意上临界 Galton-Watson 过程都是成立的. 关于 W 的性质, 文献 [6] 讨论了 W 的小值概率问题, 即当 $r \rightarrow 0$ 时, 概率

英文引用格式: Ren Y-X, Song R M, Zhang R. On properties of a class of strong limits for supercritical superprocesses (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 485–504, doi: 10.1360/N012018-00046

$P(0 < W \leq r)$ 趋于 0 的速率; 文献 [7] 给出了当存在 N 使得对所有 $n \geq N$ 和 $p_n = 0$ 时 W 的尾概率问题, 即当 $r \rightarrow \infty$ 时, $P(W > r)$ 趋于 0 的速率.

对于上临界多物种 Galton-Watson 过程, Jones^[8] 给出了对应的小值概率和尾概率的结论. Hering^[9] 证明了上临界分枝 Markov 过程相应的结论. 最近, 我们在文献 [10] 中讨论了上临界超过程的 Seneta-Heyde 类型的极限问题: 假设 $\{X_t, t \geq 0; \mathbb{P}_\mu\}$ 是上临界超过程, 在一定条件下证明了存在定义在 $[0, \infty)$ 上的非负函数 γ_t 和非退化随机变量 W , 使得对任意 E 上非零 Borel 有限测度 μ , 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t \langle \phi_0, X_t \rangle = W, \quad \text{a.s.}-\mathbb{P}_\mu,$$

其中 ϕ_0 是 X 的均值半群的生成元的与第一特征值 λ_0 对应的正特征函数. 本文主要目的是研究 W 在 $(0, \infty)$ 上的绝对连续性, 并研究 W 的小值概率问题和尾概率问题.

1.1 超过程

我们首先介绍本文的框架. 假设 E 是一个局部紧的可分度量空间, ∂ 是一个不包含在 E 内的点. 我们用 E_∂ 表示 $E \cup \{\partial\}$. 设 m 是 E 上的一个 σ -有限的、支撑为全空间的测度. 我们用 $\mathcal{B}(E)$ ($\mathcal{B}^+(E)$) 表示 E 上的 (非负) Borel 可测函数空间, $\mathcal{B}_b(E)$ ($\mathcal{B}_b^+(E)$) 表示 E 上的 (非负) 有界 Borel 可测函数空间, $C(E)$ 表示 E 上的连续函数空间. 假设 $\xi = \{\Omega^0, \mathcal{H}, \mathcal{H}_t, \xi_t, \Pi_x, \zeta\}$ 是 E 上的 Hunt 过程, 其中 $\{\mathcal{H}_t, t \geq 0\}$ 是过程 ξ 的满足通常条件的最小 σ 域流, $\zeta := \inf\{t \geq 0 : \xi_t = \partial\}$ 是其寿命. 我们用 $\{P_t : t \geq 0\}$ 表示 ξ 的半群.

我们要研究的超过程 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ 由两个要素确定: 底过程 $\{\xi_t, t \geq 0\}$ 和分枝机制 φ , 其中 $\{\xi_t, t \geq 0\}$ 是 E 上的 Hunt 过程, 分枝机制 φ 由下式给出:

$$\varphi(x, \lambda) = -\alpha(x)\lambda + \beta(x)\lambda^2 + \int_{(0, +\infty)} (e^{-\lambda r} - 1 + \lambda r)n(x, dr), \quad x \in E, \quad \lambda \geq 0, \quad (1.1)$$

其中 $\alpha \in \mathcal{B}_b(E)$, $\beta \in \mathcal{B}_b^+(E)$ 且 n 是一个从 E 到 $(0, \infty)$ 的核并且满足条件

$$\sup_{x \in E} \int_{(0, +\infty)} (r \wedge r^2)n(x, dr) < \infty. \quad (1.2)$$

由上面假设易知, 存在 $M > 0$ 使得

$$|\alpha(x)| + \beta(x) + \int_{(0, +\infty)} (r \wedge r^2)n(x, dr) \leq M. \quad (1.3)$$

令 $\mathcal{M}_F(E)$ 为 E 上的有限 Borel 测度全体组成的集合, 并赋予弱收敛拓扑. 以 ξ 为底过程、 φ 为分枝机制的超过程 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ 是一个 $\mathcal{M}_F(E)$ -值的 Markov 过程. 这类超过程的存在性是众所周知的, 参见文献 [11, 12]. 对于 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 我们用 $\mathbb{P}_\mu$ 表示初始状态为 μ 的超过程 X 的分布. 对 E 上的函数 f 和测度 μ , 我们采用通常的记号 $\langle f, \mu \rangle := \int_E f(x)\mu(dx)$ 和 $\|\mu\| := \langle 1, \mu \rangle$. 称一个 $[0, \infty) \times E_\partial$ 上定义的实值函数 $u(t, x)$ 为局部有界的, 如果对所有 $t > 0$, 有 $\sup_{s \in [0, t], x \in E_\partial} |u(s, x)| < \infty$. 对 E 上函数 f , 自然延拓定义: $f(\partial) = 0$. 根据文献 [11, 定理 5.12] 可知, 存在一个 $\mathcal{M}_F(E)$ -值的 Hunt 过程 $X = \{\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \mathbb{P}_\mu\}$ 使得对于任意 $f \in \mathcal{B}_b^+(E)$ 和 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 有

$$-\log \mathbb{P}_\mu(e^{-\langle f, X_t \rangle}) = \langle V_t f, \mu \rangle, \quad (1.4)$$

其中 $V_t f(x)$ 是下方程的唯一的非负局部有界解:

$$V_t f(x) + \Pi_x \int_0^t \varphi(\xi_s, V_{t-s} f(\xi_s)) ds = \Pi_x f(\xi_t), \quad x \in E_\partial, \quad (1.5)$$

其中我们用了以下的约定: 对任意的 $\lambda \geq 0$, $\varphi(\partial, \lambda) = 0$. 由于 $f(\partial) = 0$, 对任意的 $t \geq 0$, 有 $V_t f(\partial) = 0$. 本文中处理的超过程都是这个 Hunt 版本.

对任给的 $f \in \mathcal{B}_b(E)$ 和 $(t, x) \in [0, \infty) \times E$, 定义

$$T_t f(x) := \Pi_x [e^{\int_0^t \alpha(\xi_s) ds} f(\xi_t)]. \quad (1.6)$$

熟知, 对任意 $x \in E$, 有 $\mathbb{P}_{\delta_x} \langle f, X_t \rangle = T_t f(x)$.

假设存在一族定义在 $E \times E$ 上连续的严格正的函数 $\{p(t, x, y) : t > 0\}$ 满足

$$P_t f(x) = \int_E p(t, x, y) f(y) m(dy).$$

定义

$$a_t(x) := \int_E p(t, x, y)^2 m(dy), \quad \hat{a}_t(x) := \int_E p(t, y, x)^2 m(dy).$$

我们的第一个假设如下:

假设 1.1 (1) 对于任意的 $t > 0$, 有 $\int_E p(t, x, y) m(dx) \leq 1$;

(2) 对任意的 $t > 0$, 有

$$\int_E \int_E p(t, x, y)^2 m(dy) m(dx) < \infty. \quad (1.7)$$

而且函数 $x \rightarrow a_t(x)$ 和 $x \rightarrow \hat{a}_t(x)$ 都是 E 上的连续函数.

注意, 在假设 1.1 中, 积分是关于第一个空间变量的. 这意味着 $\{P_t : t \geq 0\}$ 关于 m 的对偶半群 $\{\hat{P}_t : t \geq 0\}$ 是次 Markov 的. 根据 Hölder 不等式可得

$$p(t+s, x, y) = \int_E p(t, x, z) p(s, z, y) m(dz) \leq (a_t(x))^{1/2} (\hat{a}_s(y))^{1/2}. \quad (1.8)$$

$\{P_t : t \geq 0\}$ 和 $\{\hat{P}_t : t \geq 0\}$ 都是 $L^2(E, m)$ 上的强连续的压缩半群, 证明参见文献 [13]. 我们用 $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ 表示 $L^2(E, m)$ 中的内积. 由于 $p(t, x, y)$ 关于 (x, y) 连续, 根据 (1.8) 和假设 1.1(2), 利用控制收敛定理, 很容易证明对于任意的 $f \in L^2(E, m)$, $P_t f$ 和 $\hat{P}_t f$ 都是连续的.

根据假设 1.1(2), 对任意的 $t > 0$, P_t 和 $\hat{P}_t$ 都是 $L^2(E, m)$ 上的紧算子. 令 $\tilde{L}$ 和 $\hat{\tilde{L}}$ 分别表示半群 $\{P_t\}$ 和 $\{\hat{P}_t\}$ 在 $L^2(E, m)$ 中的无穷小生成元. 定义 $\tilde{\lambda}_0 := \sup \Re(\sigma(\tilde{L})) = \sup \Re(\sigma(\hat{\tilde{L}}))$, 其中 $\Re$ 表示复数的实部. 根据 Jentzsch 定理 (参见文献 [14, 定理 V.6.6]) 可知, $\tilde{\lambda}_0$ 是 $\tilde{L}$ 和 $\hat{\tilde{L}}$ 的单重特征根, 令 $\tilde{\phi}_0$ 和 $\tilde{\psi}_0$ 分别是与 $\tilde{\lambda}_0$ 对应的 $\tilde{L}$ 和 $\hat{\tilde{L}}$ 的特征函数, $\tilde{\phi}_0$ 和 $\tilde{\psi}_0$ 可以选取为 m -a.e. 严格正的且满足 $\|\tilde{\phi}_0\|_2 = 1$ 和 $\langle \tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle_m = 1$. 因此, 对于 m -几乎处处的 $x \in E$, 有

$$e^{\tilde{\lambda}_0 t} \tilde{\phi}_0(x) = P_t \tilde{\phi}_0(x), \quad e^{\tilde{\lambda}_0 t} \tilde{\psi}_0(x) = \hat{P}_t \tilde{\psi}_0(x).$$

由 $P_1 \tilde{\phi}_0$ 和 $\hat{P}_1 \tilde{\psi}_0$ 的连续性, $\tilde{\phi}_0$ 和 $\tilde{\psi}_0$ 可以选取为连续的且对所有的 $x \in E$ 都是严格正的.

