基于Harmonic Polynomial Cell方法的孤立波碰撞数值模拟

童超⁵, 李晔^{1,2,3,4,5*}

1. 上海交通大学海洋工程国家重点实验室, 上海 200240;
2. 上海交通大学高新船舶与深海开发装备协同创新中心, 上海 200240;
3. 上海交通大学多功能拖曳水池, 上海 200240;
4. 上海交通大学水动力学教育部重点实验室, 上海 200240;
5. 上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240

*联系人, E-mail: ye.li@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2018-07-19; 接受日期: 2018-10-09; 网络出版日期: 2019-01-29

“青年千人计划”科研启动经费、国家自然科学基金(编号: 51479114, 11742021, 51761135012)和海洋可再生能源专项资金(编号: GHME2014ZC01)资助项目

摘要 二维Harmonic Polynomial Cell (HPC)方法是一种高精度、高效率地求解拉普拉斯方程的数值方法, 可以用于模拟波浪与波浪之间、波浪与海洋结构物之间的相互作用. 本文基于HPC方法、重叠网格法以及Goring造波方法建立了模拟活塞式推板造波的二维全非线性数值波浪水槽, 对孤立波的对撞现象进行了数值模拟, 给出了等波高和非等波高孤立波的碰撞爬升结果以及撞后空间相位的变化规律. 对于波幅为0.4的等波高的孤立波碰撞, 数值结果和实验结果对比非常出色, 从而验证了HPC方法应用于孤立波碰撞问题研究中的准确性. 文章分析了在有关的实验和数值模拟中得到的结果与三阶理论解之间存在差别的原因. 数值结果表明, 碰撞的最大爬升波高大于初始孤立波波高之和, 碰撞后的相位差在碰撞中点处较大, 远离碰撞中点时趋于稳定.

关键词 Harmonic Polynomial Cell方法, 孤立波碰撞, 数值水槽, 相位差

PACS: 02.60.Cb, 04.30.Tv, 02.70.-c, 47.11.-j, 05.10.-a

1 引言

自从Russell^[1]发现孤立波的存在, 孤立波在模拟海啸的研究中一直起到十分重要的作用. 所以对孤立波的深入了解和研究可以为海啸的成灾机理提供帮助, 并且可以丰富水动力学的研究, 具有重要的学术意

义和应用价值.

对于孤立波的碰撞问题, 已经有相当多的学者从实验、理论和数值模拟方面做了相当多深入的研究. Byatt-Smith^[2]通过推导积分公式, 发现两个相同波高的孤立波的碰撞得到的最大爬升波高大于两个初始波高的线性叠加. Maxworthy^[3]通过实验验证了Byatt-

引用格式: 童超, 李晔. 基于Harmonic Polynomial Cell方法的孤立波碰撞数值模拟. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 064701

Tong C, Li Y. Numerical study on the head-on collisions of solitary waves by a harmonic polynomial cell method (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2019, 49: 064701, doi: [10.1360/SSPMA2018-00264](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00264)

Smith^[2]的发现并且通过对实验数据的分析观察到两个孤立波在碰撞后存在相位滞后的现象. 为了从机理上研究孤立波的碰撞问题, Su和Mirie^[4,5]运用摄动理论得到了任意波高的两个孤立波碰撞过程中的最大爬升波高、相位变化以及尾随波的三阶近似理论表达式, 并且通过数值方法发现了孤立波在碰撞之后将能量传递给尾随波, 从而导致波幅的减小. Fenton等人^[6]基于傅里叶级数的结果, 并通过数值计算指出, 虽然他们得到的最大爬升波高与三阶近似解非常吻合, 但是相位差会随着测量位置的变化而变化, 并非是三阶近似解预测的结果. Chen等人^[7]运用LIF技术, 在实验中对整个波面和碰撞过程进行了精确测量, 虽然相位差的测量结果和Craig等人^[8]的数值结果对比吻合很好, 却发现相位变化的线性拟合结果依旧和Su等人^[4]的三阶近似解之间存在很大误差. 所以本文的主要目的就是希望通过数值方法详细地解释产生这些差别的原因, 以及给出孤立波碰撞之后的相位差变化规律.

2 数学模型

2.1 2D Harmonic Polynomial Cell方法

与传统的边界元方法相比, 二维HPC方法是Shao等人^[9]提出的一种求解势流方程的更高效、高精度的全非线性数值方法, Shao等人^[10]将其扩展为三维HPC方法, 并发现在液舱晃荡、非线性波与结构物的耦合作用以及非线性水池的数值模拟中仍然具有高效性和高精度. 本文采用的是重叠网格以及半拉格朗日的方法, 最早将这些方法应用于HPC方法的是Hanssen等人^[11,12]. 如图1所示, 将全局坐标系原点建立在水槽中点, 造波板的底部设定一个随体坐标系, 水槽右端有一段消波滩, 但是在本文的数值研究中消波滩不构成实验的一部分, 因为第一个孤立波会通过碰撞右侧的直壁反射从而改变方向, 再与第二个孤立波进行碰撞.

