带移民的 n 维分枝过程的分枝性质以及衰减性质

王娟¹, 李俊平^{2*}

1. 上海理工大学理学院, 上海 200093;

2. 中南大学数学与统计学院, 长沙 410083

E-mail: jwang@usst.edu.cn, jpli@mail.csu.edu.cn

收稿日期: 2016-09-17; 接受日期: 2017-06-05; 网络出版日期: 2018-06-27; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771452, 11371374, 11571372 和 11526141) 资助项目

摘要 本文主要考虑带移民的 n 维分枝过程的分枝性质和衰减性质. 对于这类过程, 首先给出了分枝性质的等价条件, 得到了衰减指数的精确值 λ_Z , 同时进一步讨论 λ_Z -不变向量/测度和拟平稳分布.

关键词 n 维分枝过程 移民 分枝性质 衰减指数 不变向量 不变测度 拟平稳分布

MSC (2010) 主题分类 60J27, 60J35

1 引言

Markov 分枝过程在概率理论及其应用占有非常重要的地位, 参见文献 [1–3]. 在分枝结构下考虑移民问题, 主要有状态独立的移民和状态相依的移民两种. 对于前者, Sevast'yanov^[4] 和 Vatutin^[5,6] 考虑了带状态独立移民的分枝过程; 另一方面, 对于后者 (即状态相依的移民) 可追溯到 Pakes^[7], 他考虑了在 0 状态的具有移民的分枝过程; 后来, Yamazato^[8] 及 Pakes 和 Tavaré^[9] 研究了连续时间情形; 最近, 王娟^[10] 及 Meng 和 Li^[11] 则讨论了带移民的 n 维分枝过程的灭绝行为.

连续时间 Markov 链理论及其应用具有很长的发展历史, 过程的长时间行为是 Markov 链的重要问题. Van Doorn^[12] 考虑了生灭过程的拟平稳分布问题, Zhang 和 Li^[13] 研究了 $M/M/c$ 的性质. Yaglom^[14] 考虑了 Galton-Watson 过程的拟平稳分布问题. Pakes^[7] 研究了具有状态相依移民的分枝过程. Kingman^[15] 于 1963 年发展了衰减指数的概念. Pollett^[16] 及 Nair 和 Pollett^[17] 讨论了衰减指数和 μ -不变测度. Li^[18] 考虑了 2 维分枝过程的衰减性质.

本文研究带移民的 n 维分枝过程的分枝性质和衰减性质, 过程的演变规律可以直观地描述如下:

- (i) 考虑一个由 n 种粒子组成的系统. 第 i 种粒子的寿命服从参数为 θ_i ($i = 1, \dots, n$) 的指数分布.
- (ii) 粒子的繁殖相互独立. 当一个第 i 种粒子死去时, 它立即依概率 $p_{j_1, \dots, j_n}^{(i)}$ 由 j_1 个第 1 种粒子, $\dots, j_n$ 个第 n 种粒子取代.
- (iii) 移民可在任何状态发生.

英文引用格式: Wang J, Li J P. The branching and decay properties of n -type Markov branching processes with immigration (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 939–954, doi: 10.1360/SCM-2016-0576

(iv) 外部迁入系统的粒子与原系统中粒子的演变规律相同.

为给出带移民的 n 维分枝过程的数学定义, 本文采用如下记号:

(C-1) $\mathbf{Z}_+^n = \{(i_1, \dots, i_n) : i_1, \dots, i_n \in \mathbf{Z}_+\}$, $|\mathbf{i}| = \sum_{k=1}^n i_k$, 其中 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{Z}_+^n$.

(C-2) $[0, 1]^n = \{(u_1, \dots, u_n) : 0 \leq u_1, \dots, u_n \leq 1\}$.

(C-3) $\chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\cdot)$ 表示 $\mathbf{Z}_+^n$ 的示性函数.

(C-4) $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1_i, \dots, 0)$ 是 $[0, 1]^n$ 上的单位向量.

下面给出带移民的 n 维分枝过程的定义.

定义 1.1 q - 矩阵 $Q = (q_{ij}; \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 称为一个带移民的 n 维 Q - 矩阵 (简称为 n TBI Q - 矩阵 (n -type Q -matrix with immigration)), 如果

$$q_{ij} = \begin{cases} a_{\mathbf{j}} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j}), & \text{若 } |\mathbf{i}| = 0, \\ \sum_{k=1}^n i_k b_{\mathbf{j}-\mathbf{i}+\mathbf{e}_k}^{(k)} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j}-\mathbf{i}+\mathbf{e}_k) + a_{\mathbf{j}-\mathbf{i}} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j}-\mathbf{i}), & \text{若 } |\mathbf{i}| > 0, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad (1.1)$$

其中

$$\begin{cases} a_{\mathbf{j}} \geq 0 \quad (\mathbf{j} \neq \mathbf{0}), \quad 0 < \sum_{\mathbf{j} \neq \mathbf{0}} a_{\mathbf{j}} \leq -a_{\mathbf{0}} < \infty, \\ b_{\mathbf{j}}^{(k)} \geq 0 \quad (\mathbf{j} \neq \mathbf{e}_k), \quad 0 < \sum_{\mathbf{j} \neq \mathbf{e}_k} b_{\mathbf{j}}^{(k)} \leq -b_{\mathbf{e}_k}^{(k)} < \infty, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1.2)$$

注 1.1 n TBI Q - 矩阵不一定保守. $\{a_{\mathbf{j}}; \mathbf{j} \neq \mathbf{0}\}$ 表示 “移民速率”, 而 $\{b_{\mathbf{j}}; \mathbf{j} \neq \mathbf{e}_k\}$ 表示 “分枝速率”.

定义 1.2 带移民的 n 维分枝过程 (简称为 n TBIP (n -type branching process with immigration)) 是定义在状态空间 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的连续时间 Markov 链, 其转移函数 $P(t) = (p_{ij}(t); \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 满足 Kolmogorov 向前方程

$$P^T(t) = P(t)Q, \quad (1.3)$$

其中 Q 如 (1.1) 和 (1.2) 定义.

本文将用 $P(t)$ 表示转移函数和过程, 这种表示已经被普遍接受且不会造成混乱.

众所周知, 衰减指数和拟平稳分布与所谓的 μ - 不变测度/向量存在着密切关系. 为方便起见, 简单地重述如下:

定义 1.3 设 $Q = (q_{ij}; \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 为 n TBI Q - 矩阵, $\mathbf{Z}_+^n$ 为互通类. 假定 $\mu \geq 0$, 则正数序列 $(m_{\mathbf{i}}; \mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 称为 Q 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上 μ - 半不变测度, 如果

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n} m_{\mathbf{i}} q_{ij} \leq -\mu m_{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n. \quad (1.4)$$

若 (1.4) 中等号成立, 则称 $(m_{\mathbf{i}}; \mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 为 Q 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的 μ - 不变测度.

定义 1.4 设 $P(t) = (p_{ij}(t); \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 为 n TBIP, $\mathbf{Z}_+^n$ 为互通类. 假定 $\mu \geq 0$, 则正数序列 $(m_{\mathbf{i}}; \mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 称为 $p_{ij}(t)$ 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的 μ - 半不变测度, 如果

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n} m_{\mathbf{i}} p_{ij}(t) \leq e^{-\mu t} m_{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n. \quad (1.5)$$

若 (1.5) 中等号成立, 则 $(m_{\mathbf{i}}; \mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 称为 $P(t)$ 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的 μ - 不变测度.

