非球对称情形箍猜想若干进展

献给胡和生教授 90 华诞

谢纳庆

复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: nxie@fudan.edu.cn

收稿日期: 2017-09-19; 接受日期: 2017-11-09; 网络出版日期: 2017-12-19

国家自然科学基金 (批准号: 11671089 和 11421061) 资助项目

摘要 本文简要地介绍了本文作者及其合作者最近几年在非球对称情形箍猜想研究方面的若干进展.

关键词 箍猜想 陷俘面 准局域质量

MSC (2010) 主题分类 83C75, 58Z05

1 引言

Einstein 建立广义相对论的一个根本出发点是将引力几何化, 用弯曲的时空来刻画宇宙. 众所周知, Einstein 引力场方程

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{R}\tilde{g}_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

是一个有关时空度规的二阶非线性偏微分方程组, 求解是一件相当困难的事情.

在无法直接求解 Einstein 引力场方程时, 如何研究时空的几何? 我们可以对时空的一些重要物理量 (如能量、质量和角动量等) 给出估计. 一个经典的例子就是广义相对论中有着基本重要性的正能量猜想^[1-3]. 正能量猜想是说满足主能量条件 (dominant energy condition) 的渐近平坦时空, 其 ADM (Arnowitt-Deser-Misner) 总能量^[4] 一定大于总动量. 这个定理可以看成是内部正则 (无黑洞) 孤立引力系统的总质量下界估计.

广义相对论预言了黑洞的存在. 著名的 Hawking-Penrose 奇点定理告诉我们, 在合理的物理条件下, 如果存在封闭的陷俘面 (trapped surface)^[5], 那么这个时空必定是非类空测地不完备的^[6]. 对于带黑洞的渐近平直时空, Penrose^[7] 于 1973 年提出, 时空的 ADM 总质量下界可以由所有黑洞的最外部 (outermost) 视界 (horizon) 面积之和来控制. 这就是 Penrose 猜想, 它与所谓的宇宙监督假设颇有渊源. 数学家严格证明了时间对称 (time-symmetric) 情形下 Penrose 猜想是成立的, 相应的不等式也称为 Riemannian Penrose 不等式^[8,9]. 但是一般情形下的 Penrose 猜想至今仍未得到证明.

英文引用格式: Xie N Q. Recent progress on the hoop conjecture in non-spherical symmetry (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 835-842, doi: 10.1360/N012017-00203

另一方面, 人们相信, 在某个有限区域内, 如果物质或者质量充分地聚集, 那么引力坍塌最终必将导致黑洞的形成. Thorne^[10] 于 1972 年提出了以下箍猜想 (hoop conjecture):

Horizons form when and only when a mass M gets compacted into a region whose circumference C in every direction is $C \lesssim 4\pi M$.

Thorne 在箍猜想中所指的是事件视界 (event horizon), 它涉及时空演化的整个历史. 表观视界 (apparent horizon) 可以视为事件视界的准局域体现. 陷俘面在时间上是“局部”的.

Seifert^[11] 于 1979 年提出了一个更为具体化的陷俘面猜想 (trapped surface conjecture):

Any mass that is concentrated within a sufficiently small diameter can be surrounded by a trapped surface.

箍猜想 (或者陷俘面猜想) 可以看作对“好的”时空的质量上界估计, 即“正常的”星体不能太稠密 (质量不能大过某个“箍尺寸”), 否则它就会坍塌. 显然, 人们对以上表述是不满意的. 以上表述故意模糊了关于“周长 (circumference)/直径 (diameter)”与“质量 (mass)”的概念. 球对称情形时, “周长”自然可以定义为

$$C = 2\pi R,$$

其中 $R = \sqrt{\text{Area}/4\pi}$ 为“面积半径”. 球对称情形下箍猜想的结果可参见文献 [12, 13].

但在一般情形下, 如何定义合理的“周长”是一个非常困难的问题^[14]. 此外, 引力理论中有各种不同的质量定义, 如 Arnowitt-Deser-Misner 质量^[4]、Brown-York 质量^[15] 和 Hawking 质量^[16] 等.

