在 Lie 群作用下不变的 Markov 过程

献给王梓坤教授 90 华诞

廖明

Department of Mathematics and Statistics, Auburn University, Auburn, AL 36849, USA

E-mail: liaomin@auburn.edu

收稿日期: 2017-10-31; 接受日期: 2018-01-27; 网络出版日期: 2018-12-29

摘要 本文的目的是, 依照经典的 Lévy-Khinchin 三参数表示的精神, 论述在 Lie 群作用下不变的 Markov 过程的表示理论. 对不变 Markov 过程, 按其一般性, 我们将在三个层面中进行讨论. 首先是 Lie 群里平移不变的 Markov 过程, 然后是一般流形中在可迁群作用下不变的 Markov 过程. 这两类过程都称 Lévy 过程, 具有三参数表示. 第三类过程为在不可迁群作用下不变的 Markov 过程. 在一定条件下, 这类过程可分解为一横截群轨道的径过程和一沿着群轨道的角过程. 后者为时间非齐次的不变 Markov 过程, 具有依赖于时间的三参数表示.

关键词 不变 Markov 过程 Lie 群 齐性空间

MSC (2010) 主题分类 60B15, 60J25, 58J65

1 引言

在各种变换下, 概率分布的不变性一直是概率论研究的一个中心问题, 这些变换经常形成一个 Lie 群, 而不变性常体现在一个相关的 Markov 过程上. Markov 过程是概率论的重要分支, 有广泛应用, 王梓坤先生对其理论发展和实际应用有开创性的重要贡献 (部分成果可参见文献 [1]), 是国内在这个研究领域的先驱. 在经典理论中, Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中平移不变的 Markov 过程等价于具有独立平稳增量的过程, 又称 Lévy 过程. 近代关于 Lévy 过程的专著可参见文献 [2–4]. 著名的 Lévy-Khinchin 公式给出 Lévy 过程在分布意义下的一个三参数表示: 漂移向量、协方差矩阵和 Lévy 测度. 反之, 任给这样的三参数, 则在分布意义下有唯一的 Lévy 过程. 本文的目的是, 依照经典的 Lévy-Khinchin 表示的精神, 论述在 Lie 群作用下不变的 Markov 过程的表示理论. 所述结果虽然大多已以不同形式散见文献中, 但这是它们首次以统一形式出现在综述性论文里.

对不变 Markov 过程的研究, 按其一般性, 可在三个层面中进行. 首先可考虑 Lie 群 G 中左平移 (或右平移) 下不变的 Markov 过程. 这类过程等价于具有独立平稳的 (乘积形式的) 增量的过程, 是

英文引用格式: Liao M. Invariant Markov processes under actions of Lie groups (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 447–466, doi: 10.1360/N012017-00234

经典的 $\mathbb{R}^n$ 中 Lévy 过程的直接推广. 在第二个层面, 我们可考虑一般流形中在 Lie 群 G 的可迁性 (transitive) 作用下不变的 Markov 过程. 这类过程可看作是齐性空间 (homogeneous space) G/K 中在自然 G -作用下不变的 Markov 过程. 本文中这两类过程都将称为 Lévy 过程. Hunt^[5] 在 1956 年给出 G 和 G/K 中 (K 紧) Lévy 过程生成算子的明显表达式. 按该公式, G 和 G/K 中 Lévy 过程在分布意义下具有一个三参数表示, 正如 $\mathbb{R}^n$ 的情形.

在第三个层面, 我们可考虑在 Lie 群 G 的非可迁作用下不变的 Markov 过程. 此时, 在一定条件下, Markov 过程可分解为径向和角向两个分量. 径分量为在一个横截 G -轨道的子空间中的 Markov 过程, 而角分量为在一个标准 G -轨道里的 (时间) 非齐性的不变 Markov 过程. 这自然引致我们去考虑非齐性的不变 Markov 过程. Lie 群 G 中在左平移下不变的非齐性 Markov 过程等价于具有独立但未必平稳的增量的过程, 将称为非齐性 Lévy 过程. Feinsilver^[6] 得到随机连续的非齐性 Lévy 过程的一个鞅性质, 推广了 Stroock 和 Varadhan^[7] 关于连续过程的结果, 以此获得这类过程的一个依赖于时间的三参数表示. Heyer 和 Pap^[8] 用抽象 Fourier 分析将 Feinsilver 的结果推广到更一般的局部紧群. Liao^[9] 将鞅表示推广到齐性空间, 并以此得到不变 Markov 过程的一个斜乘积 (skew-product) 分解.