图1 二维数值水槽示意图

Figure 1 A sketch of a 2D water wave flume.

假设流体不可压缩、无黏、流动无旋, 流体的流动满足拉普拉斯方程

$$\Delta\varphi(x, z) = 0. \quad (1)$$

将整个计算域划分为四边形网格, 每一个“田”字形的单元包括中点和周边8个节点, 每个节点的局部编号如图2所示. 局部坐标 (ζ, ξ) 定义如下:

$$\begin{cases} \zeta = x - x_9, \\ \xi = z - z_9, \end{cases} \quad (2)$$

其中 (x, z) 是节点的全局坐标, (x_9, z_9) 是单元中心节点的全局坐标.

单元中任意一点的速度势可以通过1–8节点的速度势线性叠加表示

$$\varphi(\zeta, \xi) = \sum_{i=1}^8 \left[\sum_{j=1}^8 c_{ji} f_j(\zeta, \xi) \right] \varphi_i, \quad (3)$$

其中 $f_j(\zeta, \xi)$ 是Shao等人^[9]介绍的调和多项式, 即 $f_1(\zeta, \xi) = 1$; $f_2(\zeta, \xi) = \zeta$; $f_3(\zeta, \xi) = \xi$; $f_4(\zeta, \xi) = \zeta^2 - \xi^2$; $f_5(\zeta, \xi) = \zeta\xi$; $f_6(\zeta, \xi) = \zeta^3 - 3\zeta\xi^2$; $f_7(\zeta, \xi) = 3\zeta^2\xi - \xi^3$; $f_8(\zeta, \xi) = \zeta^4 - 6\zeta^2\xi^2 + \xi^4$. c_{ji} 表示矩阵 $\mathbf{D}$ 的逆, 矩阵 $\mathbf{D}$ 是由 $d_{ji} = f_j(\zeta_i, \xi_i)$ 所构成的. 因为所有的调和多项式都满足拉普拉斯方程, 所以式(3)也自动满足拉普拉斯方程. 单元中第9个节点的速度势可以表示成

$$\varphi_9 = \varphi(\zeta_9 = 0, \xi_9 = 0) = \sum_{i=1}^8 c_{1,i} \varphi_i, \quad (4)$$

此方程的作用是保证网格之间的连续性, 因为流体域中除了边界上的节点外, 其他节点皆为某个单元的中

图2 单元局部坐标系和单元节点示意图

Figure 2 A sketch of a cell with local indices and the local coordinate system.

心节点. 对于边界上的节点, 需满足第二类边界条件, 也就是壁面不可穿透条件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}(\zeta, \xi) = \sum_{i=1}^8 \left[\sum_{j=1}^8 c_{j,i} \nabla f_j(\zeta, \xi) \cdot \mathbf{n}(\zeta, \xi) \right] \varphi_i, \quad (5)$$

其中, $\mathbf{n}(\zeta, \xi)$ 是 (ζ, ξ) 节点上的单位法向量.

2.2 自由面边界条件

如图3所示, 自由液面是通过标记点插值来追踪, 这些标记点限定在背景网格的垂直线上运动, 因此自由液面是一个单值函数, 不能模拟波浪翻卷和波浪破碎. 红色的节点称之为“幽灵”节点, 位于自由液面以上, 但是这些节点的速度势不为零, 因为这个节点必定会属于某一包含自由液面的单元, 而这个单元中的每个节点都对解大型方程组起着至关重要的作用. 白色的节点相当于空气节点. 由于在实际计算中, 网格只需划分一次, 因此矩阵 $\mathbf{D}$ 的逆只需要计算一次, 从而减少了计算时间, 提升效率.

自由液面标记点的运动由于受到限制, 而且又是针对单个点, 于是可以运用半拉格朗日的方法来描述标记点的全非线性自由液面边界条件, 其运动学和动力学的边界条件为

$$\frac{Dx_m}{Dt} = 0, \quad \frac{Dz_m}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - v(x)\eta, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varphi_m}{Dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - v(x)\varphi \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] - g\eta + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - v(x)\varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

其中, (x_m, z_m) 表示标记点的全局坐标, $z=\eta(t, x)$ 是自由

图3 (网络版彩图)自由液面追踪示意图, 其中自由面标记点的箭头表示点的运动方向, 灰色单元的各个节点都需要满足自由液面条件

Figure 3 (Color online) The free surface is treated as an immersed boundary in a structured background grid and is tracked by wave markers moving vertically as indicated by arrows. The cells used to impose free-surface conditions are grayly shaded.

面方程; g 是重力加速度; $v(x)$ 表示阻尼系数, 只在消波区起作用, 用于防止波浪壁面反射对入射波造成干涉, 具体表达式可以参见文献[12,13]. 本研究中, $v(x)$ 被设定为零. $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_m \cdot \nabla$ 表示质点导数, 其中 $\mathbf{v}_m = (0, Dz_m/Dt)$, 所有的空间导数都在标记点处进行计算. $\partial\eta/\partial x$ 表示波陡, 可以通过高阶有限差分方法计算得到. 为了保证时域计算的精度能和HPC方法匹配, 在时域内的所有分析使用四阶显式Runge-Kutta算法.

