具结构阻尼的拟线性膜方程的吸引子及其上半连续性

丁鹏燕¹, 杨志坚^{2*}, 赵雅娟²

1. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088;

2. 郑州大学数学与统计学院, 郑州 450001

E-mail: dingpengyan@yeah.net, yzjzzut@tom.com, zyj91428@163.com

收稿日期: 2018-12-17; 接受日期: 2019-04-24; 网络出版日期: 2019-07-17; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671367) 资助项目

摘要 本文研究具结构阻尼的拟线性膜方程 $u_{tt} + \Delta^2 u + (-\Delta)^\alpha u_t + \Delta \phi(\Delta u) + f(u) = g$ 的适定性以及解的长时间动力学行为, 其中 $\alpha \in (1, 2)$, 旨在研究耗散指标 α 对方程解的适定性和长时间动力学行为的影响. 本文证明非线性项 $\phi(s)$ 存在一个依赖于耗散指标 α 的临界指数 $p_\alpha = \frac{N+4(\alpha-1)}{(N-4(\alpha-1))^+}$ ($N = 3, 4$), 当 $1 \leq p < p_\alpha$ 时, 对 $f(u)$ 没有任何多项式增长限制: (i) 方程的初边值问题是适定的, 其解当 $t > 0$ 时具有整体正则性; (ii) 对任意 $\alpha \in (1, 2)$, 对应的解算子半群 $S^\alpha(t)$ 在自然能量空间中存在整体吸引子和指数吸引子; (iii) 整体吸引子族 $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ 在任意点 $\alpha_0 \in (1, 2)$ 处上半连续, 即对 $\mathcal{A}_{\alpha_0}$ 的任意邻域 U , 当 $|\alpha - \alpha_0| \ll 1$ 时有 $\mathcal{A}_\alpha \subset U$.

关键词 拟线性膜方程 结构阻尼 临界指数 整体吸引子 指数吸引子 吸引子的上半连续性

MSC (2010) 主题分类 35B40, 35B41, 37L15, 37L30, 35B33, 35B65

1 引言

本文研究具结构阻尼的拟线性膜方程

$$u_{tt} + \Delta^2 u + (-\Delta)^\alpha u_t + \Delta \phi(\Delta u) + f(u) = g \quad \text{在 } \Omega \times \mathbb{R}^+ \text{ 内,} \quad (1.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (1.2)$$

的适定性和解的长时间动力学行为, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 3, 4$) 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界集, 耗散指标 $\alpha \in (1, 2)$ 、非线性项 $\phi(s)$ 、 $f(s)$ 和外力项 g 将在下文中具体给出.

1997 年, Banks 等^[1] 提出了一类描述 neo-Hookean 弹性杆纵向位移的具阻尼非线性双曲方程

$$u_{tt} + A_1 u + A_2 u_t + \mathcal{N}^* g(\mathcal{N}u) = f, \quad (1.3)$$

英文引用格式: Ding P Y, Yang Z J, Zhao Y J. Attractors and their upper semicontinuity for the quasi-linear membrane equation with structural damping (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 315–332, doi: 10.1360/SCM-2018-0901

其中 $A_1 \in L(\mathcal{V}, \mathcal{V}^*)$ (从 $\mathcal{V}$ 到 $\mathcal{V}^*$ 的线性算子空间), $A_2 \in L(\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_2^*)$, $\mathcal{N} \in L(\mathcal{V}, H)$, $\mathcal{N}^*$ 为 $\mathcal{N}$ 的伴随算子, $\mathcal{V}$ 、 $\mathcal{V}_2$ 和 H 为三个 Hilbert 空间, 满足 $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{V}_2 \hookrightarrow H \hookrightarrow \mathcal{V}_2^* \hookrightarrow \mathcal{V}^*$. 特别地, $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow H$ 为稠的紧嵌入. 在方程 (1.3) 中, $A_2 u_t$ 是弹性体内部动态阻尼, 是智能弹性体设计中至关重要的材料性质.

当 $A_1 = A = \Delta^2$, 具有铰链式边界条件 (1.2), $A_2 = A^{\frac{\alpha}{2}} = (-\Delta)^\alpha$, $0 < \alpha \leq 2$, $\mathcal{N} = -A^{\frac{1}{2}} = \Delta$ ($= \mathcal{N}^*$) 时, 显然, $A_1 \in L(V_2, V_2^*)$, $A_2 \in L(V_\alpha, V_\alpha^*)$, $\mathcal{N} \in L(V_2, H)$, 其中 $V_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $V_\alpha = D(A^{\frac{\alpha}{2}})$ (将在下文中给出定义), $H = L^2(\Omega)$ 并且 $V_2 \hookrightarrow V_\alpha \hookrightarrow H \hookrightarrow V_\alpha^* \hookrightarrow V_2^*$. 将方程 (1.1) 写为方程 (1.3) 的形式:

$$u_{tt} + Au + A^{\frac{\alpha}{2}} u_t - A^{\frac{1}{2}} \phi(-A^{\frac{1}{2}} u) + f(u) = g, \quad (1.4)$$

其中当 $1 \leq \alpha \leq 2$ 时, $A^{\frac{\alpha}{2}} u_t$ 称为结构阻尼 (structural damping); 当 $0 < \alpha < 1$ 时, $A^{\frac{\alpha}{2}} u_t$ 称为温和耗散 (gentle dissipation) (参见文献 [2–5]). 数理科学家们预期这类模型可以对各种不可忽略阻尼的弹性系统进行真实的模拟.

学者们最初关注的是具有强阻尼的膜方程 (1.1) (即 $\alpha = 2$ 情形). 关于这类方程解的适定性、能量衰减以及解的爆破问题的研究可以参见文献 [1, 6–11].

整体吸引子和指数吸引子是研究各种具阻尼非线性发展方程长时间动力学行为的两个基本概念. 关于具阻尼半线性波动方程的吸引子已经有了广泛的研究 (参见文献 [12–17]). 但关于拟线性波动方程的吸引子问题由于具有本质性困难只有近期的一些研究结果 (如 Kirchhoff 型波动方程 [18–25] 和拟线性强阻尼波动方程 [10, 26–29]), 所以, 研究拟线性问题的长时间动力学行为并且提供新的方法和途径是很有意义的.

我们通常用非线性项的增长指数来描述非线性发展方程的非线性程度. 所关注的主要问题之一是增长指数对解的适定性以及长时间动力学行为的影响. 以方程 (1.1) 为例, 当 $\alpha = 0$ (弱阻尼) 时, 非线性项 $\phi(s)$ 的临界指数是 $\hat{p} = 1$, 即当 $p > 1$ 时, 人们得不到弱解的唯一性, 因此不能按照标准方式定义解算子半群, 从而无法利用经典理论证明吸引子的存在性. 当 $\alpha = 2$ (强阻尼) 时, $\phi(s)$ 的临界指数为 $\hat{p} = \frac{N+4}{(N-4)^+}$ (其中 $a^+ = \max\{a, 0\}$), 特别地, 当 $N = 3$ 时, $\hat{p} = +\infty$, 这与文献 [10] (参见下文) 中的结论吻合.

最近, Kalantarov 和 Zelik [10] 提出了一种新方法研究 3D 有界域上具强阻尼的拟线性波动方程

$$u_{tt} - \gamma \Delta u_t - \Delta u + f(u) = \nabla \cdot \phi'(\nabla u) + g. \quad (1.5)$$

其主要突破是, 在非线性项 ϕ 的增长指数小于 6 而 f 可以具有任意多项式增长指数的假定下建立了能量解的适定性、 $t > 0$ 时的部分正则性、整体吸引子和指数吸引子的存在性. 假定 $f \in C^1$, $f(s)s \geq -C$, ϕ 满足条件

$$k_1 |s|^{p-1} \leq \phi'(s) \leq k_2 |s|^{p-1}, \quad s \in \mathbb{R},$$

其中 $p \geq 1$, C 和 k_i ($i = 1, 2$) 为正常数, 他们研究了有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上具铰链式边界条件和初值条件 (1.2) 的具有强阻尼的拟线性膜方程 (即在方程 (1.1) 中取 $\alpha = 2$)

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta^2 u_t + \Delta \phi(\Delta u) + f(u) = g, \quad (1.6)$$

并在相空间 $\mathcal{E} = (W^{2,p+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ 中证明了问题 (1.6) 和 (1.2) 的适定性以及有限维整体吸引子的存在性. 这个结论表明强阻尼 $\Delta^2 u_t$ 对能量集聚的强耗散作用支配了方程 (1.6) 的长时间动

力学行为. 如果将强阻尼 $\Delta^2 u_t$ 替换为结构阻尼 $(-\Delta)^\alpha u_t$, $1 < \alpha < 2$, 其耗散作用弱于强阻尼 ($\alpha = 2$) 而强于弱阻尼 ($\alpha = 0$), 那么, 耗散指标 α 对问题 (1.1) 和 (1.2) 的适定性和长时间动力学行为会有怎样的影响? 对指数吸引子的存在性以及整体吸引子关于耗散指标 α 的稳定性 (上半连续性) 又会产生什么影响? 是否会有新的现象发生? 受到文献 [10] 中思想的启发, 我们将对这些问题进行研究.

整体吸引子关于无穷维动力系统参数的稳定性问题已经受到了广泛关注. 其中关于耗散动力系统扰动吸引子的上半连续性已有了许多研究 (参见文献 [23, 30–35]). 但是, 所有这些研究关注的扰动参数均为方程中的某些系数. 例如, 阻尼波动方程 $\epsilon u_{tt} + u_t - \Delta u + f(u) = g$ 的扰动吸引子 $\mathcal{A}_\epsilon$ 在点 $\epsilon = 0$ 的上半连续性 (参见文献 [31, 33, 34]). 如果扰动参数是耗散指标, 如方程 (1.1) 中的 α , 则扰动吸引子 $\mathcal{A}_\alpha$ 关于 α 的上半连续性会如何? 这是一个具有挑战性的问题.

本文旨在研究上述问题. 我们的主要结果如下:

(i) 存在一个依赖于耗散指标 α 的临界指数 $p_\alpha = \frac{N+4(\alpha-1)}{(N-4(\alpha-1))^+}$, 当非线性项 $\phi(s)$ 的增长指数 p 满足 $1 \leq p < p_\alpha$ 时, 对 $f(u)$ 没有任何多项式增长限制, 问题 (1.1) 和 (1.2) 是适定的并且解具有当 $t > 0$ 时的整体正则性 (而非通常的部分正则性) (参见定理 3.1 和 3.2);

(ii) 对任意 $\alpha \in (1, 2)$, 对应的解算子半群 $S^\alpha(t)$ 在自然能量空间中存在整体吸引子和指数吸引子 (参见定理 4.1 和 5.2);

(iii) 整体吸引子族 $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ 在任意点 $\alpha_0 \in (1, 2)$ 处是上半连续的, 即对 $\mathcal{A}_{\alpha_0}$ 的任意邻域 U , 当 $|\alpha - \alpha_0| \ll 1$ 时, $\mathcal{A}_\alpha \subset U$ (参见定理 6.1).