本文将试图对以上内容作简洁而系统的论述. 由于篇幅有限, 我们对所述结果只辅以简单说明和部分证明, 更详细讨论可见所引参考文献. 许多有关结果也不能涉及. 例如, 局部紧群上的概率测度在文献中有广泛深入的讨论, 读者可参见 Heyer 的经典专著 [10], 部分后来的发展可参见文献 [11]. 其中无穷可分概率测度嵌入卷积半群的问题 (the embedding problem) 参见文献 [12, 13]. 有关群表示和群上的 Fourier 变换在概率和统计里的应用可参见文献 [14]. 用群表示和 Fourier 分析的观点来讨论紧 Lie 群上的概率测度和过程, 可参见文献 [15–17] 和 Applebaum 的新书 [18]. 半单 Lie 群和对称空间中 Lévy 过程的极限性质可参见文献 [19] 及该书中所引文献, 以及文献 [20].

有关不变 Markov 过程的基本定义将在下节给出. 第 3 节是 Lie 群 G 中的 Lévy 过程; 第 4 节为齐性空间 G/K 中的 Lévy 过程; 第 5 节简单介绍非齐性 Lévy 过程; 第 6 节讨论不变 Markov 过程的分解.

2 基本定义

现陈述一些本文中将要用到 (也普遍在文献中采用) 的定义和约定. 拓扑空间 X 上的 Borel σ -代数记为 $\mathcal{B}(X)$, X 上的测度总设为定义在 $\mathcal{B}(X)$ 上. 若 μ 为某可测空间 X 上的测度而 f 为 X 上可测函数, 则积分 $\int f d\mu = \int_X f(x) \mu(dx)$ 可记为 $\mu(f)$. 若 F 为从 X 到另一可测空间 Y 的可测映射, 则 $F\mu$ 为 Y 上测度定义为 $\forall Y$ 上非负可测函数 f , $F\mu(f) = \mu(f \circ F)$. 这等价于 $\forall Y$ 上可测集 B , $F\mu(B) = \mu(F^{-1}(B))$.

不变 Markov 过程的基本理论可在拓扑群作用下的拓扑空间上发展, 但主要结果要用到光滑性. 为简单起见, 只考虑流形里在 Lie 群作用下不变的 Markov 过程. 流形设为光滑 (C^∞). 流形 X 上连续函数空间和光滑函数空间分别记为 $C(X)$ 和 $C^\infty(X)$. 下标 c 、 $+$ 和 0 分别记紧支撑、非负和在无穷远点趋于零 (单点紧化). 例如, $C_c^\infty(X)$ 为 X 上有紧支撑的光滑函数空间; $\mathcal{B}_+(X)$ 为 X 上非负 Borel 函数全体; $C_0(X)$ 为 X 上在无穷远点趋于零的连续函数空间.

Lie 群 G 为流形和群, 有光滑的群乘积映射: $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto xy$. 由隐函数定理知, 逆映射: $G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$ 也光滑. Lie 群 G 在流形 X 上的光滑作用为光滑映射: $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto gx$ 满足: $\forall g, h \in G$ 和 $\forall x \in X$, $g(hx) = (gh)x$ 和 $ex = e$, 这里 e 为 G 的单位元. 以上定义的群作用又称左

作用. 我们也可考虑右作用, 则群作用映射写为 $(x, g) \mapsto xg$, 满足 $(xh)g = x(hg)$ 和 $xe = x$. 以下除特殊声明, Lie 群的作用总设为左作用并光滑.

设 f 和 μ 分别为某可测空间 X 上的函数和测度, $g: X \rightarrow X$ 为可测映射. 若 $f = f \circ g$ 或 $g\mu = \mu$, 则 f 或 μ 称为在映射 g 下不变, 简称 g -不变. X 上的算子 T 为从其定义域 $D(T)$, X 上的一族函数, 到另一族函数的映射. 若 $\forall f \in D(T)$, $f \circ g \in D(T)$ 和 $T(f \circ g) = (Tf) \circ g$, 则称 T 为在映射 g 下不变, 简称 g -不变.