类似可以定义半不变向量/不变向量.

对于带移民的一维 Markov 分枝过程, 衰减指数的精确值是周知的. 本文研究带移民的 n 维分枝过程的相关性质, 包括分枝性、衰减指数、不变测度和拟平稳分布. 与一维情形不同, n 维情形系统中一类粒子的分裂可能引起另一类粒子的数目发生改变. 因此, 一维情形中使用的方法不再适用于 n 维情形.

本文结构如下: 第 2 节给出正则性和唯一性以及一些预备知识; 第 3 节讨论过程的分枝性质; 第 4 节得到衰减指数的精确值, 并且给出不变向量/测度以及拟平稳分布.

2 预备知识和正则性

为了研究 n TBIPs 的性质, 我们引进发生函数 $\{a_j; j \in \mathbf{Z}_+^n\}$ 和 $\{b_j^{(i)}; j \in \mathbf{Z}_+^n\}$ ($i = 1, \dots, n$), 如下定义:

$$A(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=0}^{\infty} a_{j_1, \dots, j_n} u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n},$$

$$B_i(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=0}^{\infty} b_{j_1, \dots, j_n}^{(i)} u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

为了方便书写, 记 $\{a_{(j_1, \dots, j_n)}; (j_1, \dots, j_n) \in \mathbf{Z}_+^n\}$ 为 $\{a_{j_1, \dots, j_n}; (j_1, \dots, j_n) \in \mathbf{Z}_+^n\}$, $\{b_{(j_1, \dots, j_n)}^{(i)}; (j_1, \dots, j_n) \in \mathbf{Z}_+^n\}$ 为 $\{b_{j_1, \dots, j_n}^{(i)}; (j_1, \dots, j_n) \in \mathbf{Z}_+^n\}$. 显然, $A(u_1, \dots, u_n)$ 以及每个 $B_i(u_1, \dots, u_n)$ 至少在 $[0, 1]^n$ 上有定义.

为了下面的讨论, 需要做一些准备. 本节首先讨论发生函数 $\{B_i(u_1, \dots, u_n); i = 1, \dots, n\}$ 和 $\{A(u_1, \dots, u_n)\}$ 的性质. 令

$$A_j(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial A(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$B_{ij}(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial B_i(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$g_{ij}(u_1, \dots, u_n) = \delta_{ij} - \frac{B_{ij}(u_1, \dots, u_n)}{b_{e_i}^{(i)}}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

其中 $u_1, \dots, u_n \in [0, 1]$, δ_{ij} 是 δ -函数. 矩阵 $(B_{ij}(u_1, \dots, u_n))$ 和 $(g_{ij}(u_1, \dots, u_n))$ 分别记为 $B(u_1, \dots, u_n)$ 和 $G(u_1, \dots, u_n)$.

定义 2.1 发生函数 $\{B_i(u_1, \dots, u_n); i = 1, \dots, n\}$ 称为奇异的, 如果存在 $n \times n$ 矩阵 M , 使得

$$(B_1(u_1, \dots, u_n), \dots, B_n(u_1, \dots, u_n))^T = M \cdot (u_1, \dots, u_n)^T,$$

其中 $(x_1, \dots, x_n)^T$ 表示向量 $(x_1, \dots, x_n)$ 的转置.

定义 2.2 非负 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为强正则的, 如果存在 $N > 0$, 使得 $A^N > 0$.

如果 $\{B_i(u_1, \dots, u_n); i = 1, \dots, n\}$ 奇异, 则每个粒子只有一个后代, 此时过程等价于一个有限状态的 Markov 链. 为避免退化情形, 假定 $\sum_{i=1}^n B_i(0, \dots, 0) > 0$ 以及下列条件成立:

- (A-1) $\{B_i(u_1, \dots, u_n); i = 1, \dots, n\}$ 非奇异;
- (A-2) $B_{ij}(1, \dots, 1) < +\infty, i, j = 1, \dots, n$;
- (A-3) $G(1, \dots, 1)$ 强正则.

以上条件保证了 $\mathbf{Z}_+^n$ 是互通的. 下述引理是文献 [19, 引理 2.8] 的直接推论, 故证明省略.

引理 2.1 设 $G(1, \dots, 1)$ 强正则且 $\{B_i(u_1, \dots, u_n); i = 1, \dots, n\}$ 非奇异, 则方程

$$\begin{cases} B_1(u_1, \dots, u_n) = 0, \\ B_2(u_1, \dots, u_n) = 0, \\ \vdots \\ B_n(u_1, \dots, u_n) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

在 $[0, 1]^n$ 上至多有两个解. 令 $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ 和 $\rho(u_1, \dots, u_n)$ 分别表示方程 (2.1) 的最小非负解和 $B(u_1, \dots, u_n)$ 的最大特征值, 则

(i) 如果 $\sum_{k=1}^n B_k(1, \dots, 1) = 0$ 且 $\rho(1, \dots, 1) \leq 0$, 则 $\mathbf{q} = \mathbf{1}$; 如果 $\sum_{k=1}^n B_k(1, \dots, 1) = 0$ 且 $\rho(1, \dots, 1) > 0$, 则 $\mathbf{q} < \mathbf{1}$, 即 $q_1, \dots, q_n < 1$.

(ii) 如果 $\sum_{k=1}^n B_k(1, \dots, 1) < 0$, 则方程 (2.1) 有唯一解 $\mathbf{q}$, 且 $\mathbf{q} < \mathbf{1}$, 即 $q_1, \dots, q_n < 1$.

(iii) $\rho(q_1, \dots, q_n) \leq 0$.

引理 2.2 令 $P(t) = (p_{ij}(t); i, j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 和 $\Phi(\lambda) = (\phi_{ij}(\lambda); i, j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 分别表示 Feller 最小 Q -函数和 Q -预解式, 则对任意的 $i \in \mathbf{Z}_+$ 和 $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$, 有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_i(t, u_1, \dots, u_n)}{\partial t} \\ &= A(u_1, \dots, u_n) \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} p_{ij}(t) u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n} + \sum_{k=1}^n B_k(u_1, \dots, u_n) \frac{\partial F_i(t, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_k}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中

$$F_i(t, u_1, \dots, u_n) = \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} p_{ij}(t) u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n},$$

或等价地,

$$\begin{aligned} & \lambda \Phi_i(\lambda, u_1, \dots, u_n) - u_1^{i_1} \cdots u_n^{i_n} \\ &= A(u_1, \dots, u_n) \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} \phi_{ij}(\lambda) u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n} + \sum_{k=1}^n B_k(u_1, \dots, u_n) \frac{\partial \Phi_i(\lambda, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_k}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中

$$\Phi_i(\lambda, u_1, \dots, u_n) = \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} \phi_{ij}(\lambda) u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n}.$$

证明 由 Kolmogorov 向前方程, 对任意的 $i, j \in \mathbf{Z}_+^n$, 有

$$p_{ij}^T(t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}_+^n} p_{i\mathbf{k}}(t) \left[\sum_{l=1}^n k_l b_{j-\mathbf{k}+\mathbf{e}_l}^{(l)} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j} - \mathbf{k} + \mathbf{e}_l) + a_{j-\mathbf{k}} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \right]$$

在方程的两边同乘以 $u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n}$ 并对 $\mathbf{Z}_+^n$ 求和可得 (2.2). 对 (2.2) 进行 Laplace 变换可得 (2.3). $\square$

引理 2.3 假设 $G(1, \dots, 1)$ 强正则且 $\{B_i(u_1, \dots, u_n); i = 1, \dots, n\}$ 非奇异. 如果 $\rho(1, \dots, 1) \leq 0$ 且 $\sum_{k=1}^n B_k(1, \dots, 1) = 0$, 则 n TBIP 唯一. 进一步, n TBIP 诚实当且仅当 Q 保守.