2.3 造波板网格中的自由液面边界条件

为了模拟推板式造波板, 在造波板的一侧使用了结构化贴体网格, 如图4所示, 这层网格在背景网格之上滑动, 并且使用自己的一套自由面标记点(红色的点). 在每一个时间步, 背景网格中标记点的物理属性是通过B样条插值的方式从造波板重叠网格中的标记点得到. 主要因为, 第二类边界条件是施加在造波板上的, 所以在造波板边界处的波形更加准确. 与之前在背景网格中的描述一样, 这些自由面标记点只在重叠网格的垂直线上运动, 所以其半拉格朗日的运动学和动力学边界条件可以表示为

$$\frac{Dx'_m}{Dt} = 0, \quad \frac{Dz'_m}{Dt} = \frac{\partial z'_m}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} - u'_{\text{grid}} \right) \frac{\partial \eta'}{\partial x'} = \frac{\partial \varphi}{\partial z'}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varphi_m}{Dt} &= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'} \right)^2 \right] \\ &\quad - g\eta' + u'_{\text{grid}} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + \left(w'_{\text{grid}} + \frac{\partial \eta'}{\partial t} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z'}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中, (x'_m, z'_m) 是随体网格中的自由面标记点的坐标;

$\mathbf{v}'_{\text{grid}} = (u'_{\text{grid}}, w'_{\text{grid}})$ 是网格上节点的运动速度, 与数值模拟中造波板的运动速度一致.

图4 (网络版彩图)造波板重叠网格示意图

Figure 4 (Color online) Modeling of piston wave maker with structured body-fixed grid.

背景网格和运动网格之间的数据信息传递是整个数值计算中十分重要的一个环节, 造波板网格中节点的速度势可以通过从背景网格单元插值得到

$$\varphi_{\text{WMG}}(x', z') = \sum_{i=1}^8 \left[\sum_{j=1}^8 c_{ji} f_j(\zeta, \xi) \right] \varphi_i|_{\text{BGG}}. \quad (10)$$

同理, 背景网格中在重叠区域的节点也可以通过从造波板网格的单元中插值得到, 即

$$\varphi_{\text{BGG}}(x, z) = \sum_{i=1}^8 \left[\sum_{j=1}^8 c_{ji} f_j(\zeta', \xi') \right] \varphi_i|_{\text{WMG}}, \quad (11)$$

其中, φ_{BGG} 和 φ_{WMG} 分别是节点在背景网格和造波板网格中的速度势. 将以上所有的边界条件和式(4)联立起来组成一个线性方程组, 方程组表示成矩阵形式为 $\mathbf{A}\{\varphi\} = \{b\}$, 其中 $\mathbf{A}$ 是一个大型的稀疏阵, 每行最多只有 9 个非零实数.

2.4 造波方法

考虑到实际孤立波液面下的质点速度势是非均匀的, 在造波板边界上的质点速度通过平均思想, Goring^[14]推出了活塞式造波板的运动速度表达式为

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = \bar{u}(\zeta, t) = \frac{c\eta(\zeta, t)}{d + \eta(\zeta, t)}, \quad (12)$$

其中, $\zeta(t)$ 是造波板的水平位移, t 是时间, $\bar{u}$ 是推波板的水平平均速度, η 是自由液面波形, d 是静水面水深, c 是孤立波的相速度.

为了造出尾随波波幅更小、主峰波高更为稳定的孤立波, 确保所造的孤立波具有较强非线性特征, 目标波形采用的是 Fenton^[15] 的九阶孤立波解

$$\begin{aligned} \eta &= h(\eta_1 \sigma + \eta_2 \sigma^2 + \eta_3 \sigma^3 + \dots + \eta_9 \sigma^9), \\ k &= \sqrt{\frac{3A}{4d^3}} (1 + k_1 \sigma + k_2 \sigma^2 + \dots + k_9 \sigma^9), \\ c &= \sqrt{gd(1 + c_1 \sigma + c_2 \sigma^2 + \dots + c_9 \sigma^9)}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\eta_1, \dots, \eta_9, k_1, \dots, k_9$ 以及 $c_1, \dots, c_9$ 均已在 Fenton^[15] 文章中给出.

3 数值计算结果及分析

3.1 直墙反射爬升波高

事实上, 等波高的两个孤立波的碰撞与单个孤立

波的直墙反射现象是等效的, 包括最大爬升波高以及碰撞后产生的尾随波. 原因在于, 整个碰撞过程无论在几何层面还是运动层面都是对称的, 这就相当于在碰撞的中点处存在一面无形的等效直墙. 碰撞过程中的最大波面波高满足 Su 等人^[4]给出的三阶理论解

$$\sigma_{\max} = \sigma_R + \sigma_L + \frac{\sigma_R \sigma_L}{2} + \frac{3}{8} \sigma_R \sigma_L (\sigma_R + \sigma_L). \quad (14)$$

如果左行波和右行波波高相等, 则有

$$\sigma_{\max} = 2\sigma + \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{3}{4}\sigma^3, \quad (15)$$

其中, $\sigma = A/d$ 是无因次化波高, σ_R 是右行波波高, σ_L 是左行波波高.