我们的第二个假设是 $\{P_t : t \geq 0\}$ 和 $\{\hat{P}_t : t \geq 0\}$ 满足内在 U -超压缩性.

假设 1.2 (1) 函数 $\tilde{\phi}_0$ 是有界的;

(2) 半群 $\{P_t, t \geq 0\}$ 和 $\{\hat{P}_t : t \geq 0\}$ 是内在 U -超压缩的, 即对任意 $t > 0$, 存在 $c_t > 0$ 使得

$$p(t, x, y) \leq c_t \tilde{\phi}_0(x) \tilde{\psi}_0(y). \quad (1.9)$$

在文献 [15] 中, 我们已给出了很多满足假设 1.1 和 1.2 的 Hunt 过程的例子. 例如, 令 E 是一个有界 Lipschitz 的连通开集, ξ 是一个无穷小生成元为一致椭圆散度型二阶微分算子的扩散过程在 E 上的子过程, 则 ξ 满足假设 1.1 和 1.2, 可参见文献 [16].

根据 α 的有界性和 ξ 满足的条件, 在文献 [15, 引理 2.1] 中, 我们已经证明了半群 $\{T_t\}$ 关于测度 m 也存在严格正的密度函数 $q(t, x, y)$, 即对于 $f \in \mathcal{B}_b(E)$, 有

$$T_t f(x) = \int_E q(t, x, y) f(y) m(dy).$$

同时, 对任意的 $t > 0$, $q(t, x, y)$ 关于 (x, y) 是连续的, 并且

$$e^{-Mt} p(t, x, y) \leq q(t, x, y) \leq e^{Mt} p(t, x, y), \quad (t, x, y) \in (0, \infty) \times E \times E. \quad (1.10)$$

令 $\{\hat{T}_t, t > 0\}$ 是半群 $\{T_t, t > 0\}$ 在 $L^2(E, m)$ 上的对偶半群, 即对于任意的 $f, g \in L^2(E, m)$, 有

$$\hat{T}_t f(x) = \int_E q(t, y, x) f(y) m(dy).$$

根据假设 1.1(b) 和 (1.10), 我们有

$$\int_E \int_E q^2(t, x, y) m(x) m(dy) \leq e^{2Mt} \int_E \int_E p^2(t, x, y) m(x) m(dy) < \infty.$$

因此, 用同样的分析可得以下结论: 对于任意的 $t > 0$, T_t 和 $\hat{T}_t$ 都是 $L^2(E, m)$ 上的紧算子. 令 L 和 $\hat{L}$ 分别是半群 $\{T_t\}$ 和 $\{\hat{T}_t\}$ 在 $L^2(E, m)$ 上的无穷小生成元. 定义 $\lambda_0 := \sup \Re(\sigma(L)) = \sup \Re(\sigma(\hat{L}))$. λ_0 是 L 和 $\hat{L}$ 的单重特征根, 令 ϕ_0 和 ψ_0 分别是与 λ_0 对应的 L 和 $\hat{L}$ 的特征函数, ϕ_0 和 ψ_0 可以选取为处处严格正的连续函数且满足 $\|\phi_0\|_2 = 1$, $\langle \phi_0, \psi_0 \rangle_m = 1$.

由假设 1.2 和 α 的有界性, 利用与文献 [16, 定理 3.4] 类似的方法, 可以证明:

(i) ϕ_0 是有界的函数.

(ii) 半群 $\{T_t, t \geq 0\}$ 和 $\{\hat{T}_t, t > 0\}$ 是内在 U -超压缩的, 即对任意 $t > 0$, 存在 $c_t > 0$ 使得

$$q(t, x, y) \leq c_t \phi_0(x) \psi_0(y). \quad (1.11)$$

定义 $q_t(x) := \mathbb{P}_{\delta_x}(\|X_t\| = 0)$. 令 $\mathcal{E} := \{\exists t > 0, \|X_t\| = 0\}$. 注意到 $q_t(x)$ 关于 t 是单调非减的函数. 因此, 极限 $q(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} q_t(x) = \mathbb{P}_{\delta_x}(\mathcal{E})$ 存在. 称 $q(x)$ 为超过程的灭绝概率. 令 $v(x) := -\log q(x)$. 由 X 的分枝性可得 $\mathbb{P}_\mu(\mathcal{E}) = e^{-\langle v, \mu \rangle}$. 本文考虑上临界超过程, 为此有如下假设:

假设 1.3 $\lambda_0 > 0$.

假设 1.4 存在 $t_0 > 0$ 使得

$$\inf_{x \in E} q_{t_0}(x) > 0. \quad (1.12)$$

假设 1.4 保证了 $\|v\|_\infty \leq \sup_{x \in E} (-\log q_{t_0}(x)) < \infty$, 因此, v 是有界函数. 在文献 [15, 第 2.2 小节] 中, 我们给出了假设 1.4 的一个充分条件. 特别地, 如果 $\inf_{x \in E} \beta(x) > 0$, 那么假设 1.4 成立. 在假设 1.1–1.4 下, 文献 [10, 引理 3.1] 已经证明了 $q(x) < 1$, 这也是上临界性质的一个体现.

1.2 主要结果

定义 $M_t := e^{-\lambda_0 t} \langle \phi_0, X_t \rangle$, $t \geq 0$. 对于任意的 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 根据 Markov 性可得, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, $\{M_t, t \geq 0\}$ 是一个非负鞅. 因此, $\{M_t, t \geq 0\}$ 存在有限极限, 记作 M_∞ . 根据文献 [17] 可知, M_∞ 是非退化的当且仅当 $L \log L$ 条件成立. 当 M_∞ 是非退化随机变量时, X_t 是指数增长的, 增长速度为 $e^{\lambda_0 t}$. 然而, 当 M_∞ 为退化随机变量时, $e^{\lambda_0 t}$ 不再是 X_t 的增长速度. 文献 [10] 证明了, 当 $L \log L$ 条件不一定成立时, X_t 的增长速度为 $e^{\lambda_0 t} L(t)$, 其中 L 经过变换后是一个缓变函数. 下面来叙述文献 [10] 中的主要结果.

在文献 [10] 中, 我们证明了存在一组非负函数 $\{\eta_t(x), t \geq 0\}$, 满足 $0 \leq \eta_t(x) \leq v(x)$, 使得

$$\eta_t(x) = V_s(\eta_{t+s})(x), \quad t, s \geq 0, \quad x \in E,$$

并且 η_0 既不恒等于 0, 也不恒等于 v . 令 $\gamma_t = \langle \eta_t, \psi_0 \rangle_m$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma_t}{\gamma_{t+s}} = e^{\lambda_0 s}, \quad \forall s \geq 0,$$

并且有下面结论成立.

定理 1.1 (参见文献 [10, 定理 1.2]) 存在一个非退化随机变量 W 使得对于非零测度 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t \langle \phi_0, X_t \rangle &= W, \quad \text{a.s.-}\mathbb{P}_\mu, \\ \mathbb{P}_\mu(W = 0) &= e^{-\langle v, \mu \rangle}, \quad \mathbb{P}_\mu(W < \infty) = 1. \end{aligned}$$

定义新测度 $n^{\phi_0}(x, dr)$:

$$\int_0^\infty f(r) n^{\phi_0}(x, dr) = \int_0^\infty f(r \phi_0(x)) n(x, dr).$$

令 $l(x) := \int_1^\infty r \log r n^{\phi_0}(x, dr)$. 下面定理给出了 M_∞ 非退化的充分必要条件.

定理 1.2 (参见文献 [10, 定理 1.3]) 以下命题是等价的:

- (1) 对某个 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, M_∞ 是非退化随机变量;
- (2) 对所有非零测度 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, M_∞ 是非退化随机变量;
- (3) $l_0 := \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_0 t} \gamma_t < \infty$;
- (4) ($L \log L$ 准则) $\int_E \psi_0(x) l(x) m(dx) < \infty$;
- (5) 对某个非零测度 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 有 $\mathbb{P}_\mu W < \infty$;
- (6) 对所有非零测度 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 有 $\mathbb{P}_\mu W < \infty$.

由文献 [10, 注 1.1] 知, $\int_E \psi_0(x) l(x) m(dx) < \infty$ 成立当且仅当

$$\int_E \phi_0(x) \psi_0(x) m(dx) \int_1^\infty (r \log r) n(x, dr) < \infty. \quad (1.13)$$

本文的主要目的是在上面两个定理的基础上, 进一步研究随机变量 W 的性质: 包括 W 是否存在密度函数、 W 的小值概率问题和尾概率问题. 本文的主要定理如下:

定理 1.3 对于任意非零测度 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, 随机变量 W 在 $(0, \infty)$ 上存在严格正的密度函数.

在第 3.1 小节中, 我们将引入另一个半群 $\{T_t^*\}$, 它的最大特征值为 $\lambda_0^* < 0$. 定义 $\epsilon_0 := \frac{-\lambda_0^*}{\lambda_0}$. 令

$$L(t) = e^{-\lambda_0 t} \gamma_t, \quad (1.14)$$

则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(t+s)}{L(t)} = 1.$$

定义

$$\tilde{L}(\theta) := L\left(\frac{\log \theta}{\lambda_0}\right), \quad \theta \geq 1, \quad (1.15)$$

则 $\tilde{L}$ 是在 ∞ 处的缓变函数.