证明 由引理 2.1 可知, 如果 $\rho(1, \dots, 1) \leq 0$, 则 $\mathbf{q} = \mathbf{1}$.

(i) 若 $A(1, \dots, 1) = 0$, 定义 $r^* = \sup\{r \geq 0; B_k(u_1, \dots, u_n) = r, k = 1, \dots, n \text{ 在 } [0, 1]^n \text{ 上有解}\}$. 由文献 [19, 引理 2.9 和 2.10] 知, $r^* > 0$ 且对任意 $r \in (0, r^*]$, 存在 $u_1(r), \dots, u_n(r)$ 使得

$$B_k(u_1(r), \dots, u_n(r)) = r, \quad k = 1, \dots, n$$

且

$$\lim_{r \downarrow 0} u_k(r) = 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

在 (2.2) 中令 $u_k = u_k(r)$ ($k = 1, \dots, n$), 然后令 $r \downarrow 0$, 可得

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} p_{ij}(t) \geq 1$$

即 $\sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} p_{ij}(t) = 1$, 从而 Q -过程诚实. 因此, n TBIP 唯一.

(ii) 若 $A(1, \dots, 1) < 0$, 定义 Q -矩阵 $\tilde{Q}$ 如下:

$$\tilde{q}_{ij} = \begin{cases} 0, & i = \Delta, \quad j \in \mathbf{Z}_+^n \cup \{\Delta\}, \\ d_i, & i \in \mathbf{Z}_+^n, \quad j = \Delta, \\ q_{ij}, & i, j \in \mathbf{Z}_+^n, \end{cases}$$

其中 Δ 是系统外的一个状态且 $d_i = -\sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n} q_{ik}$. 可以证明 Feller 最小 $\tilde{Q}$ -函数 $(\tilde{p}_{ij}(t))$ 是诚实的. 事实上, 由 Kolmogorov 向前方程知,

$$\dot{\tilde{p}}_{ij}^T(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n} \tilde{p}_{ik}(t) \tilde{q}_{kj} + \tilde{p}_{i\Delta}(t) \tilde{q}_{\Delta j}, \quad i, j \in \mathbf{Z}_+^n \cup \{\Delta\}$$

在上述方程两边同乘以 $u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n}$ 并对 $j \in \mathbf{Z}_+^n$ 求和可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}_i(t, u_1, \dots, u_n)}{\partial t} + \tilde{p}_{i\Delta}^T(t) &= A(u_1, \dots, u_n) \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} \tilde{p}_{ij}(t) u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n B_k(u_1, \dots, u_n) \frac{\partial \tilde{F}_i(t, u_1, \dots, u_n)}{\partial u_k} - \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n} \tilde{p}_{ik}(t) \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} q_{kj}, \end{aligned}$$

其中 $\tilde{F}_i(t, u_1, \dots, u_n) = \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} \tilde{p}_{ij}(t) u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n}$. 类似 (i) 可得 $(\tilde{p}_{ij}(t))$ 诚实.

容易看出 $(\tilde{p}_{ij}(t); i, j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 为满足 Kolmogorov 向前方程的 Q -函数. 如果存在另一 Q -函数 $(p_{ij}(t); i, j \in \mathbf{Z}_+^n)$, 定义

$$\hat{p}_{ij}(t) = \begin{cases} p_{ij}(t), & \text{若 } i, j \in \mathbf{Z}_+^n, \\ \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n} d_k \int_0^t p_{ik}(u) du, & \text{若 } i \in \mathbf{Z}_+^n, \quad j = \Delta, \\ \delta_{\Delta j}, & \text{若 } i = \Delta, \end{cases}$$

易证 $(\hat{p}_{ij}(t))$ 是诚实 $\tilde{Q}$ -函数. 因此, $(\tilde{p}_{ij}(t); i, j \in \mathbf{Z}_+^n) = (p_{ij}(t); i, j \in \mathbf{Z}_+^n)$. □

定理 2.1 令 Q 为如 (1.1) 和 (1.2) 定义的 n TBI Q - 矩阵, 则存在唯一的 n TBIP, 即 Feller 最小过程.

证明 由引理 2.3, 我们只需考虑 $\rho(1, \dots, 1) > 0$ 或 $\sum_{k=1}^n B_k(1, \dots, 1) < 0$ 的情形. 由文献 [20], 我们只需证明 Kolmogorov 向前方程

$$\begin{cases} \eta(\lambda I - Q) = 0, & \eta_j \geq 0, \quad j \in \mathbf{Z}_+^n, \\ \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} \eta_j < +\infty \end{cases} \quad (2.4)$$

只有零解. 假设方程有非零解, 不妨令 $\eta = (\eta_j; j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 为方程 (2.4) 对应 $\lambda = 1$ 的非零解, 则由 (2.4), 可得

$$\eta_j = \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n} \eta_k \left(\sum_{i=1}^n k_i b_{j-k+e_i}^{(i)} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(j-k+e_i) + a_{j-k} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(j-k) \right). \quad (2.5)$$

在 (2.5) 的两边同乘以 $u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n}$ 且进行一些代数运算可得

$$\eta(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n B_i(u_1, \dots, u_n) \cdot \frac{\partial \eta(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} + A(u_1, \dots, u_n) \eta(u_1, \dots, u_n).$$

即

$$(1 - A(u_1, \dots, u_n)) \eta(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n B_i(u_1, \dots, u_n) \cdot \frac{\partial \eta(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i}. \quad (2.6)$$

如果 $\rho(1, \dots, 1) > 0$ 或 $\sum_{k=1}^n B_k(1, \dots, 1) < 0$, 则由引理 2.1 和 Q 的不可约性可知, (2.1) 有解

$$(q_1, \dots, q_n) \in (0, 1)^n.$$

在 (2.6) 中令 $(u_1, \dots, u_n) = (q_1, \dots, q_n)$, 则 (2.6) 右边等于 0, 从而方程左边必为 0, 这表明 $\eta_j = 0$ ($\forall j \in \mathbf{Z}_+^n$). $\square$

3 分枝性质

本节考虑 n TBIP 的分枝性质.

定理 3.1 令 $P(t) = (p_{ij}(t); i, j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 为转移函数, 则以下陈述等价:

- (i) $P(t)$ 是 Feller 最小 Q - 函数, 其中 Q 如 (1.1) 和 (1.2);
- (ii) 对任意 $i \in \mathbf{Z}_+^n, t \geq 0, s \in [-1, 1]^n$, 有

$$F_i(t, s) = F_0(t, s) \cdot \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} \tilde{p}_{e_k j}(t) s^j \right)^{i_k}, \quad (3.1)$$

其中 $F_i(t, s) = \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} p_{ij}(t) s^j$ ($i \in \mathbf{Z}_+^n, s \in [-1, 1]^n, s^j = \prod_{k=1}^n s_k^{j_k}$) 并且 $(\tilde{p}_{e_k j}(t); j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 是 Feller 最小 $\tilde{Q}$ - 函数, $\tilde{Q}$ 是 n 维分枝 Q - 矩阵 (不一定保守).