二维数值水槽的整个高度设置为 $H=3$ m, 长为 $L=40$ m, 静止液面水深 $d=1$ m. 在长度方向上划分的网格数量为 600, 高度方向上为 75; 时间步设置为 $\Delta t=0.02$ s. 这里给出的数值实验工况为: $A/d=0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6$. 本文数值模拟使用的计算机 CPU 型号为 Intel(R) Core(TM) i7-6700k@4.00 GHz. 在此模拟中, 设定总的模拟时长为 $t_{\text{sim}}=30$ s, 每个时间步长所需要的 CPU 时间为 $T=1.229$ s. 图 5 是 HPC 方法的数值计算结果与 Su 等人^[4]的一阶、二阶以及三阶理论解, Cooker 等人^[16]的数值计算结果以及 Camfield 等人^[17]和 Maxworthy^[3]的实验测量结果的对比图.

从图 5 中可以看出, HPC 方法计算得到的结果在入射波波高低于 0.5 的时候, 与 Su 等人^[4]的三阶近似解吻

图 5 最大爬升波高随不同入射波波高的变化趋势

Figure 5 Maximum run-up height versus incident wave amplitude.

合得非常好. 由于随着波高的增大, 孤立波表现的非线性特性逐渐增强, 所以在波高大于0.5之后, 三阶近似解已经不足以准确预测最大爬升波高了, 可能需要四阶甚至更高阶的理论解才能解决这个问题. 其次, HPC的数值计算结果和Cooke等人^[16]的数值结果基本完全吻合, 而且在较大入射波波高的条件下也是如此. 值得一提的是, 在Cooke等人^[16]的数值计算中, 直接将Tanaka^[18]的全非线性解析解施加在自由表面上作为初始条件, 所以计算的结果精度非常高. 而在推板造波过程中, 由于采用了平均思想, 致使得到的孤立波会有尾随波, 从而导致孤立波波高不能达到目标值, 因此, 在实际操作中需要将输入信号的波高稍微增加一点以抵消因色散造成的波高损失, 使孤立波在远离造波板时的波高和预定值一致. 计算结果也从侧面证明了, 如果排除尾波造成的影响, HPC方法能够保证计算具有高精度.

3.2 碰撞后的空间相位差

在这一小节中, 对孤立波的对称碰撞和非对称碰撞进行了比较深入的研究, 数值模拟输入工况如表1所示. Chen等人^[7]在实验中对工况2($\sigma_R=\sigma_L=0.4$)的对称碰撞进行了比较系统的研究, 为了验证HPC数值计算的准确性, 工况2的数值结果与Chen等人^[7]的实验测量结果进行了对比验证.

图6和7是工况2的两个对称孤立波对撞形成的自由液面随时间变化的两种不同呈现形式. 从图6中可以明显地观察到撞击之后产生了尾随波系. 图7中明显可以观察到整个碰撞过程中的最大爬升波高大于入射波

表 1 在水深 d 为1 m, 水槽长 L 为300 m时, 数值模拟工况列表

Table 1 List of numerical simulation conditions

	工况	右行波 σ_R	左行波 σ_L	碰撞中心点 x/d
对称碰撞	1	0.2	0.2	-40.89
	2	0.4	0.4	-24.16
非对称碰撞	3	0.2	0.4	-31.16
	4	0.3	0.4	-37.56

图 6 等波高 $\sigma_R=\sigma_L=0.4$ 的孤立波对撞波形在 x - z 平面内随时间的变化图

Figure 6 The surface profiles of head-on collision of two solitary waves with equal wave amplitude $\sigma_R=\sigma_L=0.4$ in x - z plane versus time.

的波高线性叠加. 数值模拟得到的最大波高是 $A_{\max}/d=0.9118$, 而Su等人^[4]三阶近似解得到的结果是0.928. 从图中可以看到, 碰撞前后的过程是不对称的, 碰撞中点处的最低点在碰撞后明显低于水平线, 而这个过程可

图 7 $\sigma_R=\sigma_L=0.4$ 孤立波碰撞过程中的波形图系. (a) 碰撞前的波形图; (b) 碰撞后的波形图

Figure 7 Plots of the free surface profiles at different time instances for solitary waves with amplitudes $\sigma_R=\sigma_L=0.4$. (a) The plot before collision; (b) the plot after collision.

能是尾随波产生的主要原因.