需要说明的是, 对于物理上感兴趣的端点情形 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$, 整体吸引子的上半连续性仍然没有解决. 当 $\alpha = 1$ 时, 非线性项 $\phi(s)$ 的临界指标似乎是 1. 遗憾的是, 本文的证明是基于限制条件 $1 \leq p < p_\alpha$ 和紧嵌入 $V_{2(\alpha-1)} \hookrightarrow L^{p+1}$, 而当 $\alpha = 1$ (或 $p_1 = 1$) 时违反了这一限制, 所以, 本文的证明对 $\alpha = 1$ 不成立. 因此, 需要寻找新的方法来证明在 $\alpha = 1$ 处上半连续性的猜想. 当 $\alpha \rightarrow 2^-$ 时整体吸引子的上半连续性仍然不成立 (即使在文献 [10] 中已经证明了 $\alpha = 2$ 时整体吸引子的存在性), 这是因为当 $\alpha \rightarrow 2^-$ 时控制常数 $C(\alpha)$ 趋于无穷 (参见注 3.3), 这导致 (当 $t > a/2$ 时) 起到关键作用的弱解的整体正则性不成立. 因此, 证明 $\alpha \rightarrow 2^-$ 时整体吸引子的上半连续性也是一个具有挑战性的问题.

本文余下内容的安排如下. 第 2 节介绍预备知识. 第 3 节讨论问题 (1.1) 和 (1.2) 的适定性及 $t > 0$ 时解的整体正则性. 第 4 和 5 节分别建立整体吸引子和指数吸引子的存在性. 第 6 节研究整体吸引子族 $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ 关于 $\alpha \in (1, 2)$ 的上半连续性.

2 预备知识

为简便起见, 我们使用下列记号:

$$\begin{aligned} L^p &= L^p(\Omega), \quad W^{m,p} = W^{m,p}(\Omega), \quad W_0^{m,p} = W_0^{m,p}(\Omega), \quad H^m = W^{m,2}, \\ V_1 &= H_0^1, \quad V_2 = H^2 \cap H_0^1, \quad H = L^2, \quad \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p}, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_2, \end{aligned}$$

其中 $p \geq 1$, $W^{-m,p'}$ 表示 $W_0^{m,p}$ 的对偶空间, $p' = p/(p-1)$. 符号 $H_1 \hookrightarrow H_2$ 表示函数空间 H_1 连续嵌入到 H_2 , $H_1 \hookrightarrow\hookrightarrow H_2$ 表示 H_1 紧嵌入到 H_2 . 符号 $(\cdot, \cdot)$ 表示 H - 内积同时表示对偶空间的对偶积, $C(\cdots)$ 表示依赖于括号内参数的正常数.

显然, $V_2 \hookrightarrow\hookrightarrow H \hookrightarrow V_2^*$ (V_2 的对偶空间). 定义算子 $A: V_2 \rightarrow V_2^*$,

$$(Au, v) = (\Delta u, \Delta v), \quad \forall u, v \in V_2,$$

则 A 是 H 中的自伴算子, 是 V_2 上的严格正算子. 因此, 我们可以定义 A 的方幂 A^s ($s \in \mathbb{R}$), 空间 $V_s = D(A^{\frac{s}{4}})$ 为装备着下列内积和范数:

$$(u, v)_{V_s} = (A^{\frac{s}{4}}u, A^{\frac{s}{4}}v), \quad \|u\|_{V_s} = \|A^{\frac{s}{4}}u\|, \quad s \in \mathbb{R}$$

的 Hilbert 空间.

将方程 (1.1) 写为抽象形式:

$$u_{tt} + Au + A^{\frac{\alpha}{2}}u_t - A^{\frac{1}{2}}\phi(-A^{\frac{1}{2}}u) + f(u) = g, \quad (2.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1. \quad (2.2)$$

定义相空间

$$\mathcal{E}_\alpha = (W^{2,2p} \cap V_{1+\alpha}) \times V_\alpha, \quad \mathcal{E} = (W^{2,p+1} \cap H_0^1) \times L^2, \quad \mathcal{E}_{-\alpha} = V_\alpha \times V_{-\alpha},$$

其中 $\alpha \in (1, 2)$, 它们均装备通常的图像模, 例如, $\|(u, v)\|_{\mathcal{E}}^2 = \|A^{\frac{1}{2}}u\|_{p+1}^2 + \|v\|^2$, $\forall (u, v) \in \mathcal{E}$. 显然,

$$\mathcal{E}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}_{-\alpha}. \quad (2.3)$$

引理 2.1 ^[36] 设 X 、 B 和 Y 是三个 Banach 空间, $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$,

$$W = \{u \in L^p(0, T; X) \mid u_t \in L^1(0, T; Y)\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$W_1 = \{u \in L^\infty(0, T; X) \mid u_t \in L^r(0, T; Y)\}, \quad r > 1,$$

则 $W \hookrightarrow L^p(0, T; B)$, $W_1 \hookrightarrow C([0, T]; B)$.

引理 2.2 ^[37] 设 X 是 Banach 空间, 集合 $\mathcal{Z} \subset C(\mathbb{R}^+; X)$, 假定 $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一连续泛函并且满足条件: 对任意 $z \in \mathcal{Z}$, 有

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \Phi(z(t)) \geq -\eta, \quad \Phi(z(0)) \leq K,$$

其中常数 $\eta, K \geq 0$; 函数 $t \mapsto \Phi(z(t))$ 连续可微并且满足微分不等式

$$\frac{d}{dt} \Phi(z(t)) + \delta \|z(t)\|_X^2 \leq k,$$

其中 $\delta > 0$ 和 $k \geq 0$ 是不依赖于 $z \in \mathcal{Z}$ 的常数, 则对任意 $\gamma > 0$, 存在 $t_0 = \frac{\eta+K}{\gamma} > 0$ 使得

$$\Phi(z(t)) \leq \sup_{\zeta \in X} \{\Phi(\zeta) \mid \delta \|\zeta\|_X^2 \leq k + \gamma\}, \quad t \geq t_0.$$

3 适定性

假设 3.1 (i) $\phi \in C^1(\mathbb{R})$, $\phi(0) = 0$, 存在正常数 C_1 和 C_2 使得

$$C_1|s|^{p-1} \leq \phi'(s) \leq C_2(|s|^{p-1} + 1), \quad s \in \mathbb{R}.$$

(ii) $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(s)s \geq -C$, $s \in \mathbb{R}$, 其中常数 $C \geq 0$. 特别地, 当 $N = 4$ 和 $p = 1$ 时,

$$|f'(s)| \leq C(1 + |s|^q), \quad 1 \leq q < \infty. \quad (3.1)$$

(iii) $g \in H$, $(u_0, u_1) \in \mathcal{E}$, $\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{E}} \leq R_0$, 其中 $R_0 > 0$ 是一个常数.

注 3.1 (i) 假定 3.1(i) 意味着下列事实:

$$|\phi(s)| \geq \frac{C_1}{p}|s|^p, \quad \phi(s)s \geq \frac{C_1}{p}|s|^{p+1}, \quad \Phi(s) := \int_0^s \phi(\tau)d\tau \geq \frac{C_1}{p(p+1)}|s|^{p+1}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

(ii) 不等式 $f(s)s \geq -C$ ($s \in \mathbb{R}$) 意味着下列事实:

$$\int_{\Omega} F(u)dx \geq -\frac{\theta}{2}\|u\|^2 - C(\theta),$$

其中 $F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau$, $\theta: 0 < \theta < \lambda_1$, λ_1 是算子 A 的第一特征值.

(iii) 只有当 $N = 4$ 和 $p = 1$ 时, 需要多项式增长条件 (3.1). 而对于其他情形: $N = 3$ 或 $N = 4$, $p > 1$, 不需要条件 (3.1).

定理 3.1 如果假设 3.1 成立, 则问题 (2.1) 和 (2.2) 至少存在一个弱解 u ($\equiv u^\alpha$), $(u, u_t) \in L^\infty(0, T; \mathcal{E}) \cap C_w([0, T]; \mathcal{E})$, $u_t \in L^2(0, T; V_\alpha)$, 并且

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{\mathcal{E}}^2 \leq \begin{cases} C_0 \equiv C(R_0, \|g\|), & t > 0, \\ C(\|g\|), & t \geq t(R_0, \|g\|), \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\int_0^t \|u_t(\tau)\|_{V_\alpha}^2 d\tau \leq C(R_0, \|g\|). \quad (3.4)$$

特别当 $1 \leq p < p_\alpha$ ($\equiv \frac{N+4(\alpha-1)}{(N-4(\alpha-1))^+}$) (这意味着 $V_{2(\alpha-1)} \hookrightarrow L^{p_\alpha+1}$) 时, 解在弱空间 $\mathcal{E}_{-\alpha}$ ($= V_\alpha \times V_{-\alpha}$) 中 Lipschitz 稳定, 即

$$\|z(t)\|_{V_\alpha}^2 + \|z_t(t)\|_{V_{-\alpha}}^2 \leq C(T)(\|z(0)\|_{V_\alpha}^2 + \|z_t(0)\|_{V_{-\alpha}}^2), \quad t \in [0, T], \quad (3.5)$$

并且在 $\mathcal{E}_{-\alpha}$ 中拟稳定, 即

$$\|(z, z_t)(t)\|_{\mathcal{E}_{-\alpha}}^2 \leq C \left(\|(z, z_t)(0)\|_{\mathcal{E}_{-\alpha}}^2 e^{-\kappa t} + \int_0^t e^{-\kappa(t-\tau)} (\|z(\tau)\|^2 + \|z_t(\tau)\|_{V_{-2\alpha}}^2) d\tau \right), \quad t > 0, \quad (3.6)$$

其中 (这里及以下) κ 表示小正常数, $z = u - v$, u, v 分别为方程 (2.1) 对应于初值 $(u_0, u_1), (v_0, v_1) \in \mathcal{E}$ 并且 $\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{E}} + \|(v_0, v_1)\|_{\mathcal{E}} \leq R_0$ 的两个解.

证明 我们先对问题 (2.1) 和 (2.2) 的解做一些先验估计. 方程 (2.1) 用乘子 $u_t + \epsilon u$ 作用, 得到

$$\frac{d}{dt} H(\xi_u(t)) + K(\xi_u(t)) = 0, \quad t > 0, \quad (3.7)$$

其中 $\xi_u = (u, u_t)$,

$$\begin{aligned} H(\xi_u) &= \frac{1}{2}(\|u_t\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}u\|^2) + \int_{\Omega} \Phi(-A^{\frac{1}{2}}u)dx + \int_{\Omega} F(u)dx - (g, u) + \epsilon \left((u_t, u) + \frac{1}{2}\|u\|_{V_\alpha}^2 \right) \\ &\geq \kappa \|\xi_u\|_{\mathcal{E}}^2 - C\|g\|^2 - C, \\ K(\xi_u) &= \|u_t\|_{V_\alpha}^2 - \epsilon \|u_t\|^2 + \epsilon (\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + (\phi(-A^{\frac{1}{2}}u), -A^{\frac{1}{2}}u) + (f(u), u) - (g, u)) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t\|_{V_\alpha}^2 + \kappa \|\xi_u\|_{\mathcal{E}}^2 - C\|g\|^2 - C, \end{aligned} \quad (3.8)$$

这里 $\epsilon > 0$ 适当小, 并且我们使用了注 3.1. 将 (3.8) 代入 (3.7) 得到

$$\frac{d}{dt} H(\xi_u) + \frac{1}{2}\|u_t\|_{V_\alpha}^2 + \kappa \|\xi_u\|_{\mathcal{E}}^2 \leq C(\|g\|). \quad (3.9)$$

应用引理 2.2 和 Gronwall 引理于 (3.9) 得到估计式 (3.3). 在 (3.7) 中令 $\epsilon = 0$, 并在 $(0, t)$ 积分得到 (3.4).