(iii) 对任意 $\mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n$, $t \geq 0$, $\mathbf{s} \in [-1, 1]^n$, 有

$$F_{\mathbf{i}}(t, \mathbf{s}) = F_{\mathbf{0}}(t, \mathbf{s}) \cdot \prod_{k=1}^n \left(\frac{F_{\mathbf{e}_k}(t, \mathbf{s})}{F_{\mathbf{0}}(t, \mathbf{s})} \right)^{i_k}. \quad (3.2)$$

特别地, 对任意 $\mathbf{i} \neq \mathbf{0}$, 有

$$p_{\mathbf{i}\mathbf{0}}(t) = p_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(t) \cdot \prod_{k=1}^n \left(\frac{p_{\mathbf{e}_k\mathbf{0}}(t)}{p_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(t)} \right)^{i_k}. \quad (3.3)$$

证明 (ii) $\Rightarrow$ (iii) 显然成立. 因此, 只需证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 和 (iii) $\Rightarrow$ (i). 首先证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 如果 (i) 成立, 则 $P^T(t) = P(t)Q$. 现在证明 (3.1). 定义 $\tilde{Q} = (\tilde{q}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}; \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 如下:

$$\tilde{q}_{\mathbf{i}\mathbf{j}} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n i_k b_{\mathbf{j}-\mathbf{i}+\mathbf{e}_k}^{(k)} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j}-\mathbf{i}+\mathbf{e}_k), & \text{若 } |\mathbf{i}| > 0, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

且 $(\tilde{p}_{\mathbf{e}_k\mathbf{j}}(t); \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 为 Feller 最小 $\tilde{Q}$ -函数, 则由文献 [21], 可得

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n} \tilde{p}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}(t) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n} \tilde{p}_{\mathbf{e}_k\mathbf{j}}(t) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \right)^{i_k}.$$

定义 $\hat{P}(t) = (\hat{p}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}(t); \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$, 由

$$\hat{p}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}(t) = \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{j}} p_{\mathbf{0}\mathbf{k}}(t) \tilde{p}_{\mathbf{i}\mathbf{j}-\mathbf{k}}(t)$$

易知 $\hat{P}(t)$ 为 Q -函数.

现在证明 $\hat{P}(t)$ 满足 Kolmogorov 向前方程 $\hat{P}^T(t) = \hat{P}(t)Q$. 定义 $\hat{F}_{\mathbf{i}}(t, \mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n} \hat{p}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}(t) \mathbf{s}^{\mathbf{j}}$, 则

$$\hat{F}_{\mathbf{i}}(t, \mathbf{s}) = F_{\mathbf{0}}(t, \mathbf{s}) \cdot \prod_{k=1}^n \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n} \tilde{p}_{\mathbf{e}_k\mathbf{j}}(t) \mathbf{s}^{\mathbf{j}} \right)^{i_k}, \quad \mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n.$$

证明 $\hat{F}_{\mathbf{i}}(t, \mathbf{s})$ 满足 (3.1). 注意到

$$\frac{\partial F_{\mathbf{0}}(t, \mathbf{s})}{\partial t} = \sum_{k=1}^n B_k(\mathbf{s}) \frac{\partial F_{\mathbf{0}}(t, \mathbf{s})}{\partial s_k} + A(\mathbf{s}) F_{\mathbf{0}}(t, \mathbf{s}),$$

容易看出 $\hat{F}_{\mathbf{i}}(t, \mathbf{s})$ 满足

$$\frac{\partial \hat{F}_{\mathbf{i}}(t, \mathbf{s})}{\partial t} = \sum_{k=1}^n B_k(\mathbf{s}) \frac{\partial \hat{F}_{\mathbf{i}}(t, \mathbf{s})}{\partial s_k} + A(\mathbf{s}) \hat{F}_{\mathbf{i}}(t, \mathbf{s}),$$

这表明 $\hat{P}^T(t) = \hat{P}(t)Q$. 根据定理 2.1, 必有 $\hat{P}(t) = P(t)$, 从而 (3.1) 成立. (ii) 得证.

接下来证明 (iii) $\Rightarrow$ (i). 首先 (3.3) 表明对所有的 $t > 0$ 和 $\mathbf{s} \in (0, 1)^n$, 有

$$F_{\mathbf{e}_k}(t, \mathbf{s}) \leq F_{\mathbf{0}}(t, \mathbf{s}).$$

进一步证明存在 $\tilde{t} > 0$ 和 $\tilde{s} \in (0, 1)^n$ 使得

$$F_{e_k}(\tilde{t}, \tilde{s}) < F_0(\tilde{t}, \tilde{s}).$$

事实上, 假设对所有的 $t > 0$ 和 $s \in (0, 1)^n$, $F_{e_k}(t, s) = F_0(t, s)$ 成立. 又 $F_{e_k}(t, s)$ 和 $F_0(t, s)$ 是关于 $t > 0$ 以及 $s \in [0, 1]^n$ 的连续函数, 从而对所有的 $t > 0$ 和 $s \in [0, 1]^n$ 都有 $F_{e_k}(t, s) = F_0(t, s)$. 所以,

$$p_{e_k j}(t) = p_{0j}(t), \quad t \geq 0, \quad j \in \mathbf{Z}_+^n$$

与 $\lim_{t \downarrow 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$ 矛盾.

由 (3.2) 和 $F_{e_k}(\tilde{t}, \tilde{s}) < F_0(\tilde{t}, \tilde{s})$ 知,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F_i(\tilde{t}, \tilde{s}) = 0.$$

这表明对所有的 $j \in \mathbf{Z}_+^n$ 有 $\lim_{i \rightarrow \infty} p_{ij}(\tilde{t}) = 0$. 因此, $P(t) = (p_{ij}(t); i, j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 是 Feller-Reuter-Riley 转移函数. 由文献 [22] 可知, 对应的 Q - 矩阵 $Q = (q_{ij}; i, j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 稳定, 且进一步 $P(t)$ 为 Feller 最小 Q - 函数. 又 (3.2) 可以改写为

$$F_i(t, s) \cdot \prod_{k=1}^n F_0^{i_k}(t, s) = F_0(t, s) \cdot \prod_{k=1}^n F_{e_k}^{i_k}(t, s).$$

定义 $b_0^{(k)} = q_{e_k 0}$ ($k = 1, \dots, n$) 和 $y_j = q_{0j}$ ($j \in \mathbf{Z}_+^n$). 对上述等式两边关于 t 微分并令 $t = 0$ 可得对任意 $i \neq 0$, 有

$$\begin{aligned} F_i^T(0, s) \cdot \prod_{k=1}^n F_0^{i_k}(0, s) + F_i(0, s) \cdot \sum_{l=1}^n \frac{\prod_{k=1}^n F_0^{i_k}(0, s)}{F_0(0, s)} \cdot i_l \cdot F_0^T(0, s) \\ = F_0^T(0, s) \cdot \prod_{k=1}^n F_{e_k}^{i_k}(0, s) + F_0(0, s) \cdot \sum_{l=1}^n \frac{\prod_{k=1}^n F_{e_k}^{i_k}(0, s)}{F_{e_l}(0, s)} \cdot i_l \cdot F_{e_l}^T(0, s), \end{aligned}$$

其中 $F_i^T(t, s) = \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} p_{ij}^T(t) s^j$. 所以,

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} q_{ij} s^j = - \left(\sum_{k=1}^n i_k - 1 \right) \cdot \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} y_j s^{j+i} + \sum_{k=1}^n i_k \cdot \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} q_{e_k j} s^{j+i-e_k}.$$