定理 1.4 对任意 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 有 $\lim_{r \rightarrow 0} r^{-\epsilon_0} \mathbb{P}_\mu(0 < W \leq r) = e^{-\langle v, \mu \rangle} A(\psi(1)) \langle v \phi_0^*, \mu \rangle / \Gamma(\epsilon_0 + 1)$, 其中 $\Gamma(\cdot)$ 是通常的 Γ 函数, ϕ_0^* 为与 $e^{\lambda_0^* t}$ 对应的 T_t^* 的特征函数, 算子 A 的定义见 (3.16). 同时,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \tilde{L}(r)^{-1} \mathbb{P}_\mu(W > r) = 0.$$

注 1.1 对于 Galton-Watson 过程, W 的小值概率问题分为两种情形: Schröder 情形和 Böttcher 情形, 参见文献 [6, 8]. 假设 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 是单物种 Galton-Watson 过程, 后代分布为 $\{p_n, n \geq 0\}$. 令 q 为灭绝概率, $f(s)$ 为 $\{p_n, n \geq 0\}$ 的概率母函数, $m > 1$ 为其期望. 令 $\gamma = f'(q)$.

(1) 如果 $p_0 + p_1 > 0$, 则 $F(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{-n} (f_n(s) - q)$ 存在, 此时 F 满足 Schröder 方程: $F(f(s)) = \gamma f(s)$. 令 $\epsilon = -\log \gamma / \log m$, 则

$$P(W \leq r) \asymp r^{-\epsilon}.$$

(2) 如果 $p_0 + p_1 = 0$, 则 $\lambda = \min\{n : p_n > 0\} \geq 2$. 此时 $G(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} -\lambda^{-n} \log f_n(s)$ 存在, 并且函数 $\bar{G} = e^{-G}$ 满足 Böttcher 方程: $\bar{G}(f) = \bar{G}^\lambda$. 令 $\beta = \log \lambda / \log m$, 可以得到

$$-\log P(W \leq r) \asymp r^{-\beta/(1-\beta)}.$$

而对于文献 [9] 中分枝 Markov 过程和本文中的超过程, 强极限 W 的小值概率问题只有一种情形, 那就是 Schröder 情形. 事实上, 对于文献 [9] 中的分枝 Markov 过程 $\{Z_t, t \geq 0\}$, 当灭绝概率为 0 时, 可以证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda_0^* t} \bar{F}_t f$ 存在, 其中 $\bar{F}_t f := P_{\delta_x}(e^{(\log f, Z_t)})$.

假设 Galton-Watson 过程的后代分布 p_n 满足: 存在 $N > 0$ 使得 $p_n = 0$ 对任意 $n \geq N$ 成立, 文献 [7] 得到了 W 的尾概率趋于 0 的速度. 多物种 Galton-Watson 过程也有相应的尾概率结论, 参见文献 [8]. 对于超过程, W 的尾概率由 X 的骨架过程 (一个分枝 Markov 过程) 决定, 本文中当分枝机制 $n(x, dr)$ 不为 0 时, X 的骨架过程的后代个数分布 $p_n(x)$ (见 (2.12) 和 (2.13)) 不满足此条件, 因此, 本文中未得到尾概率 $\mathbb{P}_\mu(W > r)$ 趋于 0 的速率, 只得到一个较弱的结论.

在第 2 节中, 我们将证明 W 是一个复合 Poisson 随机变量, 具有形式 $W = \sum_{n=1}^N Y_n$, 其中 N 是一个 Poisson 随机变量, Y_j ($j \geq 1$) 是一列与 N 独立的独立同分布的随机变量. 并且可以证明 Y_j 的分布正好是某个分枝 Markov 过程对应的强极限的分布. 在第 3 节中, 我们将对 Y_j 的 Laplace 变换和特征函数进行分析和估计, 得出 Y_j 存在密度函数, 故而证明定理 1.3. 进一步利用 Tauberian 定理, 可以证明定理 1.4.

2 复合 Poisson 随机变量和分枝 Markov 过程

2.1 复合 Poisson 随机变量

定义 W 的 Laplace 指数为

$$\Phi(\theta, x) := -\log \mathbb{P}_{\delta_x} \exp\{-\theta W\}. \quad (2.1)$$

利用 Markov 性和分枝性, 在文献 [10, 等式 (5.3)] 中, 我们已经证明了

$$\Phi(\theta, x) = V_t(\Phi(\theta e^{-\lambda_0 t}, \cdot))(x). \quad (2.2)$$

引理 2.1 对于 $x \in E$, 存在 $(0, \infty)$ 上的有限测度 $\pi(x, dr)$ 使得 $\pi(x, (0, \infty)) = v(x)$, 且

$$\Phi(\theta, x) = \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-\theta r}) \pi(x, dr).$$

证明 由于

$$\mathbb{P}_\mu[e^{-\theta W}] = (\mathbb{P}_{\mu/n}(e^{-\theta W}))^n,$$

因此, 在测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, 随机变量 W 的分布是无穷可分的. 又因为 W 是非负的, 因此存在非负函数 $a(x)$ 和 $(0, \infty)$ 上满足下面条件的 σ -有限测度 $\pi(x, dr)$:

$$\int_0^\infty (1 \wedge r) \pi(x, dr) < \infty,$$

使得

$$\Phi(\theta, x) = a(x)\theta + \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-\theta r}) \pi(x, dr). \quad (2.3)$$

根据文献 [10, 定理 1.2] 知,

$$\Phi(\infty, x) = -\log \mathbb{P}_{\delta_x}(W = 0) = v(x).$$

由此可得 $a(x) = 0$, 并且 $\pi(x, (0, \infty)) = v(x)$. 因此可得定理结论成立. $\square$

根据引理 2.1 可得, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, W 是一个复合 Poisson 随机变量, 即 $W = \sum_{n=1}^N Y_n$, 其中 N 是参数为 $\langle v, \mu \rangle$ 的 Poisson 随机变量, $\{Y_j, j \geq 1\}$ 是独立同分布的随机序列, 且分布为 $\frac{\int_E \pi(x, dy) \mu(dx)}{\langle v, \mu \rangle}$, 同时, N 与 $\{Y_j, j \geq 1\}$ 独立. 以下假设 Y 是分布为 $\frac{\int_E \pi(x, dy) \mu(dx)}{\langle v, \mu \rangle}$ 的随机变量.

引理 2.2 对任意非零 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, 随机变量 W 在 $(0, \infty)$ 上存在密度函数当且仅当随机变量 Y 存在密度函数. 如果 Y 的密度函数为 $g_\mu(y)$, 则对于任意的 $0 < a < b$, 有

$$\mathbb{P}_\mu(W \in (a, b)) = \int_a^b f_\mu(y) dy,$$

其中

$$f_\mu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_\mu^{*k}(y) \frac{\langle v, \mu \rangle^k}{k!} e^{-\langle v, \mu \rangle}. \quad (2.4)$$

注 2.1 如果对于任意的 $x \in E$, 在概率测度 $\mathbb{P}_{\delta_x}$ 下, Y 存在密度函数 $g(x, y)$, 则

$$\pi(x, dy) = v(x)g(x, y)dy.$$

从而, 对任意非零 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, Y 存在密度函数:

$$g_\mu(y) = \frac{\int_E v(x)g(x, y)\mu(dx)}{\langle v, \mu \rangle}, \quad y > 0.$$

根据引理 2.2 和注 2.1, 下面只需证明随机变量 Y 存在密度函数. 因此, 我们将对 Y 的 Laplace 变换和特征函数进行分析. 定义

$$\psi(\theta, x) := \frac{v(x) - \Phi(\theta, x)}{v(x)} = v(x)^{-1} \int_{(0, \infty)} e^{-\theta r} \pi(x, dr), \quad \theta \geq 0.$$

因此,

$$\mathbb{P}_\mu(e^{-\theta Y}) = \frac{\langle v\psi(\theta, \cdot), \mu \rangle}{\langle v, \mu \rangle}, \quad \theta \geq 0.$$

注意, $\psi(\theta, x)$ 是分布 $v(x)^{-1}\pi(x, dr)$ 的 Laplace 变换. 对任意 $x \in E$, 有 $\theta \geq 0$, $\psi(\theta, x) \in [0, 1]$.

类似地, 定义

$$\psi(i\theta, x) := \mathbb{P}_{\delta_x}(e^{-i\theta Y}) = v(x)^{-1} \int_{(0, \infty)} e^{-i\theta r} \pi(x, dr), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

对任给 $a > 0$, 令 $\mathcal{D}_a := \{f \in \mathcal{B}(E) : 0 \leq f(x) \leq a, x \in E\}$. 定义算子 $\bar{V}_t : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$:

$$\bar{V}_t f(x) := \frac{v(x) - V_t(v(1-f))(x)}{v(x)}, \quad f \in \mathcal{D}_1. \quad (2.5)$$

根据 (2.2) 可得, 对于 $\theta \geq 0$, 有

$$\psi(\theta, x) = \bar{V}_t(\psi(\theta e^{-\lambda_0 t}, \cdot))(x). \quad (2.6)$$

显然, $\bar{V}_t$ 的定义可以推广到 E 上的无穷范数小于等于 1 的复值可测函数空间上.

下一小节中, 我们将说明 $\bar{V}_t$ 正好是某个分枝 Markov 过程的 Laplace 泛函. 文献 [18, 19] 中, 在一定条件下给出了超过程的骨架分解. 在文献 [18, 19] 的条件满足时, 我们下面介绍的分枝 Markov 过程正好是 (ξ, φ) -超过程的骨架过程. 文献 [19] 主要研究了超扩散的骨架分解, 而文献 [18] 主要研究了底过程 $\{\xi_t, t \geq 0\}$ 为对称的超过程的骨架分解. 文献 [18, 19] 并不能完全涵盖本文中的超过程. 本文未直接使用超过程的骨架分解, 而是从 W 是复合 Poisson 随机变量出发进行讨论, 同样引出了对应的分枝 Markov 过程.