显然, 估计式 (3.3) 和 (3.4) 对 Galerkin 近似解成立. 使用 Galerkin 方法和单调性方法 (参见文献 [38]), 容易证明问题 (2.1) 和 (2.2) 至少存在一个弱解 u , 满足 $(u, u_t) \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{E}) \cap C_w(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$, 并且估计式 (3.3) 和 (3.4) 对 u 成立. 这里省略证明过程.

由方程 (2.1) 和估计式 (3.3) 得到 $u_{tt} \in L^2(0, T; V_{-\alpha}) + L^\infty(0, T; W^{-2, 1+1/p})$. 设 u 和 v 分别为问题 (2.1) 和 (2.2) 对应于初值 $(u_0, u_1), (v_0, v_1) \in \mathcal{E}$ 并且 $\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{E}} + \|(v_0, v_1)\|_{\mathcal{E}} \leq R_0$ 的两个解, 则 $z = u - v$ 满足

$$\begin{aligned} z_{tt} + Az + A^{\frac{\alpha}{2}} z_t - A^{\frac{1}{2}}(\phi(-A^{\frac{1}{2}}u) - \phi(-A^{\frac{1}{2}}v)) + f(u) - f(v) &= 0, \\ z(0) &= u_0 - v_0, \quad z_t(0) = u_1 - v_1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

用乘子 $A^{-\frac{\alpha}{2}} z_t + \epsilon z$ 作用于 (3.10) 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_1(\xi_z) + (1 - \epsilon) \|z_t\|^2 + \epsilon (\|z\|_{V_2}^2 + (\phi(-A^{\frac{1}{2}}u) - \phi(-A^{\frac{1}{2}}v), -A^{\frac{1}{2}}z)) \\ = (\phi(-A^{\frac{1}{2}}u) - \phi(-A^{\frac{1}{2}}v), A^{\frac{1-\alpha}{2}} z_t) - (f(u) - f(v), A^{-\frac{\alpha}{2}} z_t + \epsilon z), \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中 $\xi_z = (z, z_t)$, $H_1(\xi_z) = \frac{1}{2}(\|z_t\|_{V_{-\alpha}}^2 + \|z\|_{V_{2-\alpha}}^2) + \epsilon(\frac{1}{2}\|z\|_{V_\alpha}^2 + (z, z_t)) \sim \|z\|_{V_\alpha}^2 + \|z_t\|_{V_{-\alpha}}^2$ ($\epsilon > 0$ 适当小). 据假设 3.1(i), 可得

$$\begin{aligned} (\phi(-A^{\frac{1}{2}}u) - \phi(-A^{\frac{1}{2}}v), -A^{\frac{1}{2}}z) &= \int_{\Omega} \int_0^1 \phi'(\lambda(-A^{\frac{1}{2}}u) + (1-\lambda)(-A^{\frac{1}{2}}v)) d\lambda |A^{\frac{1}{2}}z|^2 dx \\ &\geq C \int_{\Omega} (|A^{\frac{1}{2}}u|^{p-1} + |A^{\frac{1}{2}}v|^{p-1}) |A^{\frac{1}{2}}z|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

当 $1 \leq p < p_\alpha$ 时,

$$\begin{aligned} &|(\phi(-A^{\frac{1}{2}}u) - \phi(-A^{\frac{1}{2}}v), A^{\frac{1-\alpha}{2}} z_t)| \\ &\leq C \int_{\Omega} (1 + |A^{\frac{1}{2}}u|^{p-1} + |A^{\frac{1}{2}}v|^{p-1}) |A^{\frac{1}{2}}z| |A^{\frac{1-\alpha}{2}} z_t| dx \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} \|z\|_{V_2}^2 + C(\epsilon) \|z_t\|_{V_{2(1-\alpha)}}^2 + \frac{\epsilon C}{2} \int_{\Omega} (|A^{\frac{1}{2}}u|^{p-1} + |A^{\frac{1}{2}}v|^{p-1}) |A^{\frac{1}{2}}z|^2 dx \\ &\quad + C(\epsilon) \int_{\Omega} (|A^{\frac{1}{2}}u|^{p-1} + |A^{\frac{1}{2}}v|^{p-1}) |A^{\frac{1-\alpha}{2}} z_t|^2 dx \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} \|z\|_{V_2}^2 + \epsilon \|z_t\|^2 + C(\epsilon) \|z_t\|_{V_{-2\alpha}}^2 + \frac{\epsilon C}{2} \int_{\Omega} (|A^{\frac{1}{2}}u|^{p-1} + |A^{\frac{1}{2}}v|^{p-1}) |A^{\frac{1}{2}}z|^2 dx \\ &\quad + C(\epsilon) (\|A^{\frac{1}{2}}u\|_{p+1}^{p-1} + \|A^{\frac{1}{2}}v\|_{p+1}^{p-1}) \|A^{\frac{1-\alpha}{2}} z_t\|_{p+1}^2 \\ &\leq \epsilon \left(\frac{1}{4} \|z\|_{V_2}^2 + \frac{C}{2} \int_{\Omega} (|A^{\frac{1}{2}}u|^{p-1} + |A^{\frac{1}{2}}v|^{p-1}) |A^{\frac{1}{2}}z|^2 dx + 2 \|z_t\|^2 \right) + C(\epsilon) \|z_t\|_{V_{-2\alpha}}^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

这里使用了 Sobolev 嵌入 $V_{2(\alpha-1)-\delta} \hookrightarrow L^{p+1}$ ($0 < \delta \ll 1$) 和如下插值不等式:

$$C(\epsilon) \|A^{\frac{1-\alpha}{2}} z_t\|_{p+1}^2 \leq C(\epsilon) \|z_t\|_{V_{-\delta}}^2 \leq \epsilon \|z_t\|^2 + C(\epsilon) C_1(\alpha) \|z_t\|_{V_{-2\alpha}}^2,$$

其中 $C_1(\alpha) = \frac{\delta}{2\alpha} (\frac{2\alpha-\delta}{2\alpha})^{\frac{2\alpha-\delta}{\delta}}$ 在 $\alpha \in (1, 2)$ 上一致有界. 考虑到

$$V_1 \hookrightarrow L^4, \quad W^{2, p+1} \hookrightarrow \begin{cases} L^r, & 1 \leq r < \infty, \text{ 当 } p = 1 \text{ 和 } N = 4, \\ L^\infty, & \text{其他情形,} \end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned}
 |(f(u) - f(v), A^{-\frac{\alpha}{2}} z_t + \epsilon z)| &= \left| \left(\int_0^1 f'(\lambda u + (1-\lambda)v) d\lambda z, A^{-\frac{\alpha}{2}} z_t + \epsilon z \right) \right| \\
 &\leq C(\|z\|^2 + \|z_t\|_{V_{-2\alpha}}^2 + d_0(\|u\|_{2q}^q + \|v\|_{2q}^q)(\|z\|_4^2 + \|A^{-\frac{\alpha}{2}} z_t\|_4^2)) \\
 &\leq C(\|z\|^2 + \|z_t\|_{V_{-2\alpha}}^2 + d_0(\|u\|_{2q}^q + \|v\|_{2q}^q)(\|z\|_{V_1}^2 + \|z_t\|_{V_{1-2\alpha}}^2)) \\
 &\leq \epsilon \left(\|z_t\|^2 + \frac{1}{4} \|z\|_{V_2}^2 \right) + C(\epsilon)(\|z\|^2 + \|z_t\|_{V_{-2\alpha}}^2), \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

其中当 $N = 4$ 和 $p = 1$ 时, $d_0 = 1$; 其他情形时, $d_0 = 0$, 这里使用了插值不等式:

$$\|z\|_{V_1}^2 \leq \frac{\epsilon}{4} \|z\|_{V_2}^2 + C(\epsilon) \|z\|^2, \quad \|z_t\|_{V_{1-2\alpha}}^2 \leq \epsilon \|z_t\|^2 + C(\epsilon) C_2(\alpha) \|z_t\|_{V_{-2\alpha}}^2,$$

其中 $C_2(\alpha) = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} \alpha^{-\frac{1}{2\alpha-1}}$ 在 $\alpha \in (1, 2)$ 上一致有界. 将 (3.12)–(3.14) 代入 (3.11) 得到

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} H_1(\xi_z) + \kappa \left(H_1(\xi_z) + \|z_t\|^2 + \|z\|_{V_2}^2 + \int_{\Omega} (|A^{\frac{1}{2}} u|^{p-1} + |A^{\frac{1}{2}} v|^{p-1}) |A^{\frac{1}{2}} z|^2 dx \right) \\
 \leq C(\|z\|^2 + \|z_t\|_{V_{-2\alpha}}^2). \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

应用 Gronwall 引理于 (3.15) 得到 (3.6). 据 (3.6) 和 Sobolev 嵌入 $\mathcal{E}_{-\alpha} (\equiv V_{\alpha} \times V_{-\alpha}) \hookrightarrow H \times V_{-2\alpha}$ 得到 (3.5). $\square$

注 3.2 (3.15) 在 $(0, T)$ 上积分并利用 (3.5) 得到

$$\int_0^T \left(\|z_t\|^2 + \|z\|_{V_2}^2 + \int_{\Omega} (|A^{\frac{1}{2}} u|^{p-1} + |A^{\frac{1}{2}} v|^{p-1}) |A^{\frac{1}{2}} z|^2 dx \right) d\tau \leq C(T) \|(z, z_t)(0)\|_{\mathcal{E}_{-\alpha}}^2. \quad (3.16)$$

定理 3.2 设假设 3.1 成立, 其中 $1 \leq p < p_{\alpha}$, 则问题 (2.1) 和 (2.2) 的弱解 $u (\equiv u^{\alpha})$ 具有下列光滑性质: 对任意 $a > 0, T > a$, 有

$$(u, u_t, u_{tt}) \in L^{\infty}(a, T; (W^{2,2p} \cap V_{1+\alpha}) \times V_{\alpha} \times V_{-\alpha}) \cap L^2(a, T; V_3 \times V_2 \times H),$$

并且

$$\begin{aligned}
 &\|u(t)\|_{W^{2,2p}}^{2p} + \|u_t(t)\|_{V_{\alpha}}^2 + \|u_{tt}(t)\|_{V_{-\alpha}}^2 + \int_t^{t+1} (\|u_t(\tau)\|_{V_2}^2 + \|u_{tt}(\tau)\|^2) d\tau \\
 &\leq \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) C(R_0, \|g\|), \quad t > 0, \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

$$\|u(t)\|_{V_{1+\alpha}}^2 + \int_t^{t+1} \|u(\tau)\|_{V_3}^2 d\tau \leq \left(1 + \frac{1}{(t - \frac{a}{2})^{\frac{2}{2-\alpha}}} \right) C(\alpha) C(R_0, \|g\|), \quad t > \frac{a}{2}, \quad (3.18)$$

其中 $C(\alpha) = (\frac{2\alpha}{2-\alpha})^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$.