比较上述等式两边 s^j 的系数可知,

$$q_{ij} = \begin{cases} y_j \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(j), & \text{若 } |i| = 0, \\ \sum_{k=1}^n i_k (q_{e_k j-i+e_k} - y_{j-i}) \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(j-i+e_k) + y_{j-i} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(j-i), & \text{若 } |i| > 0, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

又 $q_{ij} \geq 0$ ($\sum_{k=1}^n i_k > 0, j > i$) 且 $q_{ii} \leq 0$, 从而,

$$b_{e_k}^{(k)} := q_{e_k e_k} - y_0 \leq 0, \quad b_{j+e_k}^{(k)} := q_{e_k j+e_k} - y_j \geq 0, \quad j > 0.$$

因此,

$$q_{ij} = \begin{cases} y_j \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j}), & \text{若 } |\mathbf{i}| = 0, \\ \sum_{k=1}^n i_k b_{\mathbf{j}-\mathbf{i}+\mathbf{e}_k}^{(k)} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j}-\mathbf{i}+\mathbf{e}_k) + y_{\mathbf{j}-\mathbf{i}} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j}-\mathbf{i}), & \text{若 } |\mathbf{i}| > 0, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

与 (1.1) 比较可知, Q 具有 (1.1) 的形式且 $a_j = y_j$ ($j \in \mathbf{Z}_+^n$). 从而, 根据连续时间 Markov 链的基本理论知识可得

$$\sum_{j \neq \mathbf{0}} y_j \leq -y_{\mathbf{0}} < +\infty, \quad \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} \left(y_j + \sum_{k=1}^n i_k b_{\mathbf{j}-\mathbf{i}+\mathbf{e}_k}^{(k)} \right) = \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} q_{ij} \leq 0.$$

从而,

$$\sum_{j \neq \mathbf{e}_k} b_j^{(k)} \leq -b_{\mathbf{e}_k}^{(k)} < +\infty.$$

所以, Q 具有形如 (1.1) 和 (1.2) 的表达式且 $a_j = y_j$ ($j \in \mathbf{Z}_+^n$) (不一定保守). $\square$

4 衰减性质

本节讨论非常返情形下 n TBIP 的衰减性质.

定理 4.1 假设 $G(1, \dots, 1)$ 强正则, $\{B_i(u_1, \dots, u_n); i = 1, \dots, n\}$ 非奇异且 $\mathbf{Z}_+^n$ 为互通类, 则

$$\lambda_Z \geq -A(q_1, \dots, q_n),$$

其中 $(q_1, \dots, q_n)$ 为引理 2.1 中 (2.1) 的最小非负解.

证明 由文献 [22, 命题 5.4.1] 可知, 只需证明存在 Q 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的 $-A(q_1, \dots, q_n)$ - 半不变向量. 事实上, 由引理 2.1 可知, 方程 (2.1) 具有最小非负解 $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in [0, 1]^n$.

定义

$$y_{\mathbf{k}} = q_1^{k_1} \cdots q_n^{k_n}, \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}_+^n,$$

则 $y_{\mathbf{k}} > 0, \forall \mathbf{k} \in \mathbf{Z}_+^n$, 而且,

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}_+^n} q_{\mathbf{0}\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}_+^n} a_{\mathbf{k}} q_1^{k_1} \cdots q_n^{k_n} = A(q_1, \dots, q_n) = A(q_1, \dots, q_n) y_{\mathbf{0}}.$$

对任意 $\mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \mathbf{0}, i = 1, \dots, n$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}_+^n} q_{\mathbf{j}\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}} &= \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{j}-\mathbf{1}} \left(\sum_{i=1}^n j_i b_{\mathbf{k}-\mathbf{j}+\mathbf{e}_i}^{(i)} \right) q_1^{k_1} \cdots q_n^{k_n} + \sum_{\mathbf{k} \geq \mathbf{j}} a_{\mathbf{k}-\mathbf{j}} q_1^{k_1} \cdots q_n^{k_n} \\ &= \sum_{i=1}^n B_i(q_1, \dots, q_n) j_i q_1^{j_1} \cdots q_i^{j_i-1} \cdots q_n^{j_n} + A(q_1, \dots, q_n) q_1^{j_1} \cdots q_n^{j_n} \\ &= A(q_1, \dots, q_n) y_{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

这表明 $(y_{\mathbf{j}}; \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 是 Q 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的 $-A(q_1, \dots, q_n)$ - 不变向量. 所以, $\lambda_Z \geq -A(q_1, \dots, q_n)$. $\square$

定理 4.1 给出了衰减指数的下界, 以下定理将进一步给出衰减指数的精确值.

定理 4.2 假设 $G(1, \dots, 1)$ 强正则, $\{B_i(u_1, \dots, u_n); i = 1, \dots, n\}$ 非奇异, 则

$$\lambda_Z = -A(q_1, \dots, q_n),$$

其中 $(q_1, \dots, q_n)$ 为引理 2.1 中 (2.1) 的最小非负解.

证明 由定理 4.1, 我们只需证明 $\lambda_Z \leq -A(q_1, \dots, q_n)$. 类似定理 2.1 的证明, 仍有 $q_1, \dots, q_n > 0$. 由 Kolmogorov 向前方程知,

$$\frac{\partial}{\partial t} F_j(u_1, \dots, u_n, t) = \sum_{i=1}^n B_i(u_1, \dots, u_n) \frac{\partial}{\partial u_i} F_j(u_1, \dots, u_n, t) + A(u_1, \dots, u_n) F_j(u_1, \dots, u_n, t),$$

其中 $F_j(u_1, \dots, u_n, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}_+^n} p_{j\mathbf{k}}(t) u_1^{k_1} \cdots u_n^{k_n}$, $u_1, \dots, u_n \in (-1, 1)$.

(i) 如果 $(q_1, \dots, q_n) < \mathbf{1}$, 定义

$$\hat{p}_{ij}(t) = e^{-A(q_1, \dots, q_n)t} p_{ij}(t) \frac{q_1^{j_1} \cdots q_n^{j_n}}{q_1^{i_1} \cdots q_n^{i_n}}, \quad \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n, \quad t \geq 0, \quad (4.1)$$

则由文献 [16] 可知, $\hat{P}(t) = (\hat{p}_{ij}(t); \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 是 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的平稳且诚实的转移函数. 而且, 易知其 Q - 矩阵 $\hat{Q} = (\hat{q}_{ij}; \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 有如下形式:

$$\hat{q}_{ij} = \begin{cases} \hat{a}_j \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j}), & \text{若 } |\mathbf{i}| = 0, \\ \sum_{k=1}^n i_k \hat{b}_{j-\mathbf{i}+\mathbf{e}_k}^{(k)} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j}-\mathbf{i}+\mathbf{e}_k) + \hat{a}_{j-\mathbf{i}} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j}-\mathbf{i}), & \text{若 } |\mathbf{i}| > 0, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

其中

$$\hat{a}_j = a_j q_1^{j_1} \cdots q_n^{j_n} - A(q_1, \dots, q_n) \delta_{0j}, \quad \hat{b}_j^{(i)} = b_j^{(i)} q_1^{j_1} \cdots q_n^{j_n}, \quad \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n.$$

显然, $\hat{Q}$ 是保守 n TBI Q - 矩阵. 记

$$\begin{aligned} \hat{A}(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n} \hat{a}_j^{(i)} u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n}, \\ \hat{B}_i(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n} \hat{b}_j^{(i)} u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \hat{A}(u_1, \dots, u_n) &= A(q_1 u_1, \dots, q_n u_n) - A(q_1, \dots, q_n), \\ \hat{B}_i(u_1, \dots, u_n) &= B_i(q_1 u_1, \dots, q_n u_n), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

且

$$\hat{B}_i(1, \dots, 1) = \hat{A}(1, \dots, 1) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

又由于 $(q_1, \dots, q_n) < \mathbf{1}$, 则进一步有

$$0 < \hat{A}_j(1, \dots, 1) = q_j A_j(q_1, \dots, q_n) < +\infty,$$

且由定理 2.1, 有

$$\rho_{\hat{B}}(1, \dots, 1) \leq 0.$$

从而由文献 [10, 定理 4.1] 知 $\hat{P}(t)$ 常返, 因此, $\lambda_Z \leq -A(q_1, \dots, q_n)$.