由于碰撞的特殊性, 为了使造出的孤立波尾迹不影响碰撞中点的波形, 整个计算域的长度相对于最大孤立波的波高尺度而言相当大, 其比例为750:1, 所以可以理解为模拟波高为1 m的工况需要使用750 m长的水池. 因此也造成了实际计算所用的时间比较长. 但是为了兼顾计算精度和速度, 本文时间步设定为 $\Delta t=0.02$ s, 网格大小为 $\Delta x=\Delta z=0.1$ m, 整个计算域的网格数为90000, 设定模拟时长为 $t_{\text{sim}}=164$ s. 在孤立波碰撞的数值模拟中, 每个时间步长所需要的CPU时间为 $T=5.406$ s. 后续的不规则碰撞也是在这样的网格和时间步条件下模拟的, 所以此工况下单位时间步的CPU耗时即可代表后续工作的单位时间步CPU耗时.

图8给出了工况2条件下的波峰运动轨迹. 其中黑点虚线表示的是HPC的数值结果, 灰色圆形散点表示的是Chen等人^[7]的实验结果, 灰色实线是数值结果的线性拟合直线. 从图中可以观察到, 实验结果和数值结果吻合相当出色, 并且可以发现孤立波碰撞之后会存在很明显的空间相位变化, 即波峰的位置被滞后了, 原因在于碰撞期间只有一个波峰的时候, 波峰会在碰撞中点停留一段间隔, 从而导致滞后现象. 表2给出了所有数值工况的计算结果.

图9给出的是波高为 $\sigma_R=\sigma_L=0.4$ 的孤立波碰撞过程的波形图, 分别为HPC数值结果、Chen等人^[7]的实验结果和KdV方程得到的线性解之间的对比. 图中, 设置碰撞中点处出现最大波高的时刻为 $t=0$ s. 从图中可以发现, 数值结果得到的波形与实验结果基本完全吻合, 无论是在最大波高出现的幅值上, 还是在相位变化上, 都是同步对应的. 这与KdV方程得到的线性解形成明显的对比, 线性解无法准确预测最大波高值, 并且碰

图8 波高为 $\sigma_R=\sigma_L=0.4$ 的对称孤立波碰撞前后的波峰运动轨迹

Figure 8 Wave-crest traces of symmetric head-on collision of two solitary waves with equal amplitude $\sigma_R=\sigma_L=0.4$.

撞完之后的相位与实验和数值结果有明显的偏差.

图10和11给出的是表1中的工况3两个非对称孤立波碰撞形成的自由液面随时间的变化图. 其中, 图11是碰撞中点处附近的波形细节图. 从图11中可以观察到, 与对称碰撞不同的是, 碰撞过程发生的时候, 波幅较小的波会被大波吞噬, 而最大波峰的位置并不是在固定的位置保持不动. 碰撞之后波幅较大的孤立波波高会有明显的衰减.

对于碰撞前后的相位差, Craig等人^[8]提出用 $x=c_it+a_i$ ($i=1, 2$)和 $x=c_i^+t+a_i^+$ ($i=1, 2$)分别拟合碰撞前后的波峰运动轨迹, 其中($i=1, 2$)分别表示左行波和右行波. 为了减小求解的误差, Craig等人^[8]提出直接在碰撞的中点处计算相位差:

表2 孤立波对称和非对称碰撞的无因次数值结果

Table 2 Non-dimensional results of symmetric and asymmetric counter-propagating collisions

	对称碰撞		非对称碰撞			
	工况1	工况2	工况3		工况4	
	$\sigma_R=\sigma_L=0.2$	$\sigma_R=\sigma_L=0.4$	$\sigma_R=0.2$	$\sigma_L=0.4$	$\sigma_R=0.3$	$\sigma_L=0.4$
最大爬升波高理论值	0.4260	0.9280	0.6580		0.7915	
最大爬升波高HPC结果	0.4243	0.9118	0.6486		0.7815	
碰撞后孤立波波高	0.1889	0.3786	0.1939	0.3857	0.2847	0.3841
碰撞后波高的衰减率	5.56%	5.80%	3.05%	3.57%	1.53%	5.30%

图 9 波高为 $\sigma_R=\sigma_L=0.4$ 的孤立波在碰撞过程中HPC数值得到的波形结果与Chen等人^[7]的实验结果以及KdV线性解的对比图
Figure 9 The comparison of our present numerical results with experimental results of Chen et al. ^[7] and KdV linear results on free surface profile during the head-on collision of solitary waves with height $\sigma_R=\sigma_L=0.4$.