证明 当 $1 \leq p < p_{\alpha}$ 时, 下列 Sobolev 嵌入成立:

$$V_{2\alpha-2} \hookrightarrow L^{p+1}, \quad L^{1+\frac{1}{p}} \hookrightarrow V_{2-2\alpha}, \quad V_2 \hookrightarrow V_{4-2\alpha}, \quad V_{2\alpha} \hookrightarrow L^{\infty}, \quad L^1 \hookrightarrow V_{-2\alpha}.$$

因此, 据方程 (2.1) 和估计式 (3.3) 得到

$$\|u_{tt}\|_{V_{-2\alpha}} \leq C(\|u\|_{V_{4-2\alpha}} + \|u_t\| + \|f(u)\|_{L^1} + \|\phi(-A^{\frac{1}{2}} u)\|_{1+\frac{1}{p}} + \|g\|)$$

$$\leq C(\|u\|_{V_2} + \|u_t\| + \|u\|_{W^{2,p+1}}^p + \|g\| + C_0) \leq C. \quad (3.19)$$

方程 (2.1) 关于 t 求导并令 $v = u_t$ 得到

$$v_{tt} + Av + A^{\frac{\alpha}{2}}v_t - A^{\frac{1}{2}}(-\phi'(-A^{\frac{1}{2}}u)A^{\frac{1}{2}}v) + f'(u)v = 0. \quad (3.20)$$

用乘子 $A^{-\frac{\alpha}{2}}v_t + \epsilon v$ 作用于 (3.20) 得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} H_2(\xi_v) + (1 - \epsilon)\|v_t\|^2 + \epsilon[\|v\|_{V_2}^2 + (\phi'(-A^{\frac{1}{2}}u)A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}v)] \\ & = -(\phi'(-A^{\frac{1}{2}}u)A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1-\alpha}{2}}v_t) - (f'(u)v, A^{-\frac{\alpha}{2}}v_t + \epsilon v), \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中 $\xi_v = (v, v_t)$, $H_2(\xi_v) = \|v_t\|_{V_{-\alpha}}^2 + \|v\|_{V_{2-\alpha}}^2 + \epsilon(\|v\|_{V_{\alpha}}^2 + 2(v, v_t)) \sim \|v\|_{V_{\alpha}}^2 + \|v_t\|_{V_{-\alpha}}^2$ ($\epsilon > 0$ 适当小). 显然,

$$(\phi'(-A^{\frac{1}{2}}u)A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}v) \geq C_1 \int_{\Omega} |A^{\frac{1}{2}}u|^{p-1} |A^{\frac{1}{2}}v|^2 dx. \quad (3.22)$$

类似于 (3.13) 和 (3.14) 的证明, 得到

$$\begin{aligned} |(\phi'(-A^{\frac{1}{2}}u)A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1-\alpha}{2}}v_t)| & \leq C \int_{\Omega} (1 + |A^{\frac{1}{2}}u|^{p-1}) |A^{\frac{1}{2}}v| |A^{\frac{1-\alpha}{2}}v_t| dx \\ & \leq \epsilon \left(\frac{1}{4} \|v\|_{V_2}^2 + \frac{C_1}{2} \int_{\Omega} |A^{\frac{1}{2}}u|^{p-1} |A^{\frac{1}{2}}v|^2 dx + 2\|v_t\|^2 \right) + C(\epsilon) \|v_t\|_{V_{-2\alpha}}^2, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$|(f'(u)v, A^{-\frac{\alpha}{2}}v_t + \epsilon v)| \leq \epsilon \left(\|v_t\|^2 + \frac{1}{4} \|v\|_{V_2}^2 \right) + C(\epsilon) (\|v\|^2 + \|v_t\|_{V_{-2\alpha}}^2). \quad (3.24)$$

将 (3.22)–(3.24) 代入到 (3.21), 得到

$$\frac{d}{dt} H_2(\xi_v) + \kappa[H_2(\xi_v) + \|v\|_{V_2}^2] + \|v_t\|^2 \leq C(\|v\|^2 + \|v_t\|_{V_{-2\alpha}}^2). \quad (3.25)$$

当 $0 < t \leq 1$ 时, (3.25) 两边同乘以 t^2 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [t^2 H_2(\xi_v)] + \kappa t^2 H_2(\xi_v) + t^2 \|v_t\|^2 & \leq C(\|v\|^2 + \|v_t\|_{V_{-2\alpha}}^2) + Ct(\|v\|_{V_{\alpha}}^2 + \|v_t\|_{V_{-\alpha}}^2) \\ & \leq C(\|v\|_{V_{\alpha}}^2 + \|v_t\|_{V_{-2\alpha}}^2) + \frac{1}{2} t^2 \|v_t\|^2, \end{aligned} \quad (3.26)$$

这里用到了插值不等式 $Ct\|v_t\|_{V_{-\alpha}}^2 \leq Ct\|v_t\|\|v_t\|_{V_{-2\alpha}} \leq \frac{1}{2} t^2 \|v_t\|^2 + C\|v_t\|_{V_{-2\alpha}}^2$. 应用 Gronwall 引理于 (3.26) 并利用 (3.4) 和 (3.19) 得到

$$\begin{aligned} t^2 H_2(\xi_v) & \leq C \int_0^t e^{-\kappa(t-\tau)} (\|u_t(\tau)\|_{V_{\alpha}}^2 + \|u_{tt}(\tau)\|_{V_{-2\alpha}}^2) d\tau, \\ \|u_t(t)\|_{V_{\alpha}}^2 + \|u_{tt}(t)\|_{V_{-2\alpha}}^2 & \leq \frac{1}{t^2} C(R_0, \|g\|), \quad 0 < t \leq 1. \end{aligned} \quad (3.27)$$

在 $(1, t)$ 上应用 Gronwall 引理于 (3.25) 并利用 (3.27) 得到

$$\|u_t(t)\|_{V_{\alpha}}^2 + \|u_{tt}(t)\|_{V_{-2\alpha}}^2 \leq C(R_0, \|g\|), \quad t > 1. \quad (3.28)$$

(3.25) 在 $(t, t+1)$ 上积分并利用 (3.27) 和 (3.28) 得到

$$\int_t^{t+1} (\|u_t(\tau)\|_{V_2}^2 + \|u_{tt}(\tau)\|^2) d\tau \leq \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) C(R_0, \|g\|), \quad t > 0. \quad (3.29)$$

根据注 3.2、方程 (2.1) 和 (3.27)–(3.29) 得到

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2,2p}}^{2p} &\leq C\|\phi(-A^{\frac{1}{2}}u)\|^2 \leq C(\|u_{tt}\|_{V_{-2}}^2 + \|u\|_{V_2}^2 + \|u_t\|_{V_{2\alpha-2}}^2 + \|f(u)\|_{V_{-2}}^2 + \|g\|_{V_{-2}}^2) \\ &\leq C(\|u_{tt}\|_{V_{-\alpha}}^2 + \|u\|_{V_2}^2 + \|u_t\|_{V_\alpha}^2 + \|f(u)\|^2 + \|g\|^2) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) C(R_0, \|g\|), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

这里用到了 Sobolev 嵌入 $V_{-\alpha} \hookrightarrow V_{-2}$,

$$\|u\|_{V_{-2}} \leq \max\{1, \lambda_1^{-\frac{1}{4}}\} \|u\|_{V_{-\alpha}}, \quad \forall u \in V_{-\alpha},$$

其中 $\alpha \in (1, 2)$. 综合 (3.27)–(3.30) 得到 (3.17).

用乘子 $A^{\frac{1}{2}}u$ 作用于方程 (2.1) 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{V_{1+\alpha}}^2 + \|u\|_{V_3}^2 + (\phi'(-A^{\frac{1}{2}}u), |\nabla A^{\frac{1}{2}}u|^2) &= (g - u_{tt}, A^{\frac{1}{2}}u) - (f'(u), |\nabla u|^2) \\ &\leq \|g\|^2 + \|u_{tt}\|^2 + \|u\|_{V_2}^2 + C(1 + \|u\|_{2q}^q) \|\nabla u\|_{L^4}^2 \\ &\leq C_0(\|g\|^2 + \|u_{tt}\|^2 + \|u\|_{V_2}^2). \end{aligned} \quad (3.31)$$

当 $a/2 < t \leq 1 + a/2$ 时, (3.31) 两边同乘以 $(t - a/2)^{\frac{2}{2-\alpha}}$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\left(t - \frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{2-\alpha}} \|u\|_{V_{1+\alpha}}^2 \right] + \left(t - \frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{2-\alpha}} \|u\|_{V_3}^2 \\ \leq C_0(\|g\|^2 + \|u_{tt}\|^2 + \|u\|_{V_2}^2) + \frac{2(t - \frac{a}{2})^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}}{2 - \alpha} \|u\|_{V_{1+\alpha}}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \left(t - \frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{2-\alpha}} \|u\|_{V_3}^2 + C(\alpha) C_0(\|g\|^2 + \|u_{tt}\|^2 + \|u\|_{V_2}^2), \end{aligned} \quad (3.32)$$

这里用到插值不等式:

$$\frac{2(t - \frac{a}{2})^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}}{2 - \alpha} \|u\|_{V_{1+\alpha}}^2 \leq \frac{2(t - \frac{a}{2})^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}}{2 - \alpha} \|u\|_{V_3}^\alpha \|u\|_{V_1}^{2-\alpha} \leq \frac{1}{2} \left(t - \frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{2-\alpha}} \|u\|_{V_3}^2 + C(\alpha) \|u\|_{V_1}^2, \quad (3.33)$$

其中 $C(\alpha) = (\frac{2\alpha}{2-\alpha})^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$. 因此,

$$\|u(t)\|_{V_{1+\alpha}}^2 \leq \frac{1}{(t - \frac{a}{2})^{\frac{2}{2-\alpha}}} C(\alpha) C(R_0, \|g\|), \quad \frac{a}{2} < t \leq 1 + \frac{a}{2}. \quad (3.34)$$

在 $(1 + a/2, t)$ 上应用 Gronwall 引理于 (3.31) 并利用 (3.34) 得到

$$\|u(t)\|_{V_{1+\alpha}}^2 \leq C(\alpha) C(R_0, \|g\|), \quad t > 1. \quad (3.35)$$

(3.31) 在 $(t, t+1)$ 上积分并利用 (3.34) 和 (3.35) 得到

$$\int_t^{t+1} \|u(\tau)\|_{V_3}^2 d\tau \leq \left(1 + \frac{1}{(t - \frac{a}{2})^{\frac{2}{2-\alpha}}}\right) C(\alpha) C(R_0, \|g\|), \quad t > 0. \quad (3.36)$$

综合 (3.34)–(3.36) 得到 (3.18). $\square$

注 3.3 (i) 定理 3.1 和 3.2 中出现的控制常数除了 $C(\alpha)$ 外均不依赖于 α . 简单计算得

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2} C(\alpha) = \infty,$$

此式表明 (3.18) 对 $\alpha = 2$ 不成立.

(ii) 通过在 (3.18) 中精细地选择 a 和 t , 例如, $t \geq \frac{a}{2} + \frac{2\alpha}{2-\alpha}$, 我们可以消除控制常数 $C(\alpha)$ 的爆破并得到估计 $\|u^\alpha(t)\|_{V_{1+\alpha}} \leq C(R_0, \|g\|)$, $t \geq \frac{a}{2} + \frac{2\alpha}{2-\alpha}$. 但因为 $\lim_{\alpha \rightarrow 2-} (\frac{a}{2} + \frac{2\alpha}{2-\alpha}) = +\infty$, 故 u^α 的正则化效应对 $\alpha = 2$ 仍不成立.