设 X 和 Y 为可测空间. 从 X 到 Y 的核 K 是一族 Y 上的测度 $K(x, \cdot)$, $x \in X$, 满足 $\forall Y$ 上可测集 B , $x \mapsto K(x, B)$ 可测. 若 $\forall x \in X$, $K(x, \cdot)$ 为概率测度, 则称 K 为概率核. 从 X 到 X 的核 K 称为 X 上的核, 可看作 X 上的算子, 定义为 $Kf = K(\cdot, f)$, 以非负可测函数全体 (或其他适当函数族) 为定义域. 此时, 若 K 作为算子 g -不变, 则称核 K 为 g -不变. X 上的转移半群 P_t ($t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$) 为 X 上一族概率核, 满足 $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$, $P_{s+t} = P_s P_t$ (作为算子) 和 $\forall x \in X$, $P_0(x, \cdot) = \delta_x$ (x 点处单位测度).

流形 X 上的函数 f 、测度 μ 、算子 T 或核 K 称为在某 Lie 群 G 作用下不变, 简称 G -不变, 若 $\forall g \in G$, 它是 g -不变.

设 G 为 Lie 群, $g \in G$, 令 l_g 、 r_g 和 c_g 分别为左平移、右平移和共轭映射, 分别定义为 $\forall x \in G$, $l_g x = gx$, $r_g x = xg$ 和 $c_g x = gxg^{-1}$. 左平移和共轭为 G 在自身的作用, 而右平移是右作用. G 上的函数 f 或测度 μ 称为左不变, 若其在左平移下不变, 即 $\forall g \in G$, $f \circ l_g = f$ 或 $l_g \mu = \mu$. 类似地, G 上的算子 T 称为左不变, 若 $\forall g \in G$ 和 $f \in D(T)$, $f \circ l_g \in D(T)$ 和 $T(f \circ l_g) = (Tf) \circ l_g$. 若以上仅对 G 的某子群 K 中的元素 g 成立, 则 f 、 μ 或 T 称为 K -左不变. (K -) 右不变和 (K -) 共轭不变的 G 上的函数, 测度和算子可类似定义. 若同时为左不变和右不变 (K -左不变和 K -右不变), 则称双不变 (K -双不变).

可测空间 X 上的 Markov 过程 x_t 定义为 X 里的过程, 有一相关的转移半群 P_t , 满足以下 Markov 性: 对所有 $t \geq s \geq 0$ 和 X 上非负可测函数 f , 有 $E[f(x_t) | \mathcal{F}_s] = P_{t-s}f(x_s)$, 这里 $\mathcal{F}_t$ ($t \in \mathbb{R}_+$) 为过程 x_t 的自然 (上升) σ -代数族, 详情可参见文献 [21, 第 3 章].

一类重要的 Markov 过程是 Feller 过程. 流形 X 里的 Markov 过程 x_t 称 Feller 过程, 若其转移半群 P_t 为 Feller 半群, 即 $\forall f \in C_0(X)$, $P_t f \in C_0(X)$ 且当 $t \rightarrow 0$ 时, $P_t f \rightarrow f$ (X 上一致收敛). 此时, x_t 或 P_t 的生产算子 L 定义为 $Lf = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t f - f}{t}$, 其定义域是 $D(L) = \{f \in C_0(X); \text{当 } t \rightarrow 0 \text{ 时, } (P_t f - f)/t \text{ 一致收敛}\}$. 熟知 (参见文献 [21, 第 19 章]) $D(L)$ 为 $C_0(X)$ 在一致收敛范数下的稠密子空间而 L 为闭算子, 并且 x_t 有右连左极的修正. 这里右连左极是指所有轨道右连续并有左极限 (càdlàg 或 right continuous with left limits), 而修正是对过程在任意时间点做一零测集修改. 本文中 Feller 过程总设为右连左极.

可测空间 X 里的 Markov 过程 x_t 称为在某可测映射 $g: X \rightarrow X$ 下不变, 简称 g -不变, 若其转移半群 P_t 为 g -不变.

Markov 过程可看作是一族过程, 每个出发点都有一过程, 与同一个转移半群相关.

命题 2.1 设 x_t 为 X 中的 Markov 过程, 令 x_t^z 为从 z 点出发的过程, 则 x_t 为 g -不变当且仅当 $\forall z \in X$, 过程 gx_t^z 与 $x_t^{g^z}$ 有相同分布.