(ii) 如果 $(q_1, \dots, q_n) = \mathbf{1}$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 定义

$$q_{ij}^{(\varepsilon)} = \begin{cases} a_j \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j}), & \text{若 } |\mathbf{i}| = 0, \\ \sum_{k=1}^n i_k b_{\mathbf{j}-\mathbf{i}+\mathbf{e}_k}^{(k)(\varepsilon)} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j}-\mathbf{i}+\mathbf{e}_k) + a_{\mathbf{j}-\mathbf{i}} \cdot \chi_{\mathbf{Z}_+^n}(\mathbf{j}-\mathbf{i}), & \text{若 } |\mathbf{i}| > 0, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

其中 $b_{\mathbf{k}}^{(i)(\varepsilon)} = b_{\mathbf{k}}^{(i)} - \varepsilon \delta_{\mathbf{k}\mathbf{e}_i}$. 易知 $Q^{(\varepsilon)} = (q_{ij}^{(\varepsilon)}; \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 为非保守的 n TBI Q - 矩阵.

对任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 令

$$B_i^{(\varepsilon)}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n} b_{\mathbf{j}}^{(i)(\varepsilon)} u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n} = B_i(u_1, \dots, u_n) - \varepsilon u_i,$$

则方程 $B_i^{(\varepsilon)}(u_1, \dots, u_n) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) 有最小非负解 $(q_1^{(\varepsilon)}, \dots, q_n^{(\varepsilon)}) \in [0, 1]^n$. 而且, 当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时有 $(q_1^{(\varepsilon)}, \dots, q_n^{(\varepsilon)}) \uparrow (1, \dots, 1)$.

假设 $P^{(\varepsilon)}(t) = (p_{ij}^{(\varepsilon)}; \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 是 Feller 最小 $Q^{(\varepsilon)}$ - 过程, 则 $p_{ij}^{(\varepsilon)}(t) \leq p_{ij}(t)$. 事实上, 由于 Feller 最小 $Q^{(\varepsilon)}$ - 预解式 $\Phi^{(\varepsilon)}(\lambda) = (\phi_{ij}^{(\varepsilon)}(\lambda); \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 是 Kolmogorov 向后方程

$$\phi_{ij}^{(\varepsilon)}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i^{(\varepsilon)}} + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{i}} \frac{q_{ik}^{(\varepsilon)}}{\lambda + q_i^{(\varepsilon)}} \phi_{kj}^{(\varepsilon)}(\lambda), \quad \mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n$$

的最小非负解, 从而, Feller 最小 Q - 预解式 $\Phi(\lambda) = (\phi_{ij}(\lambda); \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 是 Kolmogorov 向后方程

$$\phi_{ij}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{i}} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} \phi_{kj}(\lambda), \quad \mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n$$

的最小非负解. 又 $q_i^{(\varepsilon)} \leq q_i$, 从而, 对任意 $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n$, 有

$$\phi_{ij}^{(\varepsilon)}(\lambda) \leq \phi_{ij}(\lambda).$$

所以, $p_{ij}^{(\varepsilon)}(t) \leq p_{ij}(t)$. 由 (i) 可知, $\lambda_Z^{(\varepsilon)} = -A(q_1^{(\varepsilon)}, \dots, q_n^{(\varepsilon)})$ 是 $P^{(\varepsilon)}(t)$ 的衰减指数. 所以, $\lambda_Z \leq \lambda_Z^{(\varepsilon)} = -A(q_1^{(\varepsilon)}, \dots, q_n^{(\varepsilon)})$. 令 $\varepsilon \downarrow 0$, 可得 $\lambda_Z \leq -A(1, \dots, 1)$. 因此, $\lambda_Z = -A(q_1, \dots, q_n)$. $\square$

定理 4.2 给出了衰减指数, 现在来讨论过程的 λ_Z - 不变向量/不变测度以及拟平稳分布. 首先考虑 λ_Z - 不变向量.

定理 4.3 假设 Q - 矩阵 Q 如 (1.1) 和 (1.2) 定义, 令 $P(t) = (p_{ij}(t); \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 为 n TBIP 的 Feller 最小 Q - 函数, λ_Z 为 $\mathbf{Z}_+^n$ 的衰减指数, 则 Q (或 $P(t)$) 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的 λ_Z - 不变向量 $(y_j; \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 具有如下形式:

$$y_j = q_1^{j_1} \cdots q_n^{j_n}, \quad \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbf{Z}_+^n, \quad (4.2)$$

其中 $(q_1, \dots, q_n)$ 为方程 (2.1) 的最小非负解.

证明 由定理 4.1 可知, $(y_j; j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 是 Q 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的 λ_Z -不变向量. 因此, 只需证明 $(y_j; j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 也是 $P(t)$ 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的 λ_Z -不变向量即可. 事实上, 由文献 [22, 命题 5.4.1] 可知, 对任意 $\mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n$ 和 $t \geq 0$, 有

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \mathbf{0}} p_{ij}(t) y_j \leq e^{-\lambda_Z t} y_i. \quad (4.3)$$

从而, 由 Kolmogorov 向前方程知, 对任意 $\mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n$, $(u_1, \dots, u_n) \in [0, q_1] \times \dots \times [0, q_n]$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} p_{ij}^T(t) u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n} &= \sum_{j=1}^n B_j(u_1, \dots, u_n) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \mathbf{0}} p_{i\mathbf{k}}(t) k_j u_1^{k_1} \cdots u_j^{k_j-1} \cdots u_n^{k_n} \\ &\quad + A(u_1, \dots, u_n) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}_+^n} p_{i\mathbf{k}}(t) u_1^{k_1} \cdots u_n^{k_n}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

因此,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} p_{ij}(t) u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n} - u_1^{i_1} \cdots u_n^{i_n} &= \sum_{j=1}^n B_j(u_1, \dots, u_n) \int_0^t \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \mathbf{0}} p_{i\mathbf{k}}(s) k_j u_1^{k_1} \cdots u_j^{k_j-1} \cdots u_n^{k_n} ds \\ &\quad + A(u_1, \dots, u_n) \int_0^t \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}_+^n} p_{i\mathbf{k}}(s) u_1^{k_1} \cdots u_n^{k_n} ds \end{aligned}$$

在上述等式中令 $u_i = q_i$ ($i = 1, \dots, n$), 可得

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} p_{ij}(t) y_j - y_i = -\lambda_Z \int_0^t \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} p_{ij}(s) y_j ds. \quad (4.5)$$

所以,

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} p_{ij}(s) y_j = e^{-\lambda_Z s} y_i.$$