4 整体吸引子

当 $1 \leq p < p_\alpha$ 时, 定义算子

$$S^\alpha(t) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad S^\alpha(t)(u_0, u_1) = \xi_u^\alpha(t) = (u^\alpha(t), u_t^\alpha(t)),$$

其中 u^α 为问题 (2.1) 和 (2.2) 的弱解. 据定理 3.1 可知, $\{S^\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ 构成相空间 $\mathcal{E}$ 上的算子半群, 它在弱空间 $\mathcal{E}_{-\alpha}$ 中 Lipschitz 连续.

定理 4.1 设假设 3.1 成立, 其中 $1 \leq p < p_\alpha$, 则半群 $\{S^\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ 在相空间 $\mathcal{E}$ 中存在整体吸引子 $\mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{A}_\alpha$ 在 $\mathcal{E}_\alpha$ 中有界. 此外, $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{M}^+(\mathcal{N})$, 其中 $\mathcal{M}^+(\mathcal{N})$ 为从 $\mathcal{N}$ 中出发的不稳定流形,

$$\mathcal{N} = \{(u, 0) \in \mathcal{E} \mid Au - A^{\frac{1}{2}}\phi(-A^{\frac{1}{2}}u) + f(u) = g\}$$

为 $S^\alpha(t)$ 的不动点集. 并且 $\mathcal{A}_\alpha$ 中的任意全轨道 $\gamma = \{\xi_u^\alpha(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ 具有下列性质:

- (i) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}_{\mathcal{E}}\{(u^\alpha(t), u_t^\alpha(t)), \mathcal{N}\} = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}_{\mathcal{E}}\{(u^\alpha(t), u_t^\alpha(t)), \mathcal{N}\} = 0$;
- (ii) $(u^\alpha, u_t^\alpha, u_{tt}^\alpha) \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{E}_\alpha \times V_{-\alpha})$, 并且 $\sup_{\gamma \in \mathcal{A}_\alpha} \sup_{t \in \mathbb{R}} (\|\xi_u^\alpha(t)\|_{\mathcal{E}_\alpha} + \|u_{tt}^\alpha(t)\|_{V_{-\alpha}}) \leq C(\mathcal{A}_\alpha)$.

证明 当 $1 \leq p < p_\alpha$ 时, 据估计式 (3.3) 知, $S^\alpha(t)$ 在相空间 $\mathcal{E}$ 中具有 (共同的) 有界吸收集 B_0 , 因此存在时刻 $t_\alpha = t_\alpha(B_0) > 0$ 使得当 $t \geq t_\alpha$ 时, $S^\alpha(t)B_0 \subset B_0$. 令

$$B_\alpha = \bigcup_{t \geq t_\alpha+1} S^\alpha(t)B_0, \quad \mathcal{B} = [B_\alpha]_{\mathcal{E}_{-\alpha}}, \quad (4.1)$$

其中符号 $[\cdot]_{\mathcal{E}_{-\alpha}}$ 表示集合在空间 $\mathcal{E}_{-\alpha}$ 中的闭包. 显然, B_α 和 $\mathcal{B}$ 均为 $S^\alpha(t)$ 在 $\mathcal{E}$ 中的正不变的吸收集, 并在 $\mathcal{E}_\alpha$ 中有界. 集合 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{E}_{-\alpha}$ 中的闭集, 因此, 它是装备 $\mathcal{E}_{-\alpha}$ 度量的完备度量空间, 从而, $(S^\alpha(t), \mathcal{B})$ 构成耗散动力系统 (装备 $\mathcal{E}_{-\alpha}$ 拓扑). 因为 $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}_{-\alpha}$, 所以, $S^\alpha(t)$ 在 $\mathcal{B}$ 上一致紧, 从而, 动力系统 $(S^\alpha(t), \mathcal{B})$ 存在整体吸引子 $\mathcal{A}_\alpha = \omega_{\mathcal{E}_{-\alpha}}(B_\alpha) (\subset \mathcal{B})$, 并对任意 $\alpha \in (1, 2)$, $\mathcal{A}_\alpha$ 在 $\mathcal{E}_\alpha$ 中有界.

下面证明 $\mathcal{A}_\alpha$ 恰为动力系统 $(S^\alpha(t), \mathcal{E})$ 的整体吸引子.

(i) 显然, $S^\alpha(t)\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_\alpha$, $t \geq 0$;

(ii) 定义恒同算子 $I : \mathcal{A}_\alpha (\subset \mathcal{E}_{-\alpha}) \rightarrow \mathcal{A}_\alpha (\subset \mathcal{E})$.

对任意的 $\xi_u = (u, v) \in \mathcal{A}_\alpha$, 据插值定理, 可得

$$\begin{aligned} \|v\| &\leq C\|v\|_{V_\alpha}^{1/2}\|v\|_{V_{-\alpha}}^{1/2} \leq C\|v\|_{V_{-\alpha}}^{1/2}, \\ \|u\|_{W^{2,p+1}} &\leq \begin{cases} C\|u\|_{V_{\alpha+1}}^{2-\alpha}\|u\|_{V_\alpha}^{\alpha-1}, & p = 1, \\ C\|u\|_{W^{2,2p}}^{\frac{p}{p+1}}\|u\|_{V_{\alpha+1}}^{\frac{2-\alpha}{p+1}}\|u\|_{V_\alpha}^{\frac{\alpha-1}{p+1}}, & 1 < p < p_\alpha \end{cases} \\ &\leq C\|u\|_{V_\alpha}^\theta, \end{aligned}$$

其中 $\theta = \frac{\alpha-1}{p+1}$ ($< 1/2$), 这里用到下列事实:

$$\|u\|_{W^{2,p+1}} \leq C \|u\|_{W^{2,2p}}^{\frac{p}{p+1}} \|u\|_{V_2}^{\frac{1}{p+1}} \leq C \|u\|_{W^{2,2p}}^{\frac{p}{p+1}} \|u\|_{V_{\alpha+1}}^{\frac{2-\alpha}{p+1}} \|u\|_{V_\alpha}^{\frac{\alpha-1}{p+1}}.$$

因此,

$$\|\xi_u - \xi_v\|_{\mathcal{E}} \leq C \|\xi_u - \xi_v\|_{\mathcal{E}_{-\alpha}}^\theta, \quad \forall \xi_u, \xi_v \in \mathcal{A}_\alpha, \quad (4.2)$$

即恒同算子 I 是 θ -Hölder 连续的, 所以, $\mathcal{A}_\alpha$ ($\mathcal{E}_{-\alpha}$ 中紧集的像) 为 $\mathcal{E}$ 中的紧集.

(iii) 对于任意有界集 $B \subset \mathcal{E}$, 存在时刻 $t^* := t_\alpha(B) > 0$, 当 $t \geq t^*$ 时, $S^\alpha(t)B \subset \mathcal{B}$. 故

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_{\mathcal{E}}\{S^\alpha(t)B, \mathcal{A}_\alpha\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_{\mathcal{E}}\{S^\alpha(t-t^*)S^\alpha(t^*)B, \mathcal{A}_\alpha\} \\ &\leq C \lim_{t \rightarrow \infty} [\text{dist}_{\mathcal{E}_{-\alpha}}\{S^\alpha(t-t^*)\mathcal{B}, \mathcal{A}_\alpha\}]^\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

综上所述, $\mathcal{A}_\alpha$ 是 $(S^\alpha(t), \mathcal{E})$ 的整体吸引子.

据 (3.17) 知, 对任意全轨道 $\xi_u(t) = (u(t), u_t(t)) \in \mathcal{A}_\alpha$, 有

$$\begin{aligned} \int_0^T (-A^{\frac{1}{2}}\phi(-A^{\frac{1}{2}}u), u_t) dt &\leq C \int_0^T \int_\Omega (1 + |A^{\frac{1}{2}}u|^p) |A^{\frac{1}{2}}u_t| dx dt \\ &\leq C \int_0^T (1 + \|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2 + \|u(t)\|_{W^{2,2p}}^{2p}) dt \\ &\leq C(\mathcal{A}_\alpha, T), \end{aligned}$$

即 $-A^{\frac{1}{2}}\phi(-A^{\frac{1}{2}}u)u_t \in L^1((0, T) \times \Omega)$. 因此, 用乘子 u_t 作用于方程 (2.1) 得到下列能量等式成立:

$$E(\xi_u(t)) + \int_s^t \|u_t(\tau)\|_{V_\alpha}^2 d\tau = E(\xi_u(s)), \quad t \geq s \geq 0, \quad (4.3)$$

其中

$$E(\xi_u) = \frac{1}{2}(\|u_t\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}u\|^2) + \int_\Omega \Phi(-A^{\frac{1}{2}}u) dx + \int_\Omega F(u) dx - (g, u).$$

显然, $E(\xi_u)$ 为 $\mathcal{A}_\alpha$ 上的连续泛函, 且等式 (4.3) 表明 $E(\xi_u)$ 是吸引子 $\mathcal{A}_\alpha$ 上的严格 Lyapunov 泛函. 因此, 根据吸引子理论^[12, 15, 25, 39] 知, $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{M}^+(\mathcal{N})$, 并且吸引子 $\mathcal{A}_\alpha$ 中的任意全轨道 $\gamma = \{\xi_u^\alpha(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ 具有性质 (i) 和 (ii). $\square$

5 指数吸引子

定理 5.1^[16] 设 $V: M \rightarrow M$ 是定义在 Banach 空间 X 中有界闭集 M 上的映射, 并存在从 M 到 Banach 空间 Z 的 Lipschitz 映射 K , 即

$$\|Kv_1 - Kv_2\|_Z \leq L_K \|v_1 - v_2\|_X, \quad \forall v_1, v_2 \in M,$$

以及 Z 上的紧半模 $n_Z(x)$, 使得

$$\|Vv_1 - Vv_2\|_X \leq \eta \|v_1 - v_2\|_X + n_Z(Kv_1 - Kv_2), \quad \forall v_1, v_2 \in M,$$

其中 $0 < \eta < 1$, 则对任意 $\theta \in (\eta, 1)$, 离散动力系统 (V^k, M) (装备 X 度量) 存在指数吸引子 A_θ , 并且

$$\dim_f A_\theta \leq \left[\ln \frac{1}{\theta} \right]^{-1} \ln m_Z \left(\frac{2L_K}{\theta - \eta} \right),$$

其中 $m_Z(R)$ 为球 $\{z \in Z \mid \|z\|_Z \leq R\}$ 中满足条件 $n_Z(z_i - z_j) > 1$ ($i \neq j$) 的元素 z_i 的最大个数.

引理 5.1 设假设 3.1 成立, 其中 $1 \leq p < p_\alpha$, 则

$$\int_0^T \|z_{tt}(\tau)\|_{V_{-\beta}}^2 d\tau \leq C(T)(\|z(0)\|_{V_\alpha}^2 + \|z_t(0)\|_{V_{-\alpha}}^2), \quad (5.1)$$

其中 $\beta > \max\{\frac{N}{2} + 2, 2\alpha\}$, $z = u - v$ 如定理 3.1 所示.