在去掉时空对称性的情形下, Schoen 和 Yau^[17] 证明了一个关于物质聚集产生视界的定理. 他们引入了一个非常复杂的尺度概念, 这里暂且记为 R_{SY} . Schoen-丘成桐半径 R_{SY} 的定义很抽象, 它用来刻画区域内最大嵌入环面. 对于一般形式的时空度规, 要显式写出或精确计算 R_{SY} 几乎是不可能的. 在 Schoen 与丘成桐的证明中, 视界的形成来源于 Jang 方程^[18] 的爆破 (blow up). 但是, 当时空外曲率 (extrinsic curvature) 很小或者时间对称时, Jang 方程是存在整体解的. 在这些情形下, 通过 Jang 方程爆破产生视界的机制是不适用的.

第 3 节将介绍 Khuri 和本文作者的工作 [19]. 为了克服以上困难与不足, 我们将在时空对称性与显式表达箍尺寸之间寻求平衡. 在轴对称的情形下, 我们建立并证明了关于物质聚集的能量 - 动量不等式, 并且给出了产生视界或者陷俘面的定理. 我们的结果包含了时间对称这个重要的情形.

Gibbons 等曾经试图用 Birkhoff 不变量作为箍尺寸来解决关于 ADM 总质量的箍猜想^[20, 21]. 然而, Mantoulidis 和 Schoen^[22] 在时间对称真空初始数据集中构造了反例. 注意到 ADM 总质量是定义在类空无穷远的, 本文作者与其合作者认为, 用准局域质量^[23] 来刻画视界更为合适^[13, 24]. 最近, Barrow 和 Gibbons^[25] 根据我们的建议, 重新叙述了箍猜想.

第 4 节将介绍 Malec 和本文作者的工作 [24]. 考虑具有等势叶状结构的共形平坦空间. 我们证明了此情形下关于 Brown-York 准局域质量的箍猜想, 得到了关于 Brown-York 准局域质量与静止质量的比较定理, 并且刻画了更为精细的“箍尺寸”. 这个结果本质性地推广了本文作者与其合作者关于球对称情形 Brown-York 质量的箍定理^[13].

需要指出的是, 除了物质聚集的情形, 真空也能产生陷俘面^[26, 27].

本文采用光速 c 与 Newton 万有引力常数 G 为 1 的几何单位制, 并且不考虑宇宙学常数项. 我们还约定时空度规的号差为 $(-, +, +, +)$, 用希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 表示 4 维时空指标, 用小写拉丁字母 $i, j, k, \dots$ 表示 3 维空间指标, 用大写拉丁字母 $A, B, \dots$ 表示 2 维曲面相应的指标.

2 预备知识

设时空 $(N^{3,1}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ 满足 Einstein 引力场方程 (1.1). 设 (M^3, g_{ij}, K_{ij}) 是一个类空 (spacelike) 超曲面, 其中 g_{ij} 和 K_{ij} 分别是 M 的诱导度规和外曲率. 用 ρ 和 J^i 分别表示物质场的能量密度 (energy density) 和动量密度 (momentum density), 则 Cauchy 面 M 的约束方程 (constraint equations) [28] 可以写成

$$16\pi\rho = R(g) - [K_{ij}K^{ij} - (\text{tr}K)^2], \quad 8\pi J^i = \nabla_j [K^{ij} - (\text{tr}K)g^{ij}]. \quad (2.1)$$

本文始终假设时空满足主能量条件,

$$\rho \geq \sqrt{J^i J_i}. \quad (2.2)$$

特别地, 当 Cauchy 面的外曲率 $K_{ij} = 0$ 时, 称初始数据集 (M^3, g_{ij}, K_{ij}) 是时间对称的. 当 $\text{tr}K = 0$ 时, 称初始数据集 (M^3, g_{ij}, K_{ij}) 是极大的 (maximal). 在这两种情形下, 主能量条件 (2.2) 都蕴含着 $R(g) \geq 0$.

记 n^μ 为 Cauchy 面 M 指向未来 (future directed) 的类时 (timelike) 单位法向量场. 记 Σ^2 为初始数据集 (M^3, g_{ij}, K_{ij}) 中的一个封闭的 2 维曲面. 用 m^μ 表示 Σ 在 M 中向外 (outward pointing) 的单位法向量场.