2.2 分枝 Markov 过程

定义

$$N_t := \frac{v(\xi_t)}{v(\xi_0)} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{\varphi(\xi_s, v(\xi_s))}{v(\xi_s)} ds \right\}.$$

引理 2.3 在概率 Π_x 下, $\{N_t : t \geq 0\}$ 关于 σ -域流 $\{\mathcal{H}_t, t \geq 0\}$ 是一个非负鞅, 并且 $\Pi_x(N_t) = 1$.

证明 对于任意的 $t > 0$, 利用 Markov 性和分枝性可得 $v(x) = V_t v(x)$. 因此,

$$v(x) + \Pi_x \int_0^t \varphi(\xi_s, v(\xi_s)) ds = \Pi_x v(\xi_t). \quad (2.7)$$

容易验证

$$|\varphi(x, z)| \leq 2M(z + z^2), \quad z \geq 0,$$

因此,

$$\frac{|\varphi(x, v(x))|}{v(x)} \leq 2M(1 + v(x)) \leq 2M(1 + \|v\|_\infty). \quad (2.8)$$

因此, 根据 Feynman-Kac 公式可得

$$v(x) = \Pi_x \left[\exp \left\{ - \int_0^t \frac{\varphi(\xi_s, v(\xi_s))}{v(\xi_s)} ds \right\} v(\xi_t) \right]. \quad (2.9)$$

由 Markov 性和等式 (2.9) 立即可得

$$\begin{aligned} \Pi_x(N_{t+s} | \mathcal{H}_t) &= v(\xi_0)^{-1} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{\varphi(\xi_s, v(\xi_s))}{v(\xi_s)} ds \right\} \\ &\quad \times \Pi_{\xi_t} \left[v(\xi_s) \exp \left\{ - \int_0^s \frac{\varphi(\xi_s, v(\xi_s))}{v(\xi_s)} ds \right\} \right] \\ &= N_t. \end{aligned}$$

因此, $\{N_t : t \geq 0\}$ 是一个非负鞅. □

我们利用鞅 $\{N_t\}$ 定义一个新的概率测度 $\bar{\Pi}_x$:

$$\frac{d\bar{\Pi}_x}{d\Pi_x} \Big|_{\mathcal{H}_t} = N_t, \quad t \geq 0.$$

命题 2.1 对于 $f \in \mathcal{D}_1$, 有

$$\bar{V}_t f(x) = \bar{\Pi}_x \int_0^t \varphi^*(\xi_s, \bar{V}_{t-s} f(\xi_s)) ds + \bar{\Pi}_x f(\xi_t), \quad (2.10)$$

其中

$$\varphi^*(x, \lambda) := \frac{\varphi(x, v(x)(1-\lambda)) - \varphi(x, v(x))(1-\lambda)}{v(x)}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

证明 由方程 (1.5) 可得对于 $f \in \mathcal{D}_1$, 有

$$V_t(v(1-f))(x) + \Pi_x \int_0^t \varphi(\xi_s, V_{t-s}(v(1-f))(\xi_s)) ds = \Pi_x v(\xi_t)(1-f(\xi_t)).$$

因此, 根据 (2.7) 可得

$$v(x) \bar{V}_t f(x) + \Pi_x \int_0^t \varphi(\xi_s, v(\xi_s)) - \varphi(\xi_s, v(\xi_s)(1 - \bar{V}_{t-s} f(\xi_s))) ds = \Pi_x v(\xi_t) f(\xi_t).$$

故

$$\begin{aligned} v(x)\bar{V}_t f(x) &= \Pi_x \int_0^t v(\xi_s) \varphi^*(\xi_s, \bar{V}_{t-s} f(\xi_s)) ds \\ &\quad - \Pi_x \int_0^t \frac{\varphi(\xi_s, v(\xi_s))}{v(\xi_s)} v(\xi_s) \bar{V}_{t-s} f(\xi_s) ds + \Pi_x v(\xi_t) f(\xi_t). \end{aligned}$$

根据 Feynman-Kac 公式可得

$$v(x)\bar{V}_t f(x) = \Pi_x \int_0^t e^{-\int_0^s \frac{\varphi(\xi_u, v(\xi_u))}{v(\xi_u)} du} v(\xi_s) \varphi^*(\xi_s, \bar{V}_{t-s} f(\xi_s)) ds + \Pi_x [e^{-\int_0^t \frac{\varphi(\xi_s, v(\xi_s))}{v(\xi_s)} ds} v(\xi_t) f(\xi_t)],$$

由此可得 (2.10). $\square$

根据以上准备工作, 下面引入一个与 $\bar{V}_t$ 对应的分枝 Markov 过程. 根据 $\varphi^*(x, \lambda)$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned} \varphi^*(x, \lambda) &= \frac{\varphi(x, v(x)(1-\lambda)) - \varphi(x, v(x))(1-\lambda)}{v(x)} \\ &= \beta(x)v(x)(\lambda^2 - \lambda) + v(x)^{-1} \int_0^\infty ((e^{r\lambda v(x)} - 1 + \lambda)e^{-rv(x)} - \lambda)n(x, dr) \\ &= \beta(x)v(x)\lambda^2 + \sum_{n=2}^\infty \int_0^\infty \frac{v(x)^{n-1}(r\lambda)^n}{n!} e^{-rv(x)} n(x, dr) \\ &\quad - \lambda \left(\beta(x)v(x) + v(x)^{-1} \int_0^\infty (e^{rv(x)} - 1 - rv(x))e^{-rv(x)} n(x, dr) \right). \end{aligned}$$

因此可以得到

$$\varphi^*(x, \lambda) = b(x) \left(\sum_{n=2}^\infty \lambda^n p_n(x) - \lambda \right), \quad (2.11)$$

其中

$$\begin{aligned} b(x) &= \beta(x)v(x) + v(x)^{-1} \int_0^\infty (e^{rv(x)} - 1 - rv(x))e^{-rv(x)} n(x, dr), \\ p_2(x) &= \frac{v(x)}{b(x)} \left(\beta(x) + \frac{1}{2} \int_0^\infty r^2 e^{-v(x)r} n(x, dr) \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$p_n(x) = \frac{v^{n-1}(x)}{n!b(x)} \int_0^\infty r^n e^{-v(x)r} n(x, dr), \quad n > 2. \quad (2.13)$$

容易验证 $\sum_{n=2}^\infty p_n(x) = 1$, 且 $b(x)$ 是一个非负有界函数. 事实上,

$$\begin{aligned} b(x) &\leq \beta(x)v(x) + v(x)^{-1} \int_0^\infty ((rv(x)) \wedge (rv(x))^2) n(x, dr) \\ &\leq \beta(x)v(x) + v(x) \int_0^1 r^2 n(x, dr) + \int_1^\infty r n(x, dr) \leq M\|v\|_\infty + M. \end{aligned}$$

同时易得 $b(x) > 0$.

考虑一个分枝 Markov 过程 $\{Z_t, t \geq 0; P_\nu\}$. 它的底过程为 $\{\xi_t, t \geq 0; \bar{\Pi}_x\}$, 分枝速率函数为 $b(x)$. 当粒子死亡时, 独立地产生随机个后代, 后代的个数的分布为 $\{p_n(x) : n \geq 2\}$. 因此, 对于任意的 $g \in \mathcal{B}_b^+(E)$, 有

$$P_{\delta_x}(e^{-\langle g, Z_t \rangle}) = \bar{V}_t(e^{-g})(x),$$

并且

$$Q_t g(x) := P_{\delta_x}(\langle g, Z_t \rangle) = \bar{\Pi}_x \left(\exp \left\{ \int_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi^*(\xi_s, 1) ds \right\} g(\xi_t) \right) = v(x)^{-1} T_t(vg)(x), \quad (2.14)$$

上式中最后一个等式是根据 φ^* 和 $\bar{\Pi}_x$ 的定义. 因此, 半群 $\{Q_t\}$ 的无穷小生成元的第一特征值为 λ_0 , 对应的特征函数为 $v(x)^{-1}\phi_0(x)$. 根据 v 的有界性, $\{Q_t\}$ 同样满足内在 U -超压缩性, 故而满足文献 [9] 中的条件 (M). 因此, 根据文献 [9, 命题 3.6], 存在非负函数 $\bar{\gamma}_t$ 和非退化随机变量 W^Z , 使得

$$\bar{\gamma}_t \langle v^{-1}\phi_0, Z_t \rangle \rightarrow W^Z, \quad P_\nu\text{-a.s.},$$

并且 W^Z 的 Laplace 变换 $\psi^Z(\theta, x) := P_{\delta_x}(e^{-\theta W^Z})$ ($\theta \in \mathbb{R}$) 是方程 (2.6) 的解. 我们已经知道 Y 的 Laplace 变换 $\psi(\theta, x)$ 也是 (2.6) 的解, 根据文献 [9, 命题 3.8], 存在 $a \in (0, \infty)$ 使得 $(Y, \mathbb{P}_{\delta_x})$ 与 (aW^Z, P_{δ_x}) 同分布. 由于 $p_0(x) = p_1(x) = 0$, 因此, Z 的灭绝概率为 0. 根据文献 [9, 命题 5.1、5.10 和 5.11] 中关于 W^Z 的结论, 可得 $(Y, \mathbb{P}_{\delta_x})$ 的相应性质, 进而得到定理 1.3 和 1.4.