证明 据假设 3.1(i) 和估计式 (3.3) 得到

$$\begin{aligned} & \|\phi(-A^{\frac{1}{2}}u) - \phi(-A^{\frac{1}{2}}v)\|_1^2 \\ & \leq C \left(\int_\Omega (1 + |A^{\frac{1}{2}}u|^{p-1} + |A^{\frac{1}{2}}v|^{p-1}) |A^{\frac{1}{2}}z| dx \right)^2 \\ & \leq C(1 + \|A^{\frac{1}{2}}u\|_{p-1}^{p-1} + \|A^{\frac{1}{2}}v\|_{p-1}^{p-1}) \left(\int_\Omega (1 + |A^{\frac{1}{2}}u|^{p-1} + |A^{\frac{1}{2}}v|^{p-1}) |A^{\frac{1}{2}}z|^2 dx \right) \\ & \leq C \left(\|z\|_{V_2}^2 + \int_\Omega (|A^{\frac{1}{2}}u|^{p-1} + |A^{\frac{1}{2}}v|^{p-1}) |A^{\frac{1}{2}}z|^2 dx \right), \\ & \|f(u) - f(v)\|_1^2 \leq C\|z\|^2. \end{aligned}$$

因此, 据方程 (3.10) 可得

$$\begin{aligned} \|z_{tt}\|_{V_{-\beta}}^2 & \leq C(\|z\|_{V_{4-\beta}}^2 + \|z_t\|_{V_{2\alpha-\beta}}^2 + \|\phi(-A^{\frac{1}{2}}u) - \phi(-A^{\frac{1}{2}}v)\|_{V_{2-\beta}}^2 + \|f(u) - f(v)\|_{V_{-\beta}}^2) \\ & \leq C(\|z\|_{V_2}^2 + \|z_t\|^2 + \|\phi(-A^{\frac{1}{2}}u) - \phi(-A^{\frac{1}{2}}v)\|_1^2 + \|f(u) - f(v)\|_1^2) \\ & \leq C \left(\|z\|_{V_2}^2 + \|z_t\|^2 + \int_\Omega (|A^{\frac{1}{2}}u|^{p-1} + |A^{\frac{1}{2}}v|^{p-1}) |A^{\frac{1}{2}}z|^2 dx \right), \end{aligned} \quad (5.2)$$

这里用到了下列 Sobolev 嵌入:

$$V_2 \hookrightarrow V_{4-\beta}, \quad H \hookrightarrow V_{2\alpha-\beta}, \quad V_{\beta-2} \hookrightarrow L^\infty, \quad L^1 \hookrightarrow V_{2-\beta} \hookrightarrow V_{-\beta}.$$

(5.2) 在 $(0, T)$ 上积分并利用 (3.16) 得到 (5.1). $\square$

定理 5.2 设假设 3.1 成立, 其中 $1 \leq p < p_\alpha$, 则半群 $\{S^\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ 在相空间 $\mathcal{E}$ 中存在指数吸引子 $\mathcal{A}_{\text{exp}}^\alpha$.

证明 定义算子 $V_\alpha^k = S^\alpha(kT) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, 其中 $\mathcal{B}$ 如 (4.1) 所示.

首先证明离散动力系统 $(V_\alpha^k, \mathcal{B})$ (装备 $\mathcal{E}_{-\alpha}$ 拓扑) 存在指数吸引子. 引入函数空间

$$Z = \{\xi_z = (z, z_t) \in L^2(0, T; \mathcal{E}_{-\alpha}) \mid z_{tt} \in L^2(0, T; V_{-\beta}), \|\xi_z\|_Z < \infty\},$$

装备范数

$$\|\xi_z\|_Z^2 \equiv \int_0^T (\|\xi_z(t)\|_{\mathcal{E}_{-\alpha}}^2 + \|z_{tt}(t)\|_{V_{-\beta}}^2) dt.$$

显然, Z 是 Banach 空间. 定义映射

$$K: \mathcal{B} \rightarrow Z, \quad K\xi_u = (\xi_u^\alpha(\cdot), u_{tt}^\alpha(\cdot)), \quad \forall \xi_u \in \mathcal{B},$$

其中 $(\xi_u^\alpha(\cdot), u_{tt}^\alpha(\cdot)) = (\xi_u^\alpha(t), u_{tt}^\alpha(t)) = (S^\alpha(t)\xi_u, u_{tt}^\alpha(t))$, $t \in [0, T]$. 据 (3.5) 和 (5.1) 得到

$$\|K\xi_{u_1} - K\xi_{u_2}\|_Z^2 = \int_0^T (\|\xi_z^\alpha(t)\|_{\mathcal{E}_{-\alpha}}^2 + \|z_{tt}^\alpha(t)\|_{V_{-\beta}}^2) dt \leq C(T) \|\xi_z^\alpha(0)\|_{\mathcal{E}_{-\alpha}}^2,$$

其中 $\xi_{u_1}, \xi_{u_2} \in \mathcal{B}$, $\xi_z^\alpha(t) = \xi_{u_1}^\alpha(t) - \xi_{u_2}^\alpha(t)$, $z^\alpha(t) = u_1^\alpha(t) - u_2^\alpha(t)$. 定义泛函

$$n_Z: Z \rightarrow \mathbb{R}, \quad n_Z(\xi_u(\cdot)) = C(\mathcal{B}) \|\xi_u(\cdot)\|_{L^2(0,T;H \times V_{-2\alpha})}.$$

据 $Z \hookrightarrow L^2(0, T; H \times V_{-2\alpha})$ 可知, $n_Z(\cdot)$ 是 Z 上的紧半模. 估计式 (3.6) 表明,

$$\|V_\alpha \xi_{u_1} - V_\alpha \xi_{u_2}\|_{\mathcal{E}_{-\alpha}} \leq \eta_T \|\xi_{u_1} - \xi_{u_2}\|_{\mathcal{E}_{-\alpha}} + n_Z(K\xi_{u_1} - K\xi_{u_2}),$$

其中 $\eta_T = Ce^{-\kappa T/2}$. 选取 $T: 0 < \eta_T < 1$, 据定理 5.1 知, 动力系统 $(V_\alpha^k, \mathcal{B})$ 存在指数吸引子 $\mathbb{A}^\alpha$. 定义

$$\mathcal{A}_{\text{exp}}^\alpha = \bigcup_{0 \leq t \leq T} S^\alpha(t) \mathbb{A}^\alpha, \quad \alpha \in (1, 2).$$

使用标准的方法 (参见文献 [40]) 容易证明 $\mathcal{A}_{\text{exp}}^\alpha$ 为动力系统 $(S^\alpha(t), \mathcal{B})$ (装备 $\mathcal{E}_{-\alpha}$ -拓扑) 的指数吸引子. 据 $t > 0$ 时问题 (2.1) 和 (2.2) 弱解的整体正则性, 我们使用插值不等式可恢复相空间 $\mathcal{E}$ 的拓扑, 并容易证明 $\mathcal{A}_{\text{exp}}^\alpha$ 是动力系统 $(S^\alpha(t), \mathcal{E})$ 的指数吸引子. $\square$

注 5.1 因为 $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}_{\text{exp}}^\alpha$, 据定理 5.2 可知, 定理 4.1 中得到的整体吸引子 $\mathcal{A}_\alpha$ 在 $\mathcal{E}$ 中有有限的分形维数.

6 整体吸引子的上半连续性

引理 6.1 ^[16] 设 X 是完备度量空间, 并假定对任意 $\lambda \in \Lambda$, 动力系统 $(S^\lambda(t), X)$ 存在紧的整体吸引子 A^λ . 如果下列条件成立:

- (i) 存在紧集 $K \subset X$ 使得对任意 $\lambda \in \Lambda$ 有 $A^\lambda \subset K$;
 - (ii) 如果 $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$, $x_k \in A^{\lambda_k}$, $x_k \rightarrow x_0$, 则存在 $t_0 > 0$ 使得 $S^{\lambda_k}(t_0)x_k \rightarrow S^{\lambda_0}(t_0)x_0$,
- 则吸引子族 $\{A^\lambda\}$ 在 λ_0 处上半连续, 即 $\lim_{\lambda_k \rightarrow \lambda_0} \text{dist}_X\{A^{\lambda_k}, A^{\lambda_0}\} = 0$.

引理 6.2 设假设 3.1 成立, 其中 $1 \leq p < p_\alpha$, 则

- (i) 半群 $S^\alpha(t)$ 在 $\mathcal{B}$ (参见 (4.1)) 上关于 $\mathcal{E}_{-1}$ ($\equiv V_1 \times V_{-1}$) 拓扑 $(2-\alpha)/\alpha$ -Hölder 连续;
- (ii) 集合 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{E}_{-1}$ 中的紧集;
- (iii) $\mathcal{A}_\alpha = \omega_{\mathcal{E}_{-\alpha}}(B_\alpha) = \omega_{\mathcal{E}_{-1}}(B_\alpha)$, 其中 $\omega_{\mathcal{E}_{-1}}(B_\alpha)$ 是 B_α 在 $\mathcal{E}_{-1}$ 拓扑意义下的 ω -极限集.

证明 (i) 对任意的 $\xi_u = (u, v) \in \mathcal{B}$, 有

$$\|\xi_u\|_{\mathcal{E}_{-\alpha}} \leq C(\|u\|_{V_\alpha} + \|v\|_{V_{-\alpha}}) \leq C(\|u\|_{V_2}^{\alpha-1} \|u\|_{V_1}^{2-\alpha} + \|v\|_{V_{-1}}) \leq C\|\xi_u\|_{\mathcal{E}_{-1}}^{2-\alpha}, \quad (6.1)$$

$$\|\xi_u\|_{\mathcal{E}_{-1}} \leq C(\|u\|_{V_1} + \|v\|_{V_{-1}}) \leq C(\|u\|_{V_\alpha} + \|v\|^{1-\frac{1}{\alpha}} \|v\|_{V_{-\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}}) \leq C\|\xi_u\|_{\mathcal{E}_{-\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (6.2)$$

综合 (6.1)、(6.2) 和 (3.5) 证得结论 (i).

(ii) 对任意 $\{\xi_{u^n}\} \subset \mathcal{B}$, 因为 $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}_{-1}$, 所以 (必要时可抽取子列)

$$\text{在 } \mathcal{E}_{-1} \text{ 中 } \xi_{u^n} \rightarrow \xi_u.$$

不等式 (6.1) 意味着在 $\mathcal{E}_{-\alpha}$ 中, $\xi_{u^n} \rightarrow \xi_u$. 因此, $\xi_u \in \mathcal{B}$, 结论 (ii) 成立.

(iii) 据不等式 (6.1) 和 (6.2) 得到

$$\text{在 } \mathcal{E}_{-\alpha} \text{ 中 } \xi_{u^n} \rightarrow \xi_u \text{ 的充分必要条件是 在 } \mathcal{E}_{-1} \text{ 中 } \xi_{u^n} \rightarrow \xi_u,$$

所以, $(\mathcal{A}_\alpha =) \omega_{\mathcal{E}_{-\alpha}}(B_\alpha) = \omega_{\mathcal{E}_{-1}}(B_\alpha)$. □

定理 6.1 设假设 3.1 成立, 其中 $1 \leq p < p_{\alpha_0}$, $\alpha_0 \in (1, 2)$, 则定理 4.1 中得到的整体吸引子族 $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ 在 α_0 处上半连续, 即

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \text{dist}_{\mathcal{E}}\{\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_{\alpha_0}\} = 0. \quad (6.3)$$

证明 从引理 6.2 和定理 4.1 的证明可知, $\mathcal{A}_\alpha$ 也是动力系统 $(S^\alpha(t), \mathcal{B})$ (装备 $\mathcal{E}_{-1}$ 拓扑) 的整体吸引子, 下面首先利用引理 6.1 证明

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \text{dist}_{\mathcal{E}_{-1}}\{\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_{\alpha_0}\} = 0. \quad (6.4)$$

因 $\alpha \rightarrow \alpha_0$, 不失一般性, 可假设 $\alpha \in [\gamma, \alpha_0 + \delta] \equiv \Lambda \subset (1, 2)$, 其中 $\gamma \equiv \alpha_0 - \delta (> 1)$, $\delta : 0 < \delta < \frac{1}{3} \min\{\alpha_0 - 1, 2 - \alpha_0\}$.