取 Σ 上两个零向量场 (null vector fields) $l_\pm^\mu = n^\mu \pm m^\mu$, 这里的下标 $+$ 和 $-$ 分别表示“向外”和“向内”. 记 H^μ 为闭曲面 Σ^2 在时空 $N^{3,1}$ 中的平均曲率向量场 (mean curvature vector field). 称

$$\theta_\pm = -H_\mu l_\pm^\mu \quad (2.3)$$

为 Σ 沿着类光方向 $l_\pm^\mu$ 的零展开 (null expansion). 通过一些计算可以得到

$$\theta_\pm = \pm H - K_{ij}m^i m^j + \text{tr}K, \quad (2.4)$$

其中 H 是曲面 Σ 在 M 中的平均曲率 (mean curvature):

$$H = \nabla_i m^i = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i (\sqrt{\det g} m^i). \quad (2.5)$$

定义 2.1 称曲面 Σ 是 (向外) 陷俘的, 如果曲面 Σ 上处处成立 $\theta_+ < 0$; 称曲面 Σ 为表观视界, 如果曲面 Σ 上处处成立 $\theta_+ = 0$.

注 2.1 设 V 是一个变分向量场, 则有面积第一变分公式 [29]

$$\delta_V |\Sigma| = - \int_\Sigma H^\mu V_\mu d\Sigma. \quad (2.6)$$

因此零展开是度量 Σ 上射出的光线发散程度. 零展开为负表示时空中曲面发射出来的光束是汇聚的, 显示这个曲面附近有很强的引力场. 所谓黑洞, 就是指无法与类光无穷远建立因果关系的时空区域, 它的边界被称为事件视界. 表观视界则可以看成是事件视界的准局域体现.

3 轴对称空间物质聚集能量 - 动量不等式

箍猜想 (或陷俘面猜想) 可以比较严格地表述成以下数学命题:

设 Ω^3 是时空 $(N^{3,1}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ 中一个具有紧致闭包和光滑边界的类空区域. 我们进一步假设时空 $(N^{3,1}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ 满足适当的能量条件, 则存在一个普适常数 (universal constant) $C > 0$, 使得: 如果 $\text{Mass}(\Omega)$

$> C \cdot \text{Size}(\Omega)$, 那么区域 Ω 必包含视界或陷俘面, 其中 $\text{Mass}(\Omega)$ 是量化区域 Ω 所含物质多少的某种质量, $\text{Size}(\Omega)$ 是刻画区域 Ω 大小的某种“箍尺寸”.

本节假设时空具有轴对称性. 轴对称是球对称的自然推广. 轴对称时空的等距群含有一个与 $U(1)$ 同构的子群, 相应的物理量在 $U(1)$ 群作用下是不变的. 记 η 为轴对称性所对应的 Killing 向量场, 则

$$\mathfrak{L}_\eta g = \mathfrak{L}_\eta K = 0, \quad \mathfrak{L}_\eta \rho = 0, \quad \mathfrak{L}_\eta J = 0, \quad (3.1)$$

其中 $\mathfrak{L}$ 表示 Lie 导数.

设 (M^3, g_{ij}, K_{ij}) 是渐近平坦的轴对称 Cauchy 面, 其上存在整体的 Brill 坐标系 (ρ, z, ϕ) . 空间诱导度规可以写成

$$g = e^{-2U+2\alpha}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 e^{-2U}(d\phi + A_\rho d\rho + A_z dz)^2, \quad (3.2)$$

其中 Killing 向量场 $\eta = \frac{\partial}{\partial \phi}$, U 、 α 、 A_ρ 和 A_z 都是不依赖于角变量 ϕ 的函数.

Brill 坐标的整体存在性蕴含了一个拓扑结论. 如果 M 是单连通的, 那么 M 必定同胚于 $\mathbb{R}^3$. 因此, 模掉对称性后, 轨道空间 $M/U(1)$ 同胚于 (右) 半平面. 我们将这个典则的投影记为 $\Pi: M \rightarrow M/U(1)$.

设 Ω 是 M 中具有紧致闭包和光滑边界的轴对称区域. 引入两个如下“箍尺寸”:

$$l = 2\pi \min_{\Omega} |\eta|, \quad L = 2\pi \max_{\Omega} |\eta|. \quad (3.3)$$

它们分别是 Ω 内轴对称轨道长度的最小值和最大值. 我们进一步假设 Ω 不接触对称轴, 即 $l > 0$.