在定理 1.4 中, 半群 $\{T_t^*\}$ (定义见第 3.1 小节) 起到了非常重要的作用, 尤其是它的无穷小生成元的第一特征值 λ_0^* 和与第一特征值对应的特征函数. 定理 1.4 还包含一个重要的算子 A , 这里 A 是由 $e^{-\lambda_0^* t} \bar{V}_t f(x)$ 的极限决定的, 具体定义见 (3.16). 文献 [9] 中半群 $\{\delta \bar{F}_t(0), t \geq 0\}$ 与本文的 $\{T_t^*\}$ 是一致的, 算子 $\bar{Q}$ 与算子 A 是一致的, 但是, 文献 [9] 中并未给出这两个量的具体形式. 为了文章结果的完善, 我们没有在证明中直接引用文献 [9] 中的结论. 在第 3.1 小节中, 我们将给出半群 $\{T_t^*\}$ 和算子 A 的定义. 在第 3.2 和 3.3 小节中, 我们将给出定理 1.3 和 1.4 的证明, 这部分的证明思路与文献 [9] 基本一致.

3 主要定理的证明

3.1 算子 $\bar{V}_t$ 的相关估计

本小节将给出算子 $\bar{V}_t$ 的一些估计. 根据这些估计, 利用 (2.6), 进而可以得到 Y 的 Laplace 变换 $\psi(\theta, x)$ 的相关估计. 在以下证明中, C 将代表常数, 并且在不同的位置可能代表不同的常数.

这里首先把在文献 [10] 中得到的在本文中要用到的估计列举出来.

(1) (半群 T_t 的估计) 根据文献 [20, 定理 2.7], 在假设 1.1 和 1.2 下, 对任意 $\delta > 0$, 存在常数 $\gamma = \gamma(\delta) > 0$ 和 $c = c(\delta) > 0$, 使得对任意 $(t, x, y) \in [\delta, \infty) \times E \times E$, 有

$$|e^{-\lambda_0 t} q(t, x, y) - \phi_0(x) \psi_0(y)| \leq ce^{-\gamma t} \phi_0(x) \psi_0(y). \quad (3.1)$$

取充分大的 t 使得 $ce^{-\gamma t} < \frac{1}{2}$, 则有

$$e^{-\lambda_0 t} q(t, x, y) \geq \frac{1}{2} \phi_0(x) \psi_0(y).$$

由于 $q(t, x, \cdot) \in L^1(E, m)$, 我们有 $\psi_0 \in L^1(E, m)$. 因此, 如果 $f \in \mathcal{B}_b^+(E)$, 则 $\langle f, \psi_0 \rangle_m < \infty$. 从而, 对任意 $f \in \mathcal{B}_b^+(E)$ 和 $(t, x) \in [\delta, \infty) \times E$, 有

$$|e^{-\lambda_0 t} T_t f(x) - \langle f, \psi_0 \rangle_m \phi_0(x)| \leq ce^{-\gamma t} \langle |f|, \psi_0 \rangle_m \phi_0(x), \quad (3.2)$$

$$(1 - ce^{-\gamma t}) \langle |f|, \psi_0 \rangle_m \phi_0(x) \leq e^{-\lambda_0 t} T_t |f|(x) \leq (1 + c) \langle |f|, \psi_0 \rangle_m \phi_0(x). \quad (3.3)$$

(2) (函数 v 与 ϕ_0 是可比的) 根据文献 [10, 引理 4.4], 有

$$v(x) = V_1(v)(x) \geq CT_1(v)(x) \geq C\phi_0(x). \quad (3.4)$$

同时,

$$v(x) = V_1v(x) \leq T_1v(x) \leq C\phi_0(x). \quad (3.5)$$

(3) 根据文献 [10, 命题 5.3 和引理 4.6], 我们有

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \langle \Phi(e^{-\lambda_0 t}), \psi_0 \rangle_m, \\ \Phi(e^{-\lambda_0 t}, x) &= (1 + h_t(x))e^{-\lambda_0 t} L(t)\phi_0(x), \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|h_t\|_\infty = 0$.

定义半群 $P_t^{\varphi'}$:

$$P_t^{\varphi'} f(x) := \Pi_x(f(\xi_t) e^{-\int_0^t \partial_\lambda \varphi(\xi_s, v(\xi_s)) ds}). \quad (3.7)$$

根据 (1.3) 和 v 的有界性可知, $\partial_\lambda \varphi(x, v(x))$ 是有界的, 因此, 采用与等式 (1.11) 上面段落中相同的讨论, 半群 $(P_t^{\varphi'})$ 满足内在 U -超压缩性. 令 λ_0^* 是 $(P_t^{\varphi'})$ 的无穷小生成元的最大 (单重) 特征根, 令 $\bar{\phi}_0$ 和 $\bar{\psi}_0$ 分别是与 λ_0^* 对应的 $P_t^{\varphi'}$ 的无穷小生成元和它的对偶半群的无穷小生成元的特征函数. $\bar{\phi}_0$ 和 $\bar{\psi}_0$ 可以选取为处处严格正的连续函数且满足 $\|\bar{\phi}_0\|_2 = 1$ 和 $\langle \bar{\phi}_0, \bar{\psi}_0 \rangle_m = 1$. 同时 $\bar{\phi}_0$ 是有界函数, 且 $\bar{\psi}_0 \in L^1(E, m)$.

由文献 [20, 定理 2.7] 可知, 在假设 1.1 和 1.2 成立时, 对任意的 $\delta > 0$, 存在常数 $\gamma = \gamma(\delta) > 0$ 和 $c = c(\delta) > 0$ 使得对任意 $f \in \mathcal{B}_b^+(E)$ 和 $(t, x) \in [\delta, \infty) \times E$, 有

$$|e^{-\lambda_0^* t} T_t^{\varphi'} f(x) - \langle f, \bar{\psi}_0 \rangle_m \bar{\phi}_0(x)| \leq ce^{-\gamma t} \langle |f|, \bar{\psi}_0 \rangle_m \bar{\phi}_0(x). \quad (3.8)$$

在此基础上, 再定义新半群

$$T_t^* f(x) := v(x)^{-1} P_t^{\varphi'}(vf)(x) = v(x)^{-1} \Pi_x((vf)(\xi_t) e^{-\int_0^t \partial_\lambda \varphi(\xi_s, v(\xi_s)) ds}) = \bar{\Pi}_x(f(\xi_t) e^{-\int_0^t b(\xi_s) ds}).$$

令 $\phi_0^*(x) := v(x)^{-1} \bar{\phi}_0(x)$ 和 $\psi_0^*(x) := v(x) \bar{\psi}_0(x)$. 因此, 根据 (3.8) 可得

$$|e^{-\lambda_0^* t} T_t^* f(x) - \langle f, \psi_0^* \rangle_m \phi_0^*(x)| \leq ce^{-\gamma t} \langle |f|, \psi_0^* \rangle_m \phi_0^*(x). \quad (3.9)$$

注意到, $\partial_\lambda \varphi(x, \lambda) \geq -\alpha(x)$, 因此,

$$\bar{\phi}_0(x) = e^{\lambda_0^*} P_1^{\varphi'}(\bar{\phi}_0)(x) \leq CT_1(\bar{\phi}_0)(x) \leq C\phi_0(x).$$

由 (3.4) 得 $\|\phi_0^*\|_\infty < \infty$. 同时易得 $\psi_0^* \in L^1(E, m)$.

可以验证, 本文中定义的半群 $\{T_t^*, t \geq 0\}$ 与文献 [9] 中定义的半群 $\{\delta \bar{F}_t(0), t \geq 0\}$ 是一致的, 其中 $\{\delta \bar{F}_t(0), t \geq 0\}$ 是通过 Fréchet 导数定义的, 文献 [9] 并未给出 $\delta \bar{F}_t(0)$ 的表达式.

引理 3.1 半群 T_t^* 的无穷小生成元的最大特征根是负的, 即

$$\lambda_0^* < 0.$$

证明 根据 $V_t v(x) = v(x)$ 和文献 [21, 引理 4.1], 可得

$$\mathbb{P}_{\delta_x}(\langle f, X_t \rangle e^{-\langle v, X_t \rangle}) = \Pi_x(f(\xi_t) e^{-\int_0^t \partial_z \varphi(\xi_s, v(\xi_s)) ds}) e^{-v(x)}.$$

因此,

$$T_t^* f(x) = v(x)^{-1} e^{v(x)} \mathbb{P}_{\delta_x}(\langle v f, X_t \rangle e^{-\langle v, X_t \rangle}). \quad (3.10)$$

根据文献 [10, 引理 3.2] 可知,

$$\mathbb{P}_{\delta_x} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v, X_t \rangle = 0 \right) = 1 - \mathbb{P}_{\delta_x} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v, X_t \rangle = \infty \right) = e^{-v(x)}.$$

因此, 根据控制收敛定理可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_t^* 1(x) = 0.$$

再结合 (3.9), 立即可得 $\lambda_0^* < 0$. □

引理 3.2 对任意的 $a \in [0, 1)$, 存在常数 $c(a) > 0$, 使得对于 $t \geq 1$, 有

$$\bar{V}_t f(x) \leq c(a) e^{\lambda_0^*(1-a)t} \phi_0^*(x)^{1-a}, \quad \forall f \in \mathcal{D}_a.$$

证明 注意到

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq a} \frac{\varphi^*(x, \lambda)}{\lambda} = \sup_{0 \leq \lambda \leq a} b(x) \left(\sum_{n=2}^{\infty} p_n(x) \lambda^{n-1} - 1 \right) \leq b(x)(a-1).$$

由于对任意 $\lambda \in [0, 1]$, 有 $\varphi^*(x, \lambda) \leq 0$, 因此, 根据 (2.10) 可得, 对于 $f \in \mathcal{D}_1$, 有

$$\bar{V}_t f(x) \leq \bar{\Pi}_x f(x) \leq \|f\|_{\infty}. \quad (3.11)$$

因此, 对于 $f \in \mathcal{D}_a$, 有

$$\varphi^*(x, \bar{V}_{t-s} f(x)) \leq b(x)(a-1) \bar{V}_{t-s} f(x). \quad (3.12)$$