图 10 波高为 $\sigma_R=0.2$ 和 $\sigma_L=0.4$ 的孤立波碰撞波形随时间的变化

Figure 10 The surface profiles of head-on collision of two solitary waves with wave amplitude $\sigma_R=0.2$ and $\sigma_L=0.4$ for different time instances.

$$\Delta\theta = (a_i^+ - a_i) + \tau(c_i^+ - c_i), \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

其中, τ 是最大波峰出现的时刻. 在工况2的计算中, $\tau/\sqrt{d/g}$ 约为426.34, 所以HPC的右行波相位差计算结果为 $\Delta\theta_R/d=0.9459$, 左行波为 $\Delta\theta_L/d=0.9486$. 这个结果与Chen等人^[7]的实验结果很接近, 右行波的相位差为1.1, 左行波的相位差为0.98. 但是, 按照Su等人^[4]的三阶理论解, Long-Term (LT)相位差

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\theta_R}{d} &= \left(\frac{\sigma_L}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{8}\sigma_L + \frac{3}{4}\sigma_R\right), \\ \frac{\Delta\theta_L}{d} &= -\left(\frac{\sigma_R}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{8}\sigma_R + \frac{3}{4}\sigma_L\right), \end{aligned} \quad (17)$$

得到的结果为 $\Delta\theta_R/d=\Delta\theta_L/d=0.49$, 与HPC数值结果和实验结果差别很大. 但是Fenton等人^[6]根据Su等人^[4]文章

图 11 波高为 $\sigma_R=0.2$ 和 $\sigma_L=0.4$ 的孤立波碰撞过程中的波形图系. (a) 碰撞前的波形图; (b) 碰撞后的波形图

Figure 11 Plots of the free surface profiles at different time instances for solitary waves with amplitudes $\sigma_R=0.2$ and $\sigma_L=0.4$. (a) The plot before collision; (b) the plot after collision.

中的式(55)推导出immediate (IM)相位差为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\theta_R}{d} &= \left(\frac{\sigma_L}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{8}\sigma_L + \frac{23}{4}\sigma_R\right), \\ \frac{\Delta\theta_L}{d} &= -\left(\frac{\sigma_R}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{8}\sigma_R + \frac{23}{4}\sigma_L\right),\end{aligned}\quad (18)$$

计算的结果为 $\Delta\theta_R=\Delta\theta_L=1.22$, 从而与实验结果以及HPC方法计算得到的结果相近. 从结果来看, 数值和实验在得到的相位差与三阶近似解之间存在一些差异, 与理论解的LT相位差差别较大, 但是与IM相位差的结果却很接近, 接下来的研究主要分析产生这种差异的原因.

事实上, 起初相对而行的两个孤立波按照恒定的速度行进. 以对称碰撞为例, 当两个孤立波相互足够靠近的时候, 波与波之间碰撞中点处的自由液面会缓慢抬升, 与此同时, 孤立波的波高也会缓慢增加, 直到碰撞中点的波面波高等于孤立波的波高形成拐点. 拐点之后, 形成一个波峰. 在拐点形成之前的很短时间内, 孤立波波峰的移动速度不断增大趋于无穷大, 这个现象体现在图12中就是偏离拟合直线的弧形波峰轨迹“+”. 为了减少等效直墙的影响, 在直线的拟合过程中, 明显被等效直墙影响的数据点宜被舍弃, 只拟合剩下的轨迹.

由于相位差的测量会随着测量点不同而有差异, 为了减少误差, 将计算时刻设定为碰撞中点出现最大波峰的时刻, 相应的时刻即为式(16)中的 τ , 而式(16)的运用基于波峰轨迹的拟合直线. 所以, 主要任务在于如何拟合未受等效直墙影响的轨迹点. 值得注意的是, 线性拟合直线会随着测量点与碰撞中点的距离 D_m 和数

图 12 孤立波对称碰撞波峰轨迹示意图. 其中点状虚线(•和+)表示的是数值计算中记录的波峰轨迹, 灰色实线是拟合直线

Figure 12 A sketch of wave-crest traces of symmetric head-on collision of two solitary waves with equal amplitude. The dotted lines (• and +) represent the crest trajectories of numerical calculations.

据窗口长度 L_w 的变化而变化(图12), 测量点即是数据窗口的中点. 在实际计算中, 窗口长度按以下分类选取合适的值:

- 当 $D_m \in (1, 10)$, $L_w = 5-10$;
- 当 $D_m \in (10, 10)$, $L_w = 10-20$;
- 当 $D_m \in (20, 40)$, $L_w = 20-40$;
- 当 $D_m \in (40, \infty)$, $L_w = 40-60$.

图13和14分别给出了孤立波对称碰撞和非对称碰撞的相位差随测量点距离碰撞中点距离的变化图. 根据式(18), 在对称碰撞中, 波高为 $\sigma_R=\sigma_L=0.2$ 的孤立波碰撞后IM相位差的三阶理论解为 $\Delta\theta_{IM}/d=0.56$, 波高为 $\sigma_R=\sigma_L=0.4$ 的IM相位差三阶理论解为 $\Delta\theta_{IM}/d=1.22$. 从图

图 13 孤立波对称碰撞的相位差随测量距离的变化曲线. (a) $\sigma_R = \sigma_L = 0.2$, 渐进线的值 $\Delta\theta/d = 0.3$; (b) $\sigma_R = \sigma_L = 0.4$, 渐进线的值为 $\Delta\theta/d = 0.49$

Figure 13 Phase shifts versus the measurement distance from the collision center for symmetric head-on collisions of solitary waves. (a) $\sigma_R = \sigma_L = 0.2$, the asymptotic phase shifts is $\Delta\theta/d = 0.3$ (b) $\sigma_R = \sigma_L = 0.4$, the asymptotic phase shifts is $\Delta\theta/d = 0.49$.