(i) 方程 (2.1) 对 t 形式求导, 而后用乘子 $A^{-\frac{\gamma}{2}} u_{tt}^\alpha + \epsilon u_t^\alpha$ ($0 < \epsilon \ll 1$) 作用, 类似于估计式 (3.17) 和 (3.18) 的证明可知, 当 $1 \leq p < p_\gamma \equiv \frac{N+4(\gamma-1)}{(N-4(\gamma-1))^+}$ 时, 对任意的 $\alpha \in \Lambda$ 和任意的 $a > 0$, 有

$$\|u^\alpha(t)\|_{W^{2,2p}}^{2p} + \|u_t^\alpha(t)\|_{V_\gamma}^2 + \|u_{tt}^\alpha(t)\|_{V_{-\gamma}}^2 \leq \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) C(R_0, \|g\|), \quad t > 0, \quad (6.5)$$

$$\|u^\alpha(t)\|_{V_{1+\gamma}}^2 + \int_t^{t+1} \|u^\alpha(\tau)\|_{V_3}^2 d\tau \leq \left(1 + \frac{1}{(t-a/2)^{\frac{2}{2-\gamma}}}\right) C(\alpha_0) C(R_0, \|g\|), \quad t > \frac{a}{2}, \quad (6.6)$$

这里用到了 $\alpha \in \Lambda$ 和 Sobolev 嵌入

$$\|u\|_{V_{1+\gamma}} \leq \max\{1, \lambda_1^{-\frac{1}{2}}\} \|u\|_{V_{1+\alpha}}, \quad \forall u \in V_{1+\alpha}.$$

显然, (6.5) 和 (6.6) 对 Galerkin 近似解成立. 再根据弱解的下半连续性和唯一性 (参见 (3.5)) 可知, 对任意的 $\alpha \in \Lambda$, (6.5) 和 (6.6) 对问题 (2.1) 和 (2.2) 的弱解 u^α 一致成立.

令

$$K = \left[\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \right]_{\mathcal{E}_{-1}},$$

其中 B_α 如 (4.1) 所示. 显然, K 是 $S^\alpha(t)$ 的正不变的吸收集, 并在 $\mathcal{E}_\gamma (\equiv (W^{2,2p} \cap V_{\gamma+1}) \times V_\gamma)$ 中有界. 又因为 $\mathcal{E}_\gamma \hookrightarrow \mathcal{E}_{-1}$, 故它是 $\mathcal{E}_{-1}$ 中的紧集. 因此, $(S^\alpha(t), K)$ (装备 $\mathcal{E}_{-1}$ 拓扑) 是耗散动力系统, 它存在整体吸引子 $\omega_{\mathcal{E}_{-1}}(B_\alpha)$. 据引理 6.2 可知, 对所有 $\alpha \in \Lambda$, 有 $\mathcal{A}_\alpha = \omega_{\mathcal{E}_{-1}}(B_\alpha) \subset K$.

(ii) 对任意的 $\xi_u = (u, v) \in K$, 据插值定理, 类似于 (6.1) 和 (6.2) 的证明, 得到

$$\|u\|_{V_\alpha} + \|v\|_{V_{-\gamma}} \leq C(\|u\|_{V_2}^{\alpha-1} \|u\|_{V_1}^{2-\alpha} + \|v\|_{V_{-1}}) \leq C\|\xi_u\|_{\mathcal{E}_{-1}}^{2-\alpha},$$

$$\|\xi_u\|_{\mathcal{E}_{-1}} \leq \|u\|_{V_1} + C\|v\|^{1-\frac{1}{\gamma}}\|v\|_{V_{-\gamma}}^{\frac{1}{\gamma}} \leq C(\|u\|_{V_\alpha} + \|v\|_{V_{-\gamma}})^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (6.7)$$

令 $\xi_{u^\alpha}(t) = S^\alpha(t)\xi_{u^\alpha}$, $\alpha \in \Lambda$, $\xi_{u^\alpha} \in \mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in \Lambda \setminus \{\alpha_0\}$, 并假设

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \|\xi_{u^\alpha} - \xi_{u^{\alpha_0}}\|_{\mathcal{E}_{-1}} = 0,$$

则 $\xi_{u^{\alpha_0}} \in K$, 并且当 $\alpha \rightarrow \alpha_0$ 时,

$$\|\xi_{u^\alpha} - \xi_{u^{\alpha_0}}\|_{V_\alpha \times V_{-\gamma}} \leq C\|\xi_{u^\alpha} - \xi_{u^{\alpha_0}}\|_{\mathcal{E}_{-1}}^{2-\alpha} \rightarrow 0, \quad (6.8)$$

显然, $z = u^\alpha - u^{\alpha_0}$ 满足

$$\begin{aligned} z_{tt} + Az + A^{\frac{\alpha}{2}}z_t + (A^{\frac{\alpha}{2}} - A^{\frac{\alpha_0}{2}})u_t^{\alpha_0} - A^{\frac{1}{2}}[\phi(-A^{\frac{1}{2}}u^\alpha) - \phi(-A^{\frac{1}{2}}u^{\alpha_0})] + f(u^\alpha) - f(u^{\alpha_0}) &= 0, \\ z(0) = u_0^\alpha - u_0^{\alpha_0}, \quad z_t(0) = u_1^\alpha - u_1^{\alpha_0}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

用乘子 $A^{-\frac{\gamma}{2}}z_t + \epsilon z$ 作用于 (6.9) 得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}H_3(\xi_z) + \|z_t\|_{V_{\alpha-\gamma}}^2 - \epsilon\|z_t\|^2 + \epsilon[\|z\|_{V_2}^2 + (\phi(-A^{\frac{1}{2}}u^\alpha) - \phi(-A^{\frac{1}{2}}u^{\alpha_0}), -A^{\frac{1}{2}}z)] \\ &= -((A^{\frac{\alpha}{2}} - A^{\frac{\alpha_0}{2}})u_t^{\alpha_0} + f(u^\alpha) - f(u^{\alpha_0}), A^{-\frac{\gamma}{2}}z_t + \epsilon z) \\ & \quad + (\phi(-A^{\frac{1}{2}}u^\alpha) - \phi(-A^{\frac{1}{2}}u^{\alpha_0}), A^{\frac{1-\gamma}{2}}z_t), \end{aligned} \quad (6.10)$$

其中 $\xi_z = (z, z_t)$, $H_3(\xi_z) = \frac{1}{2}(\|z_t\|_{V_{-\gamma}}^2 + \|z\|_{V_{2-\gamma}}^2) + \epsilon(\frac{1}{2}\|z\|_{V_\alpha}^2 + (z, z_t)) \sim \|z\|_{V_\alpha}^2 + \|z_t\|_{V_{-\gamma}}^2$ ($\epsilon > 0$ 适当小), 这里用到了 $2-\gamma \leq \gamma \leq \alpha$, $V_\alpha \hookrightarrow V_\gamma \hookrightarrow V_{2-\gamma}$. 考虑到 $V_{\alpha+\gamma} \hookrightarrow V_2$, $V_{-2} \hookrightarrow V_{-\alpha-\gamma}$, 我们得到

$$\begin{aligned} & |((A^{\frac{\alpha}{2}} - A^{\frac{\alpha_0}{2}})u_t^{\alpha_0}, A^{-\frac{\gamma}{2}}z_t + \epsilon z)| \\ & \leq \|A^{-\frac{\gamma}{2}}z_t\|_{V_{\alpha+\gamma}} \|(A^{\frac{\alpha}{2}} - A^{\frac{\alpha_0}{2}})u_t^{\alpha_0}\|_{V_{-\alpha-\gamma}} + \epsilon\|z\|_{V_2} \|(A^{\frac{\alpha}{2}} - A^{\frac{\alpha_0}{2}})u_t^{\alpha_0}\|_{V_{-2}} \\ & \leq \frac{\epsilon}{2}(\|z_t\|_{V_{\alpha-\gamma}}^2 + \|z\|_{V_2}^2) + C(\epsilon)\|(A^{\frac{\alpha}{2}} - A^{\frac{\alpha_0}{2}})u_t^{\alpha_0}\|_{V_{-2}}^2. \end{aligned}$$

当 $1 \leq p < p_\gamma$ (这意味着 $V_{2(\gamma-1)} \hookrightarrow L^{p_\gamma+1}$) 时, 重复 (3.12)–(3.15) (将那里的 α 换为 γ) 的证明得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}H_3(\xi_z) \leq C(\|z\|^2 + \|z_t\|_{V_{-2\gamma}}^2 + \|(A^{\frac{\alpha}{2}} - A^{\frac{\alpha_0}{2}})u_t^{\alpha_0}\|_{V_{-2}}^2) \leq CH_3(\xi_z) + C\|(A^{\frac{\alpha}{2}} - A^{\frac{\alpha_0}{2}})u_t^{\alpha_0}\|_{V_{-2}}^2, \\ & \|(z, z_t)(t)\|_{V_\alpha \times V_{-\gamma}}^2 \leq Ce^{Ct}\|(z, z_t)(0)\|_{V_\alpha \times V_{-\gamma}}^2 + C \int_0^t e^{C(t-\tau)} \|(A^{\frac{\alpha}{2}} - A^{\frac{\alpha_0}{2}})u_t^{\alpha_0}(\tau)\|_{V_{-2}}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (6.11)$$

因为对任意 $\tau \in (0, t)$, $u_t^{\alpha_0}(\tau) \in V_{\alpha_0} \hookrightarrow H$, $u_t^{\alpha_0}(\tau) = \sum_{j=1}^\infty c_j(\tau)w_j$, 其中 $Aw_j = \lambda_j w_j$, $j = 1, 2, \dots$, 又因为 $\alpha \in \Lambda$ 意味着 $\alpha \leq \alpha_0/2 + 1$, 所以,

$$\begin{aligned} A^\beta u_t^{\alpha_0}(\tau) &= \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^\beta c_j(\tau)w_j, \quad \beta \leq \frac{\alpha_0}{4}, \\ \sum_{j=1}^\infty |(\lambda_j^{\frac{2\alpha-2}{4}} - \lambda_j^{\frac{2\alpha_0-2}{4}})c_j(\tau)|^2 &= \|(A^{\frac{2\alpha-2}{4}} - A^{\frac{2\alpha_0-2}{4}})u_t^{\alpha_0}(\tau)\|^2 = \|(A^{\frac{\alpha}{2}} - A^{\frac{\alpha_0}{2}})u_t^{\alpha_0}(\tau)\|_{V_{-2}}^2 \\ &\leq C(\|u_t^{\alpha_0}(\tau)\|_{V_{2\alpha-2}}^2 + \|u_t^{\alpha_0}(\tau)\|_{V_{2\alpha_0-2}}^2) \leq C\|u_t^{\alpha_0}(\tau)\|_{V_{\alpha_0}}^2. \end{aligned} \quad (6.12)$$

因此, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在常数 $N = N(\alpha_0) > 0$ 使得

$$\sum_{j>N} |(\lambda_j^{\frac{2\alpha-2}{4}} - \lambda_j^{\frac{2\alpha_0-2}{4}})c_j(\tau)|^2 \leq C \sum_{j>N} |\lambda_j^{\frac{\alpha_0}{4}} c_j(\tau)|^2 < \frac{\epsilon}{2},$$

存在 $\delta_0 : 0 < \delta_0 < \delta$ 使得当 $0 < |\alpha - \alpha_0| < \delta_0$ 时,

$$\sum_{j=1}^N |(\lambda_j^{\frac{2\alpha-2}{4}} - \lambda_j^{\frac{2\alpha_0-2}{4}})c_j(t)|^2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

因此, 对任意的 $\tau \in (0, t)$, 有

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \|(A^{\frac{\alpha}{2}} - A^{\frac{\alpha_0}{2}})u_t^{\alpha_0}(\tau)\|_{V_{-2}}^2 = 0.$$

据 $u_t^{\alpha_0} \in L^2(0, t; V_{\alpha_0})$ (参见 (3.4))、(6.12) 和 Lebesgue 控制收敛定理, 可得

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_0^t e^{C(t-\tau)} \|(A^{\frac{\alpha}{2}} - A^{\frac{\alpha_0}{2}})u_t^{\alpha_0}(\tau)\|_{V_{-2}}^2 d\tau = 0. \quad (6.13)$$

综合 (6.7)、(6.8)、(6.11) 和 (6.13) 得到

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \|(z, z_t)(t)\|_{\mathcal{E}_{-1}} \leq C \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \|(z, z_t)(t)\|_{V_{\alpha} \times V_{-\gamma}}^{1/\gamma} = 0.$$

据引理 6.1 和 δ 的任意性可知, 当 $1 \leq p < p_{\alpha_0}$ 时, (6.4) 成立.