根据 (2.10) 和 Feynman-Kac 公式可得, 对于 $t \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} \bar{V}_t f(x) &= \bar{\Pi}_x \int_0^t e^{-(1-a) \int_0^s b(\xi_u) du} [\varphi^*(\xi_s, \bar{V}_{t-s} f(\xi_s)) + (1-a)b(\xi_s) \bar{V}_{t-s} f(\xi_s)] ds \\ &\quad + \bar{\Pi}_x [e^{-(1-a) \int_0^t b(\xi_s) ds} f(\xi_t)] \\ &\leq a \bar{\Pi}_x [e^{-(1-a) \int_0^t b(\xi_s) ds}] \leq a [\bar{\Pi}_x [e^{-\int_0^t b(\xi_s) ds}]]^{1-a} \\ &= a [T_t^* 1(x)]^{1-a} \leq a(1+c) e^{\lambda_0^*(1-a)t} \langle 1, \psi_0^* \rangle_m^{1-a} \phi_0^*(x)^{1-a}, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式是由 (3.9) 得到的. □

引理 3.3 对任意 $f \in \mathcal{D}_1$, 有

$$T_t^* f(x) \leq \bar{V}_t f(x) \leq (1 + \|f\|_{\infty} e^{\|b\|_{\infty} t}) T_t^* f(x).$$

证明 根据 (3.11) 可得

$$\bar{V}_t f(x) \leq \bar{\Pi}_x f(x) \leq e^{\|b\|_\infty t} T_t^* f(x). \quad (3.13)$$

由 (2.10), 利用 Feynman-Kac 公式可得

$$\bar{V}_t f(x) = \int_0^t T_s^* [\varphi_0^*(\cdot, \bar{V}_{t-s} f)](x) ds + T_t^*(f)(x), \quad (3.14)$$

其中 $\varphi_0^*(x, \lambda) = \varphi^*(x, \lambda) + b(x)\lambda \geq 0$. 因此, $\bar{V}_t f(x) \geq T_t^* f(x)$. 注意到

$$\varphi_0^*(x, \lambda) \leq b(x)\lambda^2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (3.15)$$

结合 (3.11) 和 (3.13), 可得

$$\varphi_0^*(x, \bar{V}_{t-s} f(x)) \leq b(x) \bar{V}_{t-s} f(x)^2 \leq \|f\|_\infty \|b\|_\infty e^{\|b\|_\infty (t-s)} T_{t-s}^* f(x).$$

因此,

$$\int_0^t T_s^* [\varphi_0^*(\cdot, \bar{V}_{t-s} f)](x) ds \leq \|f\|_\infty \int_0^t \|b\|_\infty e^{\|b\|_\infty (t-s)} ds T_t^* f(x) \leq \|f\|_\infty e^{\|b\|_\infty t} T_t^* f(x).$$

综上所述可得

$$T_t^* f(x) \leq \bar{V}_t f(x) \leq (1 + \|f\|_\infty e^{\|b\|_\infty t}) T_t^* f(x).$$

证毕. □

对于任意的 $f \in \mathcal{D}_1$, 定义

$$A(f) := \int_0^\infty e^{-\lambda_0^* s} \langle \varphi_0^*(\cdot, \bar{V}_s f), \psi_0^* \rangle_m ds + \langle f, \psi_0^* \rangle_m. \quad (3.16)$$

引理 3.4 对于任意的 $a \in [0, 1)$ 和 $f \in \mathcal{D}_a$, 有

$$\sup_{t>0} e^{-\lambda_0^* t} \|\bar{V}_t f\|_\infty < \infty.$$

同时,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda_0^* t} \bar{V}_t f(x) = A(f) \phi_0^*(x),$$

其中 $A(f)$ 由定义 (3.16) 给出.

证明 注意到 $\phi_0^*(x)$ 有界, 根据引理 3.2, 存在 $s_0 > 1$ 使得

$$\bar{V}_{s_0} f(x) \leq \frac{1}{4}, \quad \forall f \in \mathcal{D}_a.$$

由此再利用引理 3.2 可得, 对于任意的 $s > s_0 + 1$, 有

$$\bar{V}_s f(x) = \bar{V}_{s-s_0} (\bar{V}_{s_0} f)(x) \leq \bar{V}_{s-s_0} \left(\frac{1}{4} \right) (x) \leq C e^{3\lambda_0^* s/4} \phi_0^*(x)^{3/4}. \quad (3.17)$$

根据 (3.14) 可得, 对于任意的 $t > s_0 + 1$, 有

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_0^* t} \bar{V}_t f(x) &= \int_0^t e^{-\lambda_0^* s} e^{-\lambda_0^* (t-s)} T_{t-s}^* [\varphi_0^*(\cdot, \bar{V}_s f)](x) ds + e^{-\lambda_0^* t} T_t^*(f)(x) \\ &= \left(\int_0^{s_0+1} + \int_{s_0+1}^t \right) e^{-\lambda_0^* s} e^{-\lambda_0^* (t-s)} T_{t-s}^* [\varphi_0^*(\cdot, \bar{V}_s f)](x) ds + e^{-\lambda_0^* t} T_t^*(f)(x) \\ &=: J_1(t, x) + J_2(t, x) + J_3(t, x). \end{aligned} \quad (3.18)$$

对于 J_3 , 由 (3.9) 容易得到 $J_3(t, x) \leq C \langle f, \psi_0^* \rangle_m \phi_0^*(x)$, 并且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J_3(t, x) = \langle f, \psi_0^* \rangle_m \phi_0^*(x).$$

对于 $J_2(t, x)$, 利用 (3.17) 和 (3.15), 对于 $t > s > s_0 + 1$, 有

$$e^{-\lambda_0^* (t-s)} |T_{t-s}^* [\varphi_0^*(\cdot, \bar{V}_s f)](x)| \leq C e^{3\lambda_0^* s/2} e^{-\lambda_0^* (t-s)} T_{t-s}^* [(\phi_0^*)^{3/2}](x) \leq C e^{3\lambda_0^* s/2} \phi_0^*(x).$$

因此,

$$|J_2(t, x)| \leq C \int_{s_0+1}^t e^{\lambda_0^* s/2} ds \phi_0^*(x) \leq C \phi_0^*(x).$$

同时根据控制收敛定理可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J_2(t, x) = \int_{s_0+1}^{\infty} e^{-\lambda_0^* s} \langle \varphi_0^*(\cdot, \bar{V}_s f), \psi_0^* \rangle_m ds \phi_0^*(x).$$

最后我们处理 $J_1(t, x)$. 由于 $\bar{V}_s f(x) \leq 1$, 因此, $\varphi_0^*(x, \bar{V}_s f(x)) \leq \|b\|_{\infty}$. 因此, 对于 $t-s > t-s_0 > 1$, 我们有

$$e^{-\lambda_0^* (t-s)} |T_{t-s}^* [\varphi_0^*(\cdot, \bar{V}_s f)](x)| \leq C e^{-\lambda_0^* (t-s)} T_{t-s}^* 1(x) \leq C \phi_0^*(x).$$

因此,

$$J_1(t, x) < C \phi_0^*(x),$$

并且根据控制收敛定理可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J_1(t, x) = \int_0^{s_0+1} e^{-\lambda_0^* s} \langle \varphi_0^*(\cdot, \bar{V}_s f), \psi_0^* \rangle_m ds \phi_0^*(x).$$

综上, 结论成立. $\square$

3.2 定理 1.3 的证明

根据引理 2.2, 要证明定理 1.3, 只需证明 Y 具有密度 $g_{\mu}(y)$, 并且对所有的 $y > 0$ 都成立 $g_{\mu}(y) > 0$. 本小节将通过讨论 Y 的特征函数的性质, 来证明 Y 的密度函数存在. 根据 (2.6), 同样有

$$\psi(i\theta, x) = \bar{V}_t(\psi(i\theta e^{-\lambda_0 t}, \cdot))(x), \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

为了简化, 下面对任意 $\theta \in \mathbb{R}$, 简记函数 $\psi(i\theta, \cdot)$ 为 $\psi(i\theta)$; 类似地, 对任意 $\theta > 0$, 简记函数 $\psi(\theta, \cdot)$ 为 $\psi(\theta)$. 下面的引理 3.5 和 3.6 的证明与文献 [9] 中的证明基本一致.

引理 3.5 对于任意的不包含 0 的有界闭区间 I , 有

$$\sup_{\theta \in I} \|\psi(i\theta)\|_{\infty} < 1.$$

证明 容易得到

$$\begin{aligned} |\|\psi(i\theta)\|_{\infty} - \|\psi(i(\theta + \epsilon))\|_{\infty}| &\leq \|\psi(i\theta) - \psi(i(\theta + \epsilon))\|_{\infty} \\ &= \|\bar{V}_1(\psi(i\theta e^{-\lambda_0})) - \bar{V}_1(\psi(i(\theta + \epsilon)e^{-\lambda_0}))\|_{\infty}. \end{aligned}$$

熟知, 对于任意的复数 $|x_j| \leq 1$ 和 $|y_j| \leq 1$, 有

$$\left| \prod_{j=1}^n x_j - \prod_{j=1}^n y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|.$$

对任意 E 上的无穷范数小于等于 1 的复值函数 f , 有

$$\bar{V}_t f(x) = P_{\delta_x} \prod_{u \in \mathcal{L}_t} f(\xi_t(u)),$$

其中 $\mathcal{L}_t$ 为分枝 Markov 过程 Z 在 t 时刻存活的粒子, $\xi_t(u)$ 为粒子 u 在 t 时刻的位置. 因此,

$$\begin{aligned} &|\bar{V}_1(\psi(i\theta e^{-\lambda_0}))(x) - \bar{V}_1(\psi(i(\theta + \epsilon)e^{-\lambda_0}))(x)| \\ &\leq P_{\delta_x} \langle |\psi(i\theta e^{-\lambda_0}) - \psi(i(\theta + \epsilon)e^{-\lambda_0})|, Z_1 \rangle \\ &= v(x)^{-1} T_1(v|\psi(i\theta e^{-\lambda_0}) - \psi(i(\theta + \epsilon)e^{-\lambda_0})|(x) \\ &\leq C \langle |\psi(i\theta e^{-\lambda_0}) - \psi(i(\theta + \epsilon)e^{-\lambda_0})|, \psi_0 \rangle_m \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

上面倒数第二个等式是由 (2.14) 得到的, 最后一个不等号用到了 (3.13) 和 (3.4). 最后的极限是根据特征函数的连续性和控制收敛定理得到的. 因此, $\|\psi(i\theta)\|_{\infty}$ 关于 θ 是连续的. 下面只需要证明, 对于任意的 $\theta \neq 0$, 有 $\|\psi(i\theta)\|_{\infty} < 1$.