图 14 孤立波非对称碰撞的相位差随测量距离的变化曲线. (a) $\sigma_R = 0.2, \sigma_L = 0.4$; (b) $\sigma_R = 0.3, \sigma_L = 0.4$

Figure 14 Phase shifts versus the measurement distance from the collision center for asymmetric head-on collisions of solitary waves. (a) $\sigma_R = 0.2, \sigma_L = 0.4$; (b) $\sigma_R = 0.3, \sigma_L = 0.4$.

13中可以看出, 数值计算的IM相位差结果与三阶近似的理论结果很接近. Chen等人^[7]在实验中, 对于相位差的计算实际也采用了和本文一样的模型策略: 舍弃明显受到等效直墙影响的轨迹点, 距离碰撞中点的测量距离 $D_m \approx 5$, 数据窗口的长度 $L_m \approx 6.5$. 因此, 他们得到碰撞后的右行波的相位差为 $\Delta\theta_R/d = 0.98$, 左行波的相位差为 $\Delta\theta_L/d = 1.1$, 与本文中数值模拟的结果 $\Delta\theta_R/d = 1.01$ 和 $\Delta\theta_L/d = 1.0$ 很相近. 同时发现, 如果测量点远离碰撞中点的时候, LT相位差的数值结果逐渐趋近于Su等人^[4]给出的三阶近似解. 从图11中可以观察到, 非对称碰撞之后的两个孤立波的相位变化是不一样的, 并且波高大的孤立波的相位差更快趋于渐进值, 而且其渐进值小于较小波高的渐进值.

在Su等人^[4]的三阶解中, 通过摄动展开的方法, 得到的孤立波传播速度是波高的函数, 而其研究发现, 碰

撞后的波高和初始波高相等, 因此碰撞前后的波速是一致的. 但是, 本文的数值结果和Fenton等人^[6]的研究结果都表明, 孤立波在碰撞后的传播速度比初始值大, 这个现象从图12的拟合直线的斜率可以观察到. 因此, 相位差的测量会随着位置的不同而有所变化, 并不是一个固定的值. 为了减小这种误差, Craig等人^[8]提出将测量点直接定在碰撞中点, 这实质是一种平均的思想. 由于拟合曲线的确定取决于波峰轨迹的数据, 所以, 本文采取了在不同的测量点截取一定长度的数据进行拟合, 将拟合出来的直线作为数据点在该测量点处的切线, 从而得到了不同测量点处的相位差.

从图13和14中可以观察到, 由于碰撞后速度的变化, 导致相位差在远离碰撞中点的测量点上趋近三阶LT相位差的结果, 而在靠近碰撞中点的位置上接近IM相位差的理论值. 因此, 并非前人的研究结果或者近似

解有差错, 而是理论解是碰撞后稳定了的结果, 而在 Craig 等人^[8]的数值计算和 Chen 等人^[7]的实验中, 选取的波峰轨迹数据离碰撞中点太近, 其次数据点太少, 所以导致拟合直线只能代表碰撞后不久的状态, 并非稳定的状态, 从而使得得到的结果与稳定态的理论解差别大.

4 结论

基于 HPC 方法建立了一个二维的全非线性活塞式推板造波数值水槽, 研究了等波高和非等波高孤立波对撞过程中的波面爬升和相位变化等相关问题. 数值模拟结果显示, 在等波高的孤立波碰撞过程中, 最大爬升波高大于两个孤立波的初始波高之和, 这个结果与 Su 等人^[4]的三阶近似理论解的结论一致. 同时, 从数值结果和理论解的对比可以看出, 当孤立波的波高小于 0.5 时, 数值结果和理论结果并无多大差别, 但是当

波高进一步增大时, 孤立波的非线性特性增强, 此时三阶的理论解就无法准确地预测最大爬升波高了, 数值结果与 Cooker 等人^[16]结果的吻合度也验证了该二维 HPC 方法的准确性.

在对碰撞后相位差的研究中发现, 由于碰撞之后的孤立波波速会增大, 导致相位差并不是固定值, 而是随着测量点的选取而变化. 总的来说, 在距离碰撞中点的地方, 相位差较大, 随着离碰撞中点的距离不断增大, 相位差逐渐减小并趋向于一个稳定值. Chen 等人^[7]的实验以及 Craig 等人^[8]的数值计算中之所以与 Su 等人^[4]的近似解进行对比时发现不同, 是因为比较时刻选择不当造成的. 这个现象难以在实验中发现主要是因为受到水槽长度的限制, 导致数据点的选取离碰撞中点较近, 所以得到的结果与稳定值差别较大. 其实孤立波之间的相互作用还包括追击碰撞, 这个问题也是值得研究的方向, 未来将在这方面进行更加深入的研究和探索.