据插值不等式, 可得

$$\begin{aligned} \|v\| &\leq C \|v\|_{V_{\gamma}}^{\frac{1}{\gamma+1}} \|v\|_{V_{-1}}^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \leq C \|v\|_{V_{-1}}^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}, \\ \|u\|_{W^{2,p+1}} &\leq \begin{cases} C \|u\|_{V_{\gamma+1}}^{\frac{1}{\gamma}} \|u\|_{V_1}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, & p = 1, \\ C \|u\|_{W^{2,2p}}^{\frac{p}{p+1}} \|u\|_{V_{\gamma+1}}^{\frac{1}{\gamma(p+1)}} \|u\|_{V_1}^{\frac{\gamma-1}{\gamma(p+1)}}, & 1 < p < p_{\gamma} \end{cases} \\ &\leq C \|u\|_{V_1}^{\theta_1}, \end{aligned}$$

其中 $\theta_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma(p+1)}$, 再由 δ 的任意性和 (6.4) 可知,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \text{dist}_{\mathcal{E}} \{\mathcal{A}_{\alpha}, \mathcal{A}_{\alpha_0}\} \leq C \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} [\text{dist}_{\mathcal{E}_{-1}} \{\mathcal{A}_{\alpha}, \mathcal{A}_{\alpha_0}\}]^{\theta_1} = 0$$

对 $1 \leq p < p_{\alpha_0}$ 成立. □

参考文献

- 1 Banks H T, Gilliam D S, Shubov V I. Global solvability for damped abstract nonlinear hyperbolic systems. *Differ Integral Equ Appl*, 1997, 10: 309–332
- 2 Chen G, Russell D L. A mathematical model for linear elastic systems with structural damping. *Quart Appl Math*, 1982, 39: 433–454
- 3 Chen S, Triggiani R. Proof of two conjectures of G. Chen and D. L. In: Russell on structural damping for elastic systems: The case $\alpha = 1/2$. In: *Approximation and Optimization. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1354. New York: Springer-Verlag, 1988, 234–256
- 4 Chen S P, Triggiani R. Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems. *Pacific J Math*, 1989, 136: 15–55

- 5 Chen S P, Triggiani R. Gevrey class semigroups arising from elastic systems with gentle dissipation: The case $0 < \alpha < 1/2$. *Proc Amer Math Soc*, 1990, 110: 401–415
- 6 Aassila M, Guesmia A. Energy decay for a damped nonlinear hyperbolic equation. *Appl Math Lett*, 1999, 12: 49–52
- 7 Ackleh A S, Banks H T, Pinter G A. A nonlinear beam equation. *Appl Math Lett*, 2002, 15: 381–387
- 8 Chen G W, Wang Y P, Zhao Z C. Blow-up of solution of an initial boundary value problem for a damped nonlinear hyperbolic equation. *Appl Math Lett*, 2004, 17: 491–497
- 9 Chen G W, Da F. Blow-up of solution of Cauchy problem for three-dimensional damped nonlinear hyperbolic equation. *Nonlinear Anal*, 2009, 71: 358–372
- 10 Kalantarov V, Zelik S. Finite-dimensional attractors for the quasi-linear strongly-damped wave equation. *J Differential Equations*, 2009, 247: 1120–1155
- 11 Song C M, Yang Z J. Existence and nonexistence of global solutions to the Cauchy problem for a nonlinear beam equation. *Math Methods Appl Sci*, 2010, 33: 563–575
- 12 Babin A V, Vishik M I. *Attractors of Evolutionary Equations*. Amsterdam: North-Holland, 1992
- 13 Ball J M. Global attractors for damped semilinear wave equations. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2004, 10: 31–52
- 14 de Carvalho A N, Cholewa J W, Dlotko T. Damped wave equations with fast growing dissipative nonlinearities. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2009, 24: 1147–1165
- 15 Chueshov I, Lasiecka I. *Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping*. Providence: Amer Math Soc, 2008
- 16 Chueshov I. *Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems*. Cham: Springer, 2015
- 17 Temam R. *Infinite-Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics*. New York: Springer-Verlag, 1997
- 18 Chueshov I. Global attractors for a class of Kirchhoff wave models with a structural nonlinear damping. *J Abstr Differ Equ Appl*, 2010, 1: 86–106
- 19 Chueshov I. Long-time dynamics of Kirchhoff wave models with strong nonlinear damping. *J Differential Equations*, 2012, 252: 1229–1262
- 20 Ding P Y, Yang Z J, Li Y N. Global attractor of the Kirchhoff wave models with strong nonlinear damping. *Appl Math Lett*, 2018, 76: 40–45
- 21 Ma H L, Zhong C K. Attractors for the Kirchhoff equations with strong nonlinear damping. *Appl Math Lett*, 2017, 74: 127–133
- 22 Nakao M. An attractor for a nonlinear dissipative wave equation of Kirchhoff type. *J Math Anal Appl*, 2009, 353: 652–659
- 23 Wang Y H, Zhong C K. Upper semicontinuity of pullback attractors for nonautonomous Kirchhoff wave models. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2013, 33: 3189–3209
- 24 Yang Z J, Wang Y Q. Global attractor for the Kirchhoff type equation with a strong dissipation. *J Differential Equations*, 2010, 249: 3258–3278
- 25 Yang Z J, Ding P Y, Li L. Longtime dynamics of the Kirchhoff equations with fractional damping and supercritical nonlinearity. *J Math Anal Appl*, 2016, 442: 485–510
- 26 Chen F X, Guo B L, Wang P. Long time behavior of strongly damped nonlinear wave equations. *J Differential Equations*, 1998, 147: 231–241
- 27 Nakao M, Yang Z J. Global attractors for some quasi-linear wave equations with a strong dissipation. *Adv Math Sci Appl*, 2007, 17: 89–105
- 28 Yang Z J, Liu Z M. Longtime dynamics of the quasi-linear wave equations with structural damping and supercritical nonlinearities. *Nonlinearity*, 2017, 30: 1120–1145
- 29 Yang Z J, Liu Z M. Global attractor of the quasi-linear wave equation with strong damping. *J Math Anal Appl*, 2018, 458: 1292–1306
- 30 Carvalho A N, Langa J A. Non-autonomous perturbation of autonomous semilinear differential equations: Continuity of local stable and unstable manifolds. *J Differential Equations*, 2007, 233: 622–653
- 31 Fabrie P, Galusinski C, Miranville A, et al. Uniform exponential attractors for a singularly perturbed damped wave equation. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2004, 10: 211–238
- 32 Geredeli P G, Lasiecka I. Asymptotic analysis and upper semicontinuity with respect to rotational inertia of attractors to von Karman plates with geometrically localized dissipation and critical nonlinearity. *Nonlinear Anal*, 2013, 91: 72–92
- 33 Hale J K, Raugel G. Upper semicontinuity of the attractor for a singularly perturbed hyperbolic equation. *J Differential*

- Equations, 1988, 73: 197–214
- 34 Miranville A, Pata V, Zelik S. Exponential attractors for singularly perturbed damped wave equations: A simple construction. *Asymptot Anal*, 2007, 53: 1–12
 - 35 Zelati M C. Global and exponential attractors for the singularly perturbed extensible beam. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2009, 25: 1041–1060
 - 36 Simon J. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$. *Ann Mat Pura Appl* (4), 1986, 146: 65–96
 - 37 Belleri V, Pata V. Attractors for semilinear strongly damped wave equations on $\mathbb{R}^3$. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2001, 7: 719–735
 - 38 Yang Z J, Ding P Y. Longtime dynamics of the Kirchhoff equation with strong damping and critical nonlinearity on $\mathbb{R}^N$. *J Math Anal Appl*, 2016, 434: 1826–1851
 - 39 Chueshov I, Lasiecka I. *Von Karman Evolution Equations: Well-posedness and Long Time Dynamics*. New York: Springer-Verlag, 2010
 - 40 Yang Z J, Li X. Finite-dimensional attractors for the Kirchhoff equation with a strong dissipation. *J Math Anal Appl*, 2011, 375: 579–593

Attractors and their upper semicontinuity for the quasi-linear membrane equation with structural damping

Pengyan Ding, Zhijian Yang & Yajuan Zhao

Abstract The paper investigates the well-posedness and longtime dynamics of the quasi-linear membrane equation with structural damping: $u_{tt} + \Delta^2 u + (-\Delta)^\alpha u_t + \Delta \phi(\Delta u) + f(u) = g$, with $\alpha \in (1, 2)$. We are concerned with the influence of the dissipative index α to the well-posedness and longtime dynamics of the equation. We show that there exists a critical exponent $p_\alpha = \frac{N+4(\alpha-1)}{(N-4(\alpha-1))^+}$ of the nonlinearity $\phi(s)$, which depends on the dissipative index α , such that when $1 \leq p < p_\alpha$, without any polynomial growth assumption on the nonlinearity $f(u)$ for the cases: either $N = 3$ or $1 < p < p_\alpha$, $N = 4$ and without any polynomial growth restriction on $f(u)$ for the case $p = 1$, $N = 4$, (i) the initial boundary value problem of the equation is well-posed and its solution possesses additionally global regularity; (ii) the related solution semigroup $S^\alpha(t)$ has a global and an exponential attractor in natural energy space for each $\alpha \in (1, 2)$, respectively; (iii) the family of global attractors $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ is upper semicontinuous at each point $\alpha_0 \in (1, 2)$, i.e., for any neighborhood U of $\mathcal{A}_{\alpha_0}$, $\mathcal{A}_\alpha \subset U$ when $|\alpha - \alpha_0| \ll 1$.

Keywords quasi-linear membrane equation, structural damping, critical exponent, global attractor, exponential attractor, upper semicontinuity of attractors

MSC(2010) 35B40, 35B41, 37L15, 37L30, 35B33, 35B65

doi: 10.1360/SCM-2018-0901