Khuri 和本文作者^[19]得到了一个关于物质场能量-动量的上界估计. 我们的结果表明, 对于一个固定尺寸的区域, 如果它包含了太多的物质场, 那么必定会发生引力坍塌.

定理 3.1 (参见文献 [19, 定理 2.1]) 设 (M^3, g_{ij}, K_{ij}) 是轴对称的单连通 Cauchy 面. 设 Ω 是 M 中具有紧致闭包和光滑边界的轴对称区域, 并且 Ω 不接触对称轴. 如果主能量条件 (2.2) 成立, 并且 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是强非陷俘 (strongly untrapped) 的, 即 $H_{\partial\Omega} - |\text{Tr}_{\partial\Omega} K| > 0$, 那么,

(1) 若 Ω 不包含表观视界, 则

$$\int_{\Omega} (\rho - |J|) d\omega_g + \frac{L}{8\pi l} \int_{\partial\Omega} (H_{\partial\Omega} - |\text{Tr}_{\partial\Omega} K|) d\sigma_g \leq \frac{L^2}{4l} \chi(\Pi(\Omega)); \quad (3.4)$$

(2) 若

$$\int_{\Omega} (\rho - |J|) d\omega_g + \frac{L}{8\pi l} \int_{\partial\Omega} (H_{\partial\Omega} - |\text{Tr}_{\partial\Omega} K|) d\sigma_g > \frac{L^2}{4l} \chi(\Pi(\Omega)), \quad (3.5)$$

则 Ω 必包含表观视界,

其中 $\chi(\Pi(\Omega))$ 表示 Ω 在轨道空间中投影像的 Euler 示性数.

注 3.1 事实上, 定理 3.1 还给出了 Ω 的拓扑限制. 假设主能量条件 (2.2) 成立, 并且 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是强非陷俘的, 那么不等式 (3.4) 蕴含着 $\chi(\Pi(\Omega)) > 0$. 由曲面分类定理进一步知道 $\chi(\Pi(\Omega)) = 1$, $\Pi(\Omega)$ 同胚于圆盘, 即 Ω 必定同胚于一个实心的圆环. 这时, 我们可以显式地写出用来刻画物质场能量-动量上界的“箍尺寸” $\text{Size}(\Omega) = \frac{L^2}{4l}$.

定理 3.1 的证明基于轨道空间 $M/U(1)$ 上某种稳定性和广义 Jang 方程^[30,31] 的爆破分析. 有兴趣的读者可以参见文献 [19, 第 3 和 4 节].

在时间对称 ($K_{ij} = 0$) 的情形下 (或者 Cauchy 面是极大的情形, $\text{tr}K = 0$), 定理 3.1(2) 是没有意义的. 这时广义 Jang 方程存在整体解, 我们需要用别的方法来建立生成视界或者陷俘面的定理. 注意到这时主能量条件 (2.2) 蕴含着 Cauchy 面具有非负数量曲率, $R(g) \geq 0$.

定理 3.2 (参见文献 [19, 定理 5.1]) 设 (M^3, g_{ij}) 是轴对称的单连通 Cauchy 面. 设 Ω 是 M 中具有紧致闭包和光滑边界的轴对称区域, 并且 Ω 不接触对称轴. 进一步假设 (M^3, g_{ij}) 具有非负的数量曲率, $R(g) \geq 0$.

(1) 如果 $\partial\Omega$ 具有非负的平均曲率 $H \geq 0$, 那么,

$$\int_{\Omega} R d\omega_g + 2 \int_{\partial\Omega} H d\sigma_g \leq 4\pi L\chi(\Pi(\Omega)); \quad (3.6)$$

(2) 如果

$$\int_{\Omega} R d\omega_g > 4\pi L\chi(\Pi(\Omega)) + \frac{L}{\pi} |\partial\Omega| \operatorname{osc}(H|\eta|^{-1}), \quad (3.7)$$

那么 $\partial\Omega$ 是陷俘面.