证明 令 P_t 为转移半群. 若 gx_t^z 与 $x_t^{g^z}$ 同分布, 则 $\forall f \in \mathcal{B}_+(X)$, 有

$$P_t(f \circ g)(z) = E[f \circ g(x_t^z)] = E[f(gx_t^z)] = E[f(x_t^{g^z})] = P_t f(gz),$$

即 x_t 为 g -不变. 反之, 为证同分布, 只需证 gx_t 为 Markov 过程并以 P_t 为转移半群, 这可以很容易地由 Markov 性和 g -不变性推出. $\square$

我们也可考虑 (时间) 非齐性的 Markov 过程. 为此先定义双参数转移半群, 这是一族 X 上的概率核 $P_{s,t}$, $t \geq s \geq 0$, 满足 $\forall s < u < t$, $P_{s,u}P_{u,t} = P_{s,t}$ 和 $\forall x \in X$, $P_{s,s}(x, \cdot) = \delta_x$. 非齐性 Markov 过程 x_t 有一相关的双参数转移半群 $P_{s,t}$, 满足: 对所有 $t \geq s \geq 0$ 和 X 上非负可测函数 f , 有 $E[f(x_t) | \mathcal{F}_s] = P_{s,t}f(x_s)$. 非齐性 Markov 过程 x_t 称为 g -不变, 若其转移半群 $P_{s,t}$ 为 g -不变.

非齐性 Markov 过程 x_t 可看作一族过程, 每个初始时刻 s 和初始点 x 都有一过程, 与同一个双参数转移半群相关.

命题 2.2 设 x_t 为 X 中的非齐性 Markov 过程, 令 $x_t^{s,z}$ 为在 s 时刻从 z 点出发的过程, 则 x_t 为 g -不变当且仅当 $\forall s \in \mathbb{R}_+$ 和 $z \in X$, 过程 $gx_t^{s,z}$ 与 $x_t^{s,gz}$ 有相同分布.

命题 2.2 的证明类似于命题 2.1 的证明.

流形 X 中的 Markov 过程 x_t 称为在某 Lie 群 G 作用下不变, 简称 G -不变, 若 $\forall g \in G$, x_t 为 g -不变.

3 Lie 群里的 Lévy 过程

Lie 群 G 的过程 x_t 称具有独立平稳增量, 若 $\forall s < t$, $x_s^{-1}x_t$ 独立于 $\mathcal{F}_s^x$ 且与 $x_0^{-1}x_{t-s}$ 同分布, 这里 $\{\mathcal{F}_t^x\}$ 为过程 x_t 的自然 σ -代数族. G 中的右连左极过程称 Lévy 过程, 若它有独立平稳增量. 当 $G = \mathbb{R}^n$ (加法群) 时, 增量记为 $x_t - x_s$, 从而这里 Lévy 过程的定义是经典定义在 Lie 群上的自然推广.

G 中的 Markov 过程 x_t 称左不变, 若它在 G 的左平移作用下不变. 按定义, 这意味着其转移半群 P_t 为左不变, 即 $\forall f \in \mathcal{B}_+(G)$ 和 $g \in G$, $P_t(f \circ l_g) = (P_t f) \circ l_g$.

命题 3.1 设 x_t 为 G 中的右连左极过程, 则 x_t 为 Lévy 过程当且仅当 x_t 为左不变 Markov 过程. 此时 x_t 为 Feller 过程.

证明 设 x_t 为 Lévy 过程. 令 $x_t^e = x_0^{-1}x_t$, 则 x_t^e 是从单位元 e 出发的 Lévy 过程并与 x_0 独立. 令 $P_t f(x) = E[f(xx_t^e)]$, $x \in G$ 和 $f \in \mathcal{B}_+(G)$. 易证 P_t 为左不变 Feller 转移半群, 并且, 若 $t > s$, 则

$$E[f(x_t) | \mathcal{F}_s^x] = E[f(x_s x_s^{-1} x_t) | \mathcal{F}_s^x] = E[f(xx_{t-s}^e)] |_{x=x_s} = P_{t-s}f(x_s).$$

从而, x_t 以 P_t 为转移半群, 故为左不变 Markov 过程. 反之, 设 x_t 为左不变 Markov 过程, 若 $t > s$, 则

$$E[f(x_s^{-1}x_t) | \mathcal{F}_s^x] = E[f(x^{-1}x_t) | \mathcal{F}_s^x] |_{x=x_s} = P_{t-s}(f \circ l_{x_s^{-1}})(x_s) = P_{t-s}f(e).$$

由这可推出 x_t 有独立平稳增量, 从而是 Lévy 过程. □

设 μ 和 ν 为 G 上测度. 它们的卷积 $\mu * \nu$ 为 G 上测度定义为

$$\mu * \nu(f) = \int f(xy) \mu(dx) \nu(dy), \quad f \in \mathcal{B}_+(G). \quad (3.1)$$

易证卷积满足结合律, 即 $\mu * (\nu * \gamma) = (\mu * \nu) * \gamma$, 从而 n 重卷积 $\mu^{*n} = \mu * \mu * \cdots * \mu$ 有意义.