我们用反证法. 假设对于所有的 $\theta \in \mathbb{R}$, $x \in E$, 有 $|\psi(i\theta, x)| = 1$, 则根据特征函数的唯一性可得, 对于 $x \in E$, 存在取值为正数的函数 $c(x)$, 使得 $P_{\delta_x}(Y = c(x)) = 1$, 即 $\psi(\theta, x) = e^{-\theta c(x)}$. 根据 (2.6) (其中 θ 被 $\theta e^{\lambda_0 t}$ 代替), 有

$$\exp\{-\theta e^{\lambda_0 t} c(x)\} = P_{\delta_x}(e^{-\theta \langle c, Z_t \rangle}),$$

即随机变量 $\langle c, Z_t \rangle$ 的 Laplace 变换与 $e^{\lambda_0 t} c(x)$ 的相同, 因此, $P_{\delta_x}(\langle c, Z_t \rangle = e^{\lambda_0 t} c(x)) = 1$. 但是, 根据分枝 Markov 过程的定义可知, $\langle c, Z_t \rangle$ 不会集中在一点, 矛盾. 因此存在 $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in E$ 使得 $|\psi(i\theta_0, x_0)| < 1$. 因此存在 $\delta = \delta(x_0) > 0$, 使得 $|\psi(i\theta, x_0)| < 1$, $|\theta| \in (0, \delta)$. 由于 $x \rightarrow \psi(i\theta, x)$ 是连续函数, 因此, 对于 $|\theta| \in (0, \delta)$, 有

$$m(y \in E : |\psi(i\theta, y)| < 1) > 0.$$

对于任意的无穷范数小于等于 1 的复值函数 f , 有

$$|\bar{V}_t f(x)| = \left| P_{\delta_x} \prod_{u \in \mathcal{L}_t} f(\xi_t(u)) \right| \leq P_{\delta_x} \prod_{u \in \mathcal{L}_t} |f(\xi_t(u))| = \bar{V}_t |f|(x).$$

因此, 根据 (3.13), 可得

$$1 - |\psi(i\theta e^{\lambda_0 t}, x)| \geq 1 - \bar{V}_t(|\psi(i\theta)|)(x) \geq \bar{\Pi}_x(1 - |\psi(i\theta, \xi_t)|).$$

由 (1.3) 可得

$$\frac{\varphi(x, v(x))}{v(x)} \leq -\alpha(x) + \beta(x)v(x) + \frac{1}{2}v(x) \int_0^1 r^2 n(x, dr) + \int_1^\infty r n(x, dr) \leq -\alpha(x) + M(\|v\|_\infty + 1).$$

假设 c 和 γ 是 (3.3) 中的常数. 对于足够大的 t , 有 $1 - ce^{-\gamma t} > 0$, 从而, 由 $\bar{\Pi}_x$ 的定义, 有

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_x(1 - |\psi(i\theta, \xi_t)|) &\geq v(x)^{-1} e^{-M(\|v\|_\infty + 1)t} T_t(v(1 - |\psi(i\theta)|))(x) \\ &\geq e^{-M(\|v\|_\infty + 1)t} (1 - ce^{-\gamma t}) e^{\lambda_0 t} \langle v(1 - |\psi(i\theta)|), \psi_0 \rangle_m \frac{\phi_0(x)}{v(x)}, \end{aligned}$$

上面最后一个不等号利用了 (3.3).

根据 (3.5), 对 $|\theta| \in (0, \delta)$ 和足够大的 t , 有 $\|\psi(i\theta e^{\lambda_0 t})\|_\infty < 1$. 因此, 对任意的 $\theta \neq 0$, 有 $\|\psi(i\theta)\|_\infty < 1$.

综上, 结论成立. $\square$

引理 3.6 对于任意的 $\delta \in (0, -\frac{\lambda_0^*}{\lambda_0})$, 存在常数 $C > 0$, 使得对于足够大的 $|\theta|$, 有

$$\|\psi(i\theta)\|_\infty \leq C|\theta|^{-\delta}.$$

证明 对于任意的 $\delta \in (0, -\frac{\lambda_0^*}{\lambda_0})$, 存在 $\epsilon \in (0, 1)$, 使得

$$(1 + \epsilon)e^{\lambda_0^*} \leq e^{-\lambda_0 \delta}. \quad (3.20)$$

根据引理 3.2 和 3.5 可得, 存在 $j \geq 1$ 使得对于 $k \geq j$, 有

$$\sup_{\theta \in [1, e^{\lambda_0}]} \|\bar{V}_k(|\psi(i\theta)|)\|_\infty \leq \epsilon e^{-\|b\|_\infty}. \quad (3.21)$$

因此, 根据引理 3.3, 对于 $\theta \in [1, e^{\lambda_0}]$ 和 $n \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} |\bar{V}_{n+j}(\psi(i\theta))(x)| &\leq \bar{V}_{n+j}(|\psi(i\theta)|)(x) = \bar{V}_1 \bar{V}_{n+j-1}(|\psi(i\theta)|)(x) \\ &\leq (1 + \epsilon) T_1^*(\bar{V}_{n+j-1}(|\psi(i\theta)|))(x). \end{aligned}$$

通过迭代和 (3.9) 可得, 对于 $\theta \in [1, e^{\lambda_0}]$, 利用 (3.20) 得

$$\begin{aligned} |\bar{V}_{n+j}(\psi(i\theta))(x)| &\leq (1 + \epsilon)^n T_n^*(\bar{V}_j(|\psi(i\theta)|))(x) \\ &\leq (1 + \epsilon)^n T_n^*(1)(x) \leq (1 + c)(1 + \epsilon)^n e^{\lambda_0^* n} \langle 1, \psi_0^* \rangle_m \|\phi_0^*\|_\infty \\ &\leq (1 + c) \langle 1, \psi_0^* \rangle_m \|\phi_0^*\|_\infty e^{\lambda_0 \delta (j+1)} e^{-\lambda_0 \delta (n+j)} \theta^{-\delta}. \end{aligned}$$

根据 $\psi(i\theta e^{\lambda_0(n+j)})(x) = \bar{V}_{n+j}(\psi(i\theta))(x)$, 由此可得

$$\|\psi(i\theta)\|_\infty \leq C|\theta|^{-\delta}, \quad \theta \geq e^{\lambda_0 j}.$$

又由于 $\psi(-i\theta)(x) = \overline{\psi(i\theta)(x)}$, 因此,

$$\|\psi(i\theta)\|_\infty \leq C|\theta|^{-\delta}, \quad \theta \leq -e^{\lambda_0 j}.$$

综上, 引理结论成立. $\square$

命题 3.1 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, Y 是绝对连续型随机变量, 即存在密度函数 $g_\mu(y)$.

证明 根据注 2.1, 只需证明在 $\mu = \delta_x$ 时结论成立. 根据 $\psi(\theta, x) = \bar{V}_t(\psi(\theta e^{-\lambda_0 t}))(x)$ 可得

$$Y \stackrel{d}{=} e^{-\lambda_0 t} \sum_{u \in \mathcal{L}_t} Y^u,$$

其中 $\mathcal{L}_t$ 为分枝 Markov 过程 Z 在 t 时刻存活的粒子. 在给定 Z_t 的条件下, $\{Y^u, u \in \mathcal{L}_t\}$ 是一族独立随机变量并且 $Y^u \stackrel{d}{=} (Y, \mathbb{P}_{\delta_{\xi_t(u)}})$.

取定 $\delta \in (0, -\frac{\lambda_0^*}{\lambda_0})$ 和 $K > 0$ 使得 $K\delta > 1$. 对于任意的 Lebesgue 零测集 $B \subset (0, \infty)$, 有

$$\mathbb{P}_{\delta_x}(Y \in B) \leq P_{\delta_x}(\|Z_t\| \leq K) + \sum_{n=K+1}^{\infty} P_{\delta_x}\left(\|Z_t\| = n, e^{-\lambda_0 t} \sum_{u \in \mathcal{L}_t} Y^u \in B\right).$$

在给定 Z_t 并且 $\|Z_t\| = n > K$ 时, 对足够大的 $|\theta|$, 有

$$|P_{\delta_x}(e^{i\theta \sum_{u \in \mathcal{L}_t} Y^u} | Z_t)| \mathbf{1}_{\|Z_t\|=n} \leq C^n |\theta|^{-\delta n},$$

从而, $\sum_{u \in \mathcal{L}_t} Y^u$ 的特征函数 L^1 可积. 因此, $\sum_{u \in \mathcal{L}_t} Y^u$ 存在密度函数, 从而,

$$P_{\delta_x}\left(\|Z_t\| = n, e^{-\lambda_0 t} \sum_{u \in \mathcal{L}_t} Y^u \in B\right) = 0.$$

综上有

$$\mathbb{P}_{\delta_x}(Y \in B) \leq P_{\delta_x}(\|Z_t\| \leq K).$$

令 $t \rightarrow \infty$, 立即可得 $\mathbb{P}_{\delta_x}(Y \in B) = 0$, 即 Y 的分布关于 Lebesgue 测度是绝对连续的, 因此存在密度函数. $\square$

命题 3.2 对于任意的非零测度 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, Y 的密度函数在 $(0, \infty)$ 上是恒正的.