其中 $|\partial\Omega|$ 表示边界 $\partial\Omega$ 的面积, $\operatorname{osc}(f) = \max f - \min f$ 表示一个函数的振幅 (oscillation).

注 3.2 在时间对称的情形, $M(\Omega) := \int_{\Omega} \rho d\omega_g = \int_{\Omega} R d\omega_g / 16\pi$ 称为静止质量 (rest mass)¹⁾. 它是用来刻画区域 Ω 内所含物质多少的一个准局域量. 定理 3.2 的物理意义是, 在固定尺寸的区域, 物质高度聚集必然会产生陷俘面.

4 具有等势叶状结构的共形平坦空间箍猜想

本节介绍轴对称时空中关于物质聚集的箍型定理. 球对称是轴对称的特殊情形. 另一方面, 球对称度规是共形平坦的. 本节将考虑具有等势叶状结构的共形平坦 Cauchy 面, 并且假设它是时间对称的. 具体地, 假设有界带边区域 (Ω^3, g) 满足以下条件:

- (1) g 是共形平坦的, 即存在正函数 f 使得 $g_{ij} = f^4 \hat{g}_{ij}$, 其中 $\hat{g}_{ij}$ 是标准的 Euclid 度规;
- (2) Ω 上存在等势叶状结构,

$$g = f^4(\sigma)[\hat{g}_{\sigma\sigma} d\sigma^2 + \hat{g}_{AB} dx^A dx^B], \quad A, B = 2, 3, \quad (4.1)$$

其中 $\sigma \geq 0$ 并且 f 的每一个水平集都是凸的. 这里 x^2 和 x^3 是拟角变量 (quasi-angle variable);

- (3) 边界 $\Sigma := \partial\Omega = \{\sigma = \sigma_0\}$.

满足以上条件 (1)–(3) 的空间是球对称空间的自然推广. 文献 [26, 34–36] 研究了这类空间关于静止质量的箍型定理. 这些结果可以表述为, 如果 $M(\Omega) > D(\Omega)$, 那么会有陷俘面产生, 其中 $D(\Omega)$ 是刻画区域的某个箍尺寸.

设 p 是时空 $(N^{3,1}, \tilde{g})$ 中的一个事件. 众所周知, 存在 p 的一个邻域 U 和局部坐标系 $\{x^\mu\}$ 使得 $\tilde{g}_{\mu\nu}|_p = \eta_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(-1, 1, 1, 1)$, 并且 $\frac{\partial \tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}|_p = 0$. 这样的坐标系称为 Riemann 法坐标系. 根据相对性原理知, 引力场的能量或质量无法逐点地 (pointwisely) 来定义. 如何将能量或者质量局域化是引力理论中的一个难题. 后来, 物理学家引入了准局域 (quasi-local) 的想法, 致力于量化有界区域内所含能量或质量的多少. 但是, 迄今为止, 人们还未找到一个令人满意的答案. 已知的十几种不同的准局域能量或质量定义, 都夹杂着优点和缺陷 [23].

1993 年, Brown 和 York [15] 引入了下面这个准局域质量概念. 它与曲面的平均曲率紧密相关, 并且能很好地刻画时间对称有界区域所含物质多少 [37, 38].

1) 本文中“静止质量”一词取自文献 [32, 等式 (6)]. 它不同于文献 [33, 注 5.1] 所定义的静止质量.

设有界区域 (Ω^3, g) 的边界 $\Sigma := \partial\Omega$ 具有严格正的 Gauss 曲率. 我们可以等距地将 Σ 嵌入到标准的 Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$ 中并将其像记作 $i(\Sigma)$. Brown-York 质量则定义为

$$m_{\text{BY}}(\Sigma, g) = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} (H_0 - H) d\Sigma, \quad (4.2)$$

其中 H 是指 Σ 在物理空间 (Ω, g) 中的平均曲率, H_0 是指其等距嵌入的像 $i(\Sigma)$ 在参考空间 $\mathbb{R}^3$ 中的平均曲率. 参考空间中的平均曲率 H_0 由 Σ 的内蕴几何完全决定.

我们始终假设主能量条件 (2.2) 成立, 因此 $R(g) \geq 0$. Malec 和本文作者证明了以下结果.