这表明 $(y_j; j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 是 $P(t)$ 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的 λ_Z -不变向量. $\square$

定理 4.4 假设 Q -矩阵 Q 如 (1.1) 和 (1.2) 定义且保守, $G(1, \dots, 1)$ 强正则, $\{B_i(u_1, \dots, u_n); i = 1, \dots, n\}$ 非奇异. 令 $P(t) = (p_{ij}(t); \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{Z}_+^n)$ 为对应的 n TBIP 的 Feller 最小 Q -函数, λ_Z 为 $\mathbf{Z}_+^n$ 的衰减指数, 则对任意 $\lambda \in [0, \lambda_Z]$,

(i) 存在 Q 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的 λ -不变测度 $(m_i; \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{Z}_+^n)$, 而且 λ -不变测度 $M(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n} m_i u_1^{i_1} \cdots u_n^{i_n}$ 的发生函数满足下面的偏微分方程:

$$\sum_{i=1}^n B_i(u_1, \dots, u_n) M_{u_i}(u_1, \dots, u_n) + (\lambda + A(u_1, \dots, u_n)) M(u_1, \dots, u_n) = 0, \quad (4.6)$$

其中 $m_{\mathbf{e}_i}$ 为正常数.

(ii) 测度 $(m_i; \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{Z}_+^n)$ 也是 $P(t)$ 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的 λ -不变测度.

(iii) $\sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}_+^n} m_i < \infty$ 当且仅当 $\lambda = \lambda_Z$, $\mathbf{q} = \mathbf{1}$ 且

$$\int_0^1 \frac{\lambda + A(u, u_2(u), \dots, u_n(u))}{B_1(u, u_2(u), \dots, u_n(u))} du > -\infty,$$

其中 $u_k(u)$ ($k = 2, \dots, n$) 由文献 [10, 定理 3.1] 给出.

证明 首先假设 $\lambda \in [0, \lambda_Z)$. 由 Kolmogorov 向前方程知, 对任意 $i, j \in \mathbf{Z}_+^n$, 有

$$p_{ij}^T(t) = \sum_{k \leq j+1} p_{ik}(t) q_{kj}.$$

从而,

$$\lambda \int_0^\infty e^{\lambda t} p_{i0}(t) dt + a_0 \int_0^\infty e^{\lambda t} p_{i0}(t) dt + \sum_{j=1}^n b_0^{(j)} \int_0^\infty e^{\lambda t} p_{ie_j}(t) dt = -\delta_{i0}, \quad (4.7)$$

且对任意 $j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \mathbf{0}$, 有

$$\lambda \int_0^\infty e^{\lambda t} p_{i0}(t) dt + \sum_{k \leq j+1} \left(\int_0^\infty e^{\lambda t} p_{ik}(t) dt \right) q_{kj} = -\delta_{ij}. \quad (4.8)$$

定义

$$m_j^{(i)} = \left(\int_0^\infty e^{\lambda t} p_{i0}(t) dt \right)^{-1} \cdot \int_0^\infty e^{\lambda t} p_{ij}(t) dt$$

以及

$$\varepsilon_j^{(i)} = \left(\int_0^\infty e^{\lambda t} p_{i0}(t) dt \right)^{-1} \cdot \delta_{ij},$$

则 (4.7) 和 (4.8) 可以改写为

$$(\lambda + a_0) m_0^{(i)} + \sum_{j=1}^n m_{e_j}^{(i)} b_0^{(j)} = -\varepsilon_0^{(i)}, \quad (4.9)$$

且对任意 $j \in \mathbf{Z}_+^n \setminus \mathbf{0}$, 有

$$\lambda m_j^{(i)} + \sum_{k \leq j+1} m_k^{(i)} q_{kj} = -\varepsilon_j^{(i)}. \quad (4.10)$$

由于 $\mathbf{Z}_+^n$ 不可约且 $m_0^{(i)} = 1$, 由 (4.9) 和 (4.10) 可知, 存在非负有限数列 $(m_i; i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{Z}_+^n)$ 使得

$$\lambda m_j + \sum_{k \leq j+1} m_k q_{kj} = 0, \quad j \in \mathbf{Z}_+^n. \quad (4.11)$$

现在证明所有的 m_j ($j \in \mathbf{Z}_+^n$) 都为正. 事实上, 如果对某 $\tilde{j} \in \mathbf{Z}_+^n$, $m_{\tilde{j}} = 0$, 则由 $\mathbf{Z}_+^n$ 的不可约性及 $m_0 = 1$ 可知, 存在 $j_0 = \mathbf{0}, j_1, \dots, j_n = \tilde{j} \in \mathbf{Z}_+^n$ 使得

$$q_{j_k j_{k+1}} > 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

重复利用 (4.11) 可得 $m_0 = 0$, 矛盾. 所以, $(m_j; j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 是 Q 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的 λ_Z -不变测度. 在 (4.11) 中令 $\lambda \uparrow \lambda_Z$, 则类似可得 Q 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的 λ_Z -不变测度.

由于 $\lambda < -a_0$, 在 (4.11) 的两边同乘以 $u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n}$ 并且对 $j \in \mathbf{Z}_+^n$ 两边求和得 $|u_1|, \dots, |u_n| < (-a_0 - \lambda)(\max\{b_0^{(i)}; i = 1, \dots, n\})^{-1}$,

$$\sum_{i=1}^n B_i(u_1, \dots, u_n) M_{u_i}(u_1, \dots, u_n) + (\lambda + A(u_1, \dots, u_n)) M(u_1, \dots, u_n) = 0, \quad (4.12)$$

其中

$$M(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j \in \mathbf{Z}_+^n} m_j u_1^{j_1} \cdots u_n^{j_n}.$$

由于存在 $(u_1, \dots, u_n) \uparrow (q_1, \dots, q_n)$ 使得对任意的 $i = 1, \dots, n$ 有 $B_i(u_1, \dots, u_n) > 0$, 易知对任意 $(u_1, \dots, u_n) \in [0, q_1) \times \cdots \times [0, q_n)$, (4.12) 都成立. (i) 得证.

现证 (ii). 定义 $g_j(t) = \sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n} m_i p_{ij}(t)$, $j \in \mathbf{Z}_+^n$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n} g_k(t) q_{kj} &= \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n} \sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n} m_i p_{ik}(t) q_{kj} = \sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n} m_i p_{ij}^T(t) \\ &= \sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n} m_i \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n} q_{ik} p_{kj}(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n} \sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n} m_i q_{ik} p_{kj}(t) \\ &= -\lambda g_j(t). \end{aligned}$$

从而, $(g_j(t); j \neq \mathbf{0})$ 也是 Q 的 λ -不变测度. 另一方面, 由 Kolomogorov 向前方程可知,

$$p_{ij}(t) - \delta_{ij} = \sum_{k \in \mathbf{Z}_+^n} \int_0^t p_{ik}(u) du \cdot q_{kj}.$$

由于 $\sum_{k \leq j+1} m_k |q_{kj}|$ 有限, 因此, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n} m_i |p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t)| &\leq \sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n} m_i \sum_{k \leq j+1} \int_t^{t+\Delta t} p_{ik}(u) du \cdot |q_{kj}| \\ &= \sum_{k \leq j+1} \int_t^{t+\Delta t} \sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n} m_i p_{ik}(u) du \cdot |q_{kj}| \\ &\leq \sum_{k \leq j+1} \int_t^{t+\Delta t} e^{-\lambda u} m_k du \cdot |q_{kj}| \\ &= \int_t^{t+\Delta t} e^{-\lambda u} du \cdot \sum_{k \leq j+1} m_k |q_{kj}| \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

所以, $g_j(t) = \sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n} m_i p_{ij}(t)$ 是关于 $t \in [0, \infty)$ 的连续函数, 故

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n} m_i p_{ij}^T(t) = \sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n} \sum_{k \leq j+1} m_i p_{ik}(t) q_{kj}$$

也是连续的. 因此, 由分析理论可知, $\sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n} m_i p_{ij}^T(t)$ 在任意有界区间都是一致收敛的, 从而,

$$g_j^T(t) = \sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n} m_i p_{ij}^T(t) = -\lambda g_j(t), \quad \forall t \geq 0.$$

这表明

$$g_j(t) = \sum_{i \in \mathbf{Z}_+^n} m_i p_{ij}(t) = g_j(0) e^{-\lambda t} = m_j e^{-\lambda t}.$$

因此, $(m_j; j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 是 $P(t)$ 的 λ -不变测度.