证明 由于 $\{Y, \mathbb{P}_{\delta_x}\}$ 与 $\{aW^Z, P_{\delta_x}\}$ 同分布, 其中 $a > 0$ 是常数, 再结合注 2.1, 只需证明在概率测度 P_{δ_x} 下, W^Z 的密度函数在 $(0, \infty)$ 上都是正的.

文献 [9, 命题 5.6] 中已经证明, 对于满足一定条件的分枝扩散过程, W^Z 的密度函数在 $(0, \infty)$ 上都是正的. 对于本文中的分枝 Markov 过程 $\{Z_t\}$, 利用相同的方法, 可以证明结论同样成立. 这里省略详细的证明. $\square$

定理 1.3 的证明 结合引理 2.2、命题 3.1 和 3.2 立即可得, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, W 的分布函数在 $(0, \infty)$ 上是绝对连续的, 并且密度函数 f_μ 满足, 对于任意的 $y > 0$, 有

$$f_\mu(y) \geq g_\mu(y) \langle v, \mu \rangle e^{-\langle v, \mu \rangle} > 0.$$

证毕. $\square$

3.3 定理 1.4 的证明

回顾 $\epsilon_0 = \frac{-\lambda_0^*}{\lambda_0}$.

第一部分, 我们先讨论小值概率问题. 根据引理 3.4 可得

$$e^{-\lambda_0^* t} \psi(e^{\lambda_0^* t}, x) = e^{-\lambda_0^* t} \bar{V}_t(\psi(1))(x) \rightarrow A(\psi(1)) \phi_0^*(x),$$

即 $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta^{\epsilon_0} \psi(\theta, x) = A(\psi(1)) \phi_0^*(x)$. 经计算知, 当 $\theta \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\mu(e^{-\theta W} \mid W > 0) &= \frac{1}{1 - e^{-\langle v, \mu \rangle}} (e^{-\langle \Phi(\theta), \mu \rangle} - e^{-\langle v, \mu \rangle}) \\ &= \frac{1}{e^{\langle v, \mu \rangle} - 1} (e^{\langle \psi(\theta)v, \mu \rangle} - 1) \sim \frac{1}{e^{\langle v, \mu \rangle} - 1} \langle \psi(\theta)v, \mu \rangle. \end{aligned}$$

综上所述,

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta^{\epsilon_0} \mathbb{P}_\mu(e^{-\theta W} \mid W > 0) = \frac{1}{e^{\langle v, \mu \rangle} - 1} \lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta^{\epsilon_0} \langle \psi(\theta)v, \mu \rangle = \frac{1}{e^{\langle v, \mu \rangle} - 1} A(\psi(1)) \langle v \phi_0^*, \mu \rangle.$$

因此, 根据 Tauberian 定理可得

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-\epsilon_0} \mathbb{P}_\mu(W \leq r \mid W > 0) = \frac{1}{e^{\langle v, \mu \rangle} - 1} A(\psi(1)) \frac{\langle v \phi_0^*, \mu \rangle}{\Gamma(\epsilon_0 + 1)}.$$

因此, $\lim_{r \rightarrow 0} r^{-\epsilon_0} \mathbb{P}_\mu(0 < W \leq r) = e^{-\langle v, \mu \rangle} A(\psi(1)) \langle v \phi_0^*, \mu \rangle / \Gamma(\epsilon_0 + 1)$.

第二部分, 我们讨论尾概率问题. 令 $G(s) := \int_0^s \mathbb{P}_\mu(W > r) dr$, 则 G 的 Laplace 变换为

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\theta r} dG(r) &= \int_0^\infty e^{-\theta r} \mathbb{P}_\mu(W > r) dr = \theta^{-1} \left(1 - \theta \int_0^\infty e^{-\theta r} \mathbb{P}_\mu(W \leq r) dr \right) \\ &= \theta^{-1} (1 - \mathbb{P}_\mu(e^{-\theta W})) = \theta^{-1} (1 - e^{-\langle \Phi(\theta), \mu \rangle}). \end{aligned}$$

根据 (3.6), 可得

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^{-1} \tilde{L}(\theta^{-1})^{-1} \Phi(\theta, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_0^* t} L(t)^{-1} \Phi(e^{-\lambda_0^* t}, x) = \phi_0(x),$$

其中 $L(t)$ 和 $\tilde{L}$ 的定义见 (1.14) 和 (1.15). 因此,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \tilde{L}(\theta^{-1})^{-1} \int_0^\infty e^{-\theta r} dG(r) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^{-1} \tilde{L}(\theta^{-1})^{-1} \langle \Phi(\theta), \mu \rangle = \langle \phi_0, \mu \rangle.$$

根据 Tauberian 定理可得 $\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{L}(r)^{-1} G(r) = \langle \phi_0, \mu \rangle$. 因此, 根据文献 [22] 可得

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \tilde{L}(r)^{-1} \mathbb{P}_\mu(W > r) = 0.$$

致谢 感谢两位审稿人对本文提出的宝贵建议.

参考文献

- 1 Seneta E. On recent theorems concerning the supercritical Galton-Watson process. Ann Math Statist, 1968, 39: 2098–2102
- 2 Heyde C C. Extension of a result of Seneta for the super-critical Galton-Watson process. Ann Math Statist, 1970, 41: 739–742
- 3 Harris T E. The Theory of Branching Processes. Berlin: Springer, 1963
- 4 Stigum B P. A theorem on the Galton-Watson process. Ann Math Statist, 1966, 37: 695–698

- 5 Athreya K B. On the absolute continuity of the limit random variable in the supercritical Galton-Watson branching process. *Proc Amer Math Soc*, 1971, 30: 563–565
- 6 Mörters P, Ortgiese M. Small value probabilities via the branching tree heuristic. *Bernoulli*, 2008, 14: 277–299
- 7 Biggins J D, Bingham N H. Large deviations in the supercritical branching process. *Adv in Appl Probab*, 1993, 25: 757–772
- 8 Jones O D. Large deviations for supercritical multitype branching processes. *J Appl Probab*, 2004, 41: 703–720
- 9 Hering H. The non-degenerate limit for supercritical branching diffusions. *Duke Math J*, 1978, 45: 561–600
- 10 Ren Y-X, Song R, Zhang R. Supercritical superprocesses: Proper normalization and non-degenerate strong limit. *Sci China Math*, 2019, in press
- 11 Li Z. *Measure-Valued Branching Markov Processes*. Heidelberg: Springer, 2011
- 12 Dynkin E B. Superprocesses and partial differential equations. *Ann Probab*, 1993, 21: 1185–1262
- 13 Ren Y-X, Song R, Zhang R. Central limit theorems for supercritical branching nonsymmetric Markov processes. *Ann Probab*, 2017, 45: 564–623
- 14 Schaefer H H. *Banach Lattices and Positive Operators*. New York: Springer, 1974
- 15 Ren Y-X, Song R, Zhang R. Limit theorems for some critical superprocesses. *Illinois J Math*, 2015, 59: 235–276
- 16 Davies E B, Simon B. Ultracontractivity and the heat kernel for Schrödinger operators and Dirichlet Laplacians. *J Funct Anal*, 1984, 59: 335–395
- 17 Liu R L, Ren Y-X, Song R. $L \log L$ criterion for a class of superdiffusions. *J Appl Probab*, 2009, 46: 479–496
- 18 Chen Z Q, Ren Y-X, Yang T. Skeleton decomposition and law of large numbers for supercritical superprocesses. *Acta Appl Math*, 2019, 159: 225–285
- 19 Eckhoff M, Kyprianou A E, Winkel M. Spines, skeletons and the strong law of large numbers for superdiffusions. *Ann Probab*, 2015, 43: 2594–2659
- 20 Kim P, Song R. Intrinsic ultracontractivity of non-symmetric diffusion semigroups in bounded domains. *Tohoku Math J (2)*, 2008, 60: 527–547
- 21 Ren Y-X, Song R, Zhang R. Williams decomposition for superprocesses. *Electron J Probab*, 2018, 23: 1–33
- 22 Seneta E. A Tauberian theorem of E. Landau and W. Feller. *Ann Probab*, 1973, 1: 1057–1058

On properties of a class of strong limits for supercritical superprocesses

Yan-xia Ren, Renming Song & Rui Zhang

Abstract Suppose that $X = \{X_t, t \geq 0; \mathbb{P}_\mu\}$ is a supercritical superprocess in a locally compact separable metric space E . Let ϕ_0 be a positive eigenfunction corresponding to the first eigenvalue λ_0 of the generator of the mean semigroup of X . Then $M_t := e^{-\lambda_0 t} \langle \phi_0, X_t \rangle$ is a positive martingale. Let M_∞ be the limit of M_t . It is known that M_∞ is non-degenerate iff the $L \log L$ condition is satisfied. When the $L \log L$ condition may not be satisfied, Ren et al. (2017) recently proved that there exist a non-negative function γ_t on $[0, \infty)$ and a non-degenerate random variable W such that for any finite nonzero Borel measure μ on E , $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t \langle \phi_0, X_t \rangle = W$, a.s.- $\mathbb{P}_\mu$. In this paper, we mainly investigate properties of W . We prove that W has strictly positive density on $(0, \infty)$. We also investigate the small value and tail probability problems of W .

Keywords superprocesses, supercritical, non-degenerate strong limit, absolute continuity, small value probability, tail probability

MSC(2010) 60J68

doi: 10.1360/N012018-00046