参考文献

- 1 Russell J S. Report on Waves. In: Proceedings of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science. 1844.
- 2 Byatt-Smith J G B. An integral equation for unsteady surface waves and a comment on the Boussinesq equation. *J Fluid Mech*, 1971, 49: 625–633
- 3 Maxworthy T. Experiments on collisions between solitary waves. *J Fluid Mech*, 1976, 76: 177–186
- 4 Su C H, Mirie R M. On head-on collisions between two solitary waves. *J Fluid Mech*, 1980, 98: 509–525
- 5 Mirie R M, Su C H. Collisions between two solitary waves. Part 2. A numerical study. *J Fluid Mech*, 1982, 115: 475–492
- 6 Fenton J D, Rienecker M M. A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems: Application to solitary-wave interactions. *J Fluid Mech*, 1982, 118: 411–443
- 7 Chen Y, Yeh H. Laboratory experiments on counter-propagating collisions of solitary waves. Part 1. Wave interactions. *J Fluid Mech*, 2014, 749: 577–596
- 8 Craig W, Guyenne P, Hammack J, et al. Solitary water wave interactions. *Phys Fluids*, 2006, 18: 057106
- 9 Shao Y L, Faltinsen O M. Towards efficient fully-nonlinear potential-flow solvers in marine hydrodynamics. In: Proceedings of 31st International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. Brazil: ASME, 2012
- 10 Shao Y L, Faltinsen O M. A harmonic polynomial cell (HPC) method for 3D Laplace equation with application in marine hydrodynamics. *J Comput Phys*, 2014, 274: 312–332
- 11 Hanssen F C W, Greco M, Shao Y. The harmonic polynomial cell method for moving bodies immersed in a Cartesian background grid. In: Proceedings of 34th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. American Society of Mechanical Engineers. Newfoundland: ASME, 2015
- 12 Hanssen F C W, Bardazzi A, Lugni C, et al. Free-surface tracking in 2D with the harmonic polynomial cell method: Two alternative strategies. *Int J Numer Methods Eng*, 2018, 113: 311–351
- 13 Greco M. A two-dimensional study of green-water loading. Dissertation for the Doctoral Degree. Trondheim: Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet, 2001
- 14 Goring D G. Tsunamis: The propagation of long waves onto a shelf. Dissertation for the Doctoral Degree. Pasadena: California Institute of

Technology, 1979

- 15 Fenton J. A ninth-order solution for the solitary wave. *J Fluid Mech*, 1972, 53: 257–271
- 16 Cooker M J, Weidman P D, Bale D S. Reflection of a high-amplitude solitary wave at a vertical wall. *J Fluid Mech*, 1997, 342: 141–158
- 17 Camfield F E, Street R L. Shoaling of solitary waves on small slopes. *J Waterways Harbors Div*, 1969, 95: 1–22
- 18 Tanaka M. The stability of solitary waves. *Phys Fluids*, 1986, 29: 650–655

Numerical study on the head-on collisions of solitary waves by a harmonic polynomial cell method

TONG Chao⁵ & LI Ye^{1,2,3,4,5*}

¹ State Key Laboratory of Ocean Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

² Collaborative Innovation Center for Advanced Ship and Deep-Sea Exploration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

³ Laboratory of Multifunctional Towing Tank, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

⁴ The MOE Key Laboratory of Hydrodynamics of Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

⁵ School of Naval Architecture, Ocean & Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China

A 2D fully-nonlinear numerical wave flume is created with a piston-type wave generator based on a recently developed 2D harmonic polynomial cell method (HPC), which has been demonstrated as a highly accurate and efficient approach for modelling of water waves and their interaction with marine structures within the context of potential flow. The overlapping grid technique and a Goring's wave making method are applied to generate solitary waves. The main focus of this paper is on the head-on collisions of pairwise solitary waves with identical or different amplitudes, including the maximum run-up and spatial phase shift during the whole colliding process. As for collision between identical solitary waves with amplitude $\sigma = 0.4$, our present numerical results are in excellent agreement with experimental results both in maximum run-up and phase shifts, which indicates the accuracy of HPC method in simulating the head-on collision of solitary waves. The immediate and long-term phase shifts based on wave crest trajectories were obtained with success to explain the inconsistent results of phase shifts between experimental, fully nonlinear numerical results and the third-order approximation results. It is found from the results that the maximum run-up surpasses the sum of the initial wave amplitudes. The analysis of the phase shifts shows that the phase shifts of two solitary waves due to the head-on collision vary with the window length of data and the distance between measurement point and the collision center. The general trend is that the phase shifts measured close to the collision center are larger than those far from the collision center.

harmonic polynomial cell method, solitary waves, head-on collision, numerical wave flume, phase shifts

PACS: 02.60.Cb, 04.30.Tv, 02.70.-c, 47.11.-j, 05.10.-a

doi: [10.1360/SSPMA2018-00264](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00264)