G 上的一族概率测度 μ_t , $t \geq 0$, 称卷积半群, 若 $\mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s$, 其称为连续, 若当 $t \rightarrow 0$ 时, $\mu_t \rightarrow \mu_0$ (弱收敛). 由文献 [10, 定理 1.5.7] 知, 若 μ_t 连续, 则对所有 $s > 0$, 当 $t \rightarrow s$ 时, $\mu_t \rightarrow \mu_s$ (弱收敛). 易得以下结论 (参见文献 [19, 命题 1.2]).

命题 3.2 设 x_t 为 G 中的 Lévy 过程, 则 $x_0^{-1}x_t$ 的分布 μ_t 组成一连续卷积半群, 满足 $\mu_0 = \delta_e$. 反之, 若 μ_t 为 G 上的连续卷积半群, 满足 $\mu_0 = \delta_e$, 则有 Lévy 过程 x_t 以 μ_t 为 $x_0^{-1}x_t$ 的分布.

证明 若 x_t 为 Lévy 过程, 以 P_t 为转移半群, 则 $x_0^{-1}x_t$ 的分布为 $\mu_t = P_t(e, \cdot)$. 由转移半群的性质易证 μ_t 为卷积半群, 其连续性可由 x_t 轨道的右连续性得到. 反之, 若 μ_t 为连续卷积半群, 则 $P_t f(x) = \mu_t(f \circ l_x)$, $f \in \mathcal{B}_+(G)$ 和 $x \in G$, 定义一左不变 Feller 转移半群 P_t . 由 Feller 过程的一般理论知, 有一 Feller 过程 x_t 以 P_t 为转移半群. 由 P_t 的定义可得 μ_t 为 $x_0^{-1}x_t$ 的分布. $\square$

由 Markov 性易证 G 中 Lévy 过程 x_t 的有限维分布可由与其相关的卷积半群 μ_t (见命题 3.2) 表示如下:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[f(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})] \\ &= \int f(x_0 x_1, x_0 x_1 x_2, \dots, x_0 x_1 x_2 \cdots x_n) \mu_0(dx_0) \mu_{t_1}(dx_1) \mu_{t_2-t_1}(dx_2) \cdots \mu_{t_n-t_{n-1}}(dx_n), \end{aligned} \quad (3.2)$$

这里 $f \in \mathcal{B}_+(X^n)$, $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 而 μ_0 为初始分布.

注 3.1 由于 Lévy 过程为左不变 Markov 过程, 所以有时也称左 Lévy 过程. 若在其定义中, 增量 $x_s^{-1}x_t$ 换为 $x_t x_s^{-1}$, 所得过程为右不变 Markov 过程, 可称右 Lévy 过程. 若 Lie 群 G 不可交换, 则左右 Lévy 过程为两类不同的过程, 但在逆映射 $x \rightarrow x^{-1}$ 下成一对对应, 从而左 Lévy 过程的结果可以很容易转换为右 Lévy 过程的结果, 反之亦然. 本文中, 如同大多数文献一样, Lévy 过程总指左 Lévy 过程.

由命题 3.1 知, Lie 群 G 中的 Lévy 过程 x_t 为 Feller 过程, 它的分布由其生成算子确定. 为叙述生成算子的 Hunt 公式 (参见文献 [5]), 我们需做些准备. 令 $d = \dim(G)$ 为 G 的维数, $\mathfrak{g}$ 为 G 的 Lie 代数. 按定义, $\mathfrak{g}$ 为 G 在单位元 e 处的切空间 $T_e G$, 可看作是 G 上所有左不变向量场组成的线性空间. 令 $\{\xi_1, \dots, \xi_d\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 令 $\phi_1, \dots, \phi_d$ 为 G 上一组有界 Borel 函数, 在某紧集外为零, 在 e 附近光滑, 并满足 $\phi_i(e) = 0$ 和 $\xi_i \phi_j(e) = \delta_{ij}$ (Dirac 函数). 这组函数可看作是在 e 临近的局部坐标, 所以称为 G 上与基 $\{\xi_1, \dots, \xi_d\}$ 相关的坐标函数. 易见坐标函数的存在性, 并且, 若 $\phi'_1, \dots, \phi'_d$ 是另一组与同个基相关的坐标函数, 则

$$\phi'_i = \phi_i + O(\|\phi\|^2), \quad (3.3)$$

这里 $\|\phi\| = [\sum_i \phi_i^2]^{1/2}$.

令 $e^\xi = \exp