现证 (iii). 假设 $q < 1$. 若 $M(1, \dots, 1) < \infty$, 则 $\lambda_Z = -A(q_1, \dots, q_n) > 0$, 则对任意 $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$, (4.12) 都成立. 进而,

$$\lim_{u_1 \uparrow 1, \dots, u_n \uparrow 1} \sum_{j=1}^n B_j(u_1, \dots, u_n) M_{u_j}(u_1, \dots, u_n) = 0. \quad (4.13)$$

在 (4.12) 中, 令 $(u_1, \dots, u_n) \uparrow (1, \dots, 1)$, 矛盾.

假设 $q = 1$, 则由 (4.12) 和文献 [10, 定理 3.1] 可得

$$\frac{M^T(u, u_2(u), \dots, u_n(u))}{M(u, u_2(u), \dots, u_n(u))} = -\frac{\lambda + A(u, u_2(u), \dots, u_n(u))}{B_1(u, u_2(u), \dots, u_n(u))},$$

其中 $u_k(u)$ ($k = 2, \dots, n$) 由文献 [10, 定理 3.1] 给出且 $M^T = \frac{dM}{du}$. 所以,

$$M(u, u_2(u), \dots, u_n(u)) = m_0 e^{-\int_0^1 \frac{\lambda + A(u, u_2(u), \dots, u_n(u))}{B_1(u, u_2(u), \dots, u_n(u))} du}.$$

与 $M(1, \dots, 1)$ 有限矛盾. □

基于 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的 λ_Z -不变测度, 最后考虑 $P(t)$ 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的拟平稳分布问题.

定理 4.5 假设 Q -矩阵 Q 如 (1.1) 和 (1.2) 定义且保守, $G(1, \dots, 1)$ 强正则, $\{B_i(u_1, \dots, u_n); 1 \leq i \leq n\}$ 非奇异. 令 $P(t) = (p_{ij}(t); i, j \in \mathbf{Z}_+^n)$ 为 Feller 最小 Q -函数, λ_Z 为 $\mathbf{Z}_+^n$ 的衰减指数, 则存在 $P(t)$ 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的拟平稳分布当且仅当 $q = 1$ 且

$$\int_0^1 \frac{\lambda_Z + A(u, u_2(u), \dots, u_n(u))}{B_1(u, u_2(u), \dots, u_n(u))} du > -\infty.$$

进一步, 如果这些条件都成立, 则拟平稳分布 $\{(m_i; i \in \mathbf{Z}_+^n)\}$ 满足 $\lambda = \lambda_Z$ 情形下的方程 (4.6).

证明 由文献 [17, 命题 3.1] 知, 概率分布 $(m_i; i \in \mathbf{Z}_+^n)$ 是 $P(t)$ 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上的拟平稳分布当且仅当对某个 $\lambda > 0$, $(m_i; i \in \mathbf{Z}_+^n)$ 关于 $P(t)$ 在 $\mathbf{Z}_+^n$ 上是 λ -不变测度. 因此由定理 4.4 立得结论. □

参考文献

- Harris T E. The Theory of Branching Processes. Berlin-New York: Springer, 1963
- Asmussen S, Hering H. Branching Processes. Boston: Birkhäuser, 1983
- Athreya K B, Jagers P. Classical and Modern Branching Processes. Berlin: Springer, 1996
- Sevast'yanov B A. Limit theorems for branching stochastic processes of special form. Theory Probab Appl, 1957, 2: 321–331
- Vatutin V A. The asymptotic probability of the first degeneration for branching processes with immigration. Theory Probab Appl, 1974, 19: 25–34
- Vatutin V A. A conditional limit theorem for a critical branching process with immigration. Math Notes Acad Sci USSR, 1977, 21: 405–411
- Pakes A G. A branching process with a state dependent immigration component. Adv in Appl Probab, 1971, 3: 301–314
- Yamazato M. Some results on continuous time branching processes with state-dependent immigration. J Math Soc Japan, 1975, 17: 479–497
- Pakes A G, Tavaré S. Comments on the age distribution of Markov processes. Adv in Appl Probab, 1981, 13: 681–703
- 王娟. 几类广义分枝模型的研究. 博士学位论文. 长沙: 中南大学, 2013
- Meng W W, Li J P. Decay properties of μ -type Markov branching processes with disasters. J Theoret Probab, 2017, 30: 1605–1623

- 12 Van Doorn E A. Quasi-stationary distributions and convergence to quasi-stationarity of birth-death processes. *Adv in Appl Probab*, 1991, 23: 683–700
- 13 Zhang L, Li J. The $M/M/c$ queue with mass exodus and mass arrivals when empty. *J Appl Probab*, 2015, 52: 990–1002
- 14 Yaglom A M. Certain limit theorems of the theory of branching processes. *Dokl Acad Nauk SSSR*, 1947, 56: 795–798
- 15 Kingman J F C. The exponential decay of Markov transition probability. *Proc Lond Math Soc* (3), 1963, 13: 337–358
- 16 Pollett P K. Reversibility, invariance and μ -invariance. *Adv in Appl Probab*, 1988, 20: 600–621
- 17 Nair M G, Pollett P K. On the relationship between μ -invariant measures and quasi-stationary distributions for continuous-time Markov chains. *Adv in Appl Probab*, 1993, 25: 82–102
- 18 Li J P. Decay parameter and related properties of 2-type branching processes. *Sci China Ser A*, 2009, 52: 875–894
- 19 Li J P, Wang J. Decay parameter and related properties of n -type branching processes. *Sci China Math*, 2012, 55: 2535–2556
- 20 Chen M F. *From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems*. Singapore: World Scientific, 1992
- 21 Athreya K B, Ney P E. *Branching Processes*. Berlin: Springer, 1972
- 22 Anderson W. *Continuous-Time Markov Chains: An Applications-Oriented Approach*. New York: Springer-Verlag, 1991

The branching and decay properties of n -type Markov branching processes with immigration

Juan Wang & Junping Li

Abstract In this paper, we mainly consider the branching property and decay properties of n -type Markov branching processes with immigration. The equivalent conditions of the branching and immigration property are firstly obtained. The exact value of the decay parameter, denoted by λ_Z is obtained. The corresponding λ_Z -invariant vectors/measures and quasi-stationary distribution are discussed.

Keywords n -type Markov branching process, immigration, branching property, decay parameter, invariant vector, invariant measure, quasi-stationary distribution

MSC(2010) 60J27, 60J35

doi: 10.1360/SCM-2016-0576