定理 4.1 (参见文献 [24, 定理 5]) 如果

$$m_{\text{BY}}(\Sigma, g) > \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} n^{\sigma} [(n_{\sigma} H)_{\max} - n_{\sigma} H] d\Sigma + \frac{f^2(\sigma_0)\pi}{4} \sup l(S(0)) + f^2(\sigma_0) \int_0^{\sigma_0} C(s) ds \\ =: D'(\Sigma), \quad (4.3)$$

那么 Σ 是陷俘面.

这里 n^i 是曲面 Σ 关于度规 g 的单位外法向量场, H 是平均曲率;

$$C(\sigma) := \frac{1}{8\pi} \left(\partial_{\sigma} \left(\int_{\hat{\Sigma}} \hat{k} d\hat{\Sigma} \right) \right) = \frac{1}{8\pi} \left(2 \int_{\hat{\Sigma}} \hat{K} \hat{n}_{\sigma} d\hat{\Sigma} \right), \quad (4.4)$$

$\hat{k}$ 、 $\hat{K}$ 和 $\hat{n}_i$ 分别表示水平集 Σ_{σ} 关于 Euclid 度规 $\hat{g}$ 的平均曲率、Gauss 曲率和单位外法向; $\sup l(S(0))$ 表示 f 取得最大值之集合关于度规 $\hat{g}$ 的最大半径.

注 4.1 定理 4.1 的物理意义如下:

- (1) 线积分项 $f^2(\sigma_0) \int_0^{\sigma_0} C(s) ds$ 代表了质量聚集的“箍尺寸”;
- (2) 面积分项 $\int_{\Sigma} n^{\sigma} [(n_{\sigma} H)_{\max} - n_{\sigma} H] d\Sigma / (8\pi)$ 反映了非球对称导致的“边界效应”;
- (3) 半径项 $f^2(\sigma_0)\pi \sup l(S(0))/4$ 由共形因子 f 在整个区域上的行为决定, 可以看作是由非球对称导致的“整体偏移”.

和式

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} n^{\sigma} [(n_{\sigma} H)_{\max} - n_{\sigma} H] d\Sigma + \frac{f^2(\sigma_0)\pi}{4} \sup l(S(0)) \quad (4.5)$$

刻画了非球对称性情形下产生陷俘面所需要的额外能量补偿.

此外, Malec 和本文作者还证明了一个关于 Brown-York 准局域质量和静止质量的比较定理.

定理 4.2 (参见文献 [24, 定理 4]) 具有等势叶状结构的共形平坦空间中, $m_{\text{BY}}(\Sigma, g) \leq M(\Omega)$.

一个自然的问题是, 定理 4.1 中的“箍尺寸” $D'(\Sigma)$ 是否比文献 [26, 34–36] 中刻画区域大小的“箍尺寸” $D(\Omega)$ 更为精细 (refined)? 答案是肯定的. 这是因为, 由极值原理知, 共形因子 f 关于变量 σ 是单调的, 即 $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$, $f(\sigma) \geq f(\sigma_0)$. 因此, 半径项 $f^2(\sigma_0)\pi \sup l(S(0))/4$ 和箍项 $f^2(\sigma_0) \int_0^{\sigma_0} C(s) ds$ 分别小于文献 [36] 中刻画 $D(\Omega)$ 所对应的项 $f^2(0)\pi \sup l(S(0))/4 =: \pi \text{rad}(0)/4$ 和 $\int_0^{\sigma_0} f^2(s) C(s) ds$.

回到球对称情形, (4.5) 中所有的项都为零, $C(s) \equiv 1$, $f^2(\sigma_0) \int_0^{\sigma_0} C(s) ds$ 即为曲面的面积半径. 定理 4.1 与文献 [13] 中的结果一致.

5 结语与展望

本文简要地介绍了本文作者及其合作者最近几年在非球对称情形箍猜想研究方面的若干进展.

Khuri 和本文作者^[19]在轴对称时空中建立了关于物质聚集的能量 - 动量不等式. 人们自然会问, 不等式 (3.4) 或 (3.6) 是不是最优的? 目前我们还没有找到例子使得以上不等式的等号成立. 最近, 本文作者与其合作者^[39]在常密度静态恒星模型中显式地构造了极小的 Clifford 环面. 这时, 不等式 (3.6) 可以等价地写成

$$\frac{2M(\Omega)}{\pi\hat{L}} + \frac{1}{4\pi^2\hat{L}} \int_{\partial\Omega} H ds \leq 1, \quad (5.1)$$

其中 $\hat{L} = \frac{L}{2\pi}$. 我们通过计算发现, 针对这些例子, 不等式 (3.6) 即为 $0.75 < 1$. 这个估计精度在数量级上已经达到最优.

引力物理学家发现, 除了物质聚集, 高速旋转的星体同样能产生黑洞^[40–42]. 这自然引出了带有角动量的箍猜想. 乍眼一看, 读者可能会有疑虑. 基于 Newton 力学的直观图像暗示, 高速旋转的物体应该更容易向外飞出去而不是发生引力坍塌. 事实上, 在广义相对论的框架下, 能量条件保证了角动量聚集的同时, 物质也在剧烈地聚集, 从而促使引力坍塌的发生. 在某个比主能量更强的质量分布条件下, Khuri 和本文作者也证明了一个关于角动量的箍型定理^[19, 定理2.2]. 人们进而要问, 在标准的主能量条件下, 关于角动量的箍猜想是否仍然成立?

Malec 和本文作者^[24]证明了具有等势叶状结构的共形平坦空间关于 Brown-York 质量的箍猜想. 那么关于其他准局域质量, 相应的箍猜想又应该如何表述?

箍猜想是广义相对论中备受关注的重要研究课题之一, 它与被称为宇宙监督假设的美好愿望有着密切的联系. 箍猜想的研究现状离建立完整统一的数学表述这个目标还有很遥远的距离. 但是, 我们或许可以根据不同的需要, 给出相应情形的数学表述并用几何分析的方法严格地证明.

致谢 本文作者向他的合作者 Janusz Karkowski、Marcus Khuri、Petryk Mach、Edward Malec、Niall Ó Murchadha 和童若轩表示衷心的感谢. 他们相互分享了科学思想与方法, 进行了愉快、深入且富有成效的讨论与合作. 感谢何飞宏、李辉和虞彬为本文初稿作了文字修改与润色. 感谢审稿人的仔细审阅及提出的具体修改意见.

参考文献

- 1 Schoen R, Yau S T. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Comm Math Phys*, 1979, 65: 45–76
- 2 Schoen R, Yau S T. Proof of the positive mass theorem. II. *Comm Math Phys*, 1981, 79: 231–260
- 3 Witten E. A new proof of the positive energy theorem. *Comm Math Phys*, 1981, 80: 381–402
- 4 Arnowitt R, Deser S, Misner C W. Coordinate invariance and energy expressions in general relativity. *Phys Rev*, 1961, 122: 997–1006
- 5 Penrose R. Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys Rev Lett*, 1965, 14: 57–59
- 6 Hawking S, Ellis G F R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press, 1973
- 7 Penrose R. Naked singularities. *Ann New York Acad Sci*, 1973, 224: 125–134
- 8 Huisken G, Ilmanen T. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. *J Differential Geom*, 2001, 59: 353–437
- 9 Bray H L. Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. *J Differential Geom*, 2001, 59: 177–267
- 10 Thorne K S. Nonspherical gravitational collapse—a short review. In: *Magic without Magic*. San Francisco: W. H. Freeman, 1972, 231–258
- 11 Seifert H J. Naked singularities and cosmic censorship: Comment on the current situation. *Gen Relativity Gravitation*, 1979, 10: 1065–1067
- 12 Khuri M A. Hoop conjecture in spherically symmetric spacetimes. *Phys Rev D*, 2009, 80: 124025
- 13 Ó Murchadha N, Tung R S, Xie N, et al. Brown-York mass and the Thorne hoop conjecture. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 041101
- 14 Flanagan E. Hoop conjecture for black-hole horizon formation. *Phys Rev D*, 1991, 44: 2409–2420
- 15 Brown J D, York J W. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Phys Rev D*, 1993, 47: 1407–1419

- 16 Hawking S W. Gravitational radiation in an expanding universe. *J Math Phys*, 1968, 9: 598–604
- 17 Schoen R, Yau S T. The existence of a black hole due to condensation of matter. *Comm Math Phys*, 1983, 90: 575–579
- 18 Jang P S. On the positive energy conjecture. *J Math Phys*, 1976, 17: 141–145
- 19 Khuri M, Xie N. Inequalities between size, mass, angular momentum, and charge for axisymmetric bodies and the formation of trapped surfaces. *Ann Henri Poincaré*, 2017, 18: 2815–2830
- 20 Gibbons G W. Birkhoff’s invariant and Thorne’s hoop conjecture. *ArXiv:0903.1580*, 2009
- 21 Cvetič M, Gibbons G W, Pope C N. More about Birkhoff’s invariant and Thorne’s hoop conjecture for horizons. *Classical Quantum Gravity*, 2011, 28: 195001
- 22 Mantoulidis C, Schoen R. On the Bartnik mass of apparent horizons. *Classical Quantum Gravity*, 2015, 32: 205002
- 23 Szabados L B. Quasi-local energy-momentum and angular momentum in general relativity. *Living Rev Relativity*, 2009, 12: 4
- 24 Malec E, Xie N. Brown-York mass and the hoop conjecture in nonspherical massive systems. *Phys Rev D*, 2015, 91: 081501
- 25 Barrow J D, Gibbons G W. Maximum magnetic moment to angular momentum conjecture. *Phys Rev D*, 2017, 95: 064040
- 26 Beig R, Ó Murchadha N. Trapped surfaces due to concentration of gravitational radiation. *Phys Rev Lett*, 1991, 66: 2421–2424
- 27 Eardley D M. Gravitational collapse of vacuum gravitational field configurations. *J Math Phys*, 1995, 36: 3004–3011
- 28 Bartnik R, Isenberg J. The constraint equations. In: *The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Field: 50 Years of the Cauchy Problem in General Relativity*. Basel: Birkhäuser, 2004, 1–38
- 29 Li P. *Geometric Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012
- 30 Bray H, Khuri M. A Jang equation approach to the Penrose inequality. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2010, 27: 741–766
- 31 Bray H L, Khuri M A. P.D.E.’s which imply the Penrose conjecture. *Asian J Math*, 2011, 15: 557–610
- 32 Bizon P, Malec E. Condensation of matter and trapped surfaces in ellipsoidal stars. *Phys Rev D*, 1989, 40: 2559–2563
- 33 Wang Y, Xie N, Zhang X. The positive energy theorem for asymptotically anti-de Sitter spacetimes. *Commun Contemp Math*, 2015, 17: 1550015
- 34 Bizon P, Malec E, Ó Murchadha N. Trapped surfaces in spherical stars. *Phys Rev Lett*, 1988, 61: 1147–1150
- 35 Bizon P, Malec E, Ó Murchadha N. Trapped surfaces due to concentration of matter in spherically symmetric geometries. *Classical Quantum Gravity*, 1989, 6: 961–976
- 36 Malec E. Hoop conjecture and trapped surfaces in nonspherical massive systems. *Phys Rev Lett*, 1991, 67: 949–952
- 37 Shi Y, Tam L F. Positive mass theorem and the boundary behaviors of compact manifolds with nonnegative scalar curvature. *J Differential Geom*, 2002, 62: 79–125
- 38 Fan X Q, Shi Y, Tam L F. Large-sphere and small-sphere limits of the Brown-York mass. *Comm Anal Geom*, 2009, 17: 37–72
- 39 Karkowski J, Mach P, Malec E, et al. Toroidal trapped surfaces and isoperimetric inequalities. *Phys Rev D*, 2017, 95: 064037
- 40 Dain S. Inequality between size and angular momentum for bodies. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 041101
- 41 Reiris M. On the shape of bodies in general relativistic regimes. *Gen Relativity Gravitation*, 2014, 46: 1777
- 42 Khuri M A. Existence of black holes due to concentration of angular momentum. *J High Energy Phys*, 2015, 6: 188

Recent progress on the hoop conjecture in non-spherical symmetry

Naqing Xie

Abstract In this short article, we make a brief review on the recent progress on the hoop conjecture in non-spherical symmetry.

Keywords hoop conjecture, trapped surface, quasi-local mass

MSC(2010) 83C75, 58Z05

doi: 10.1360/N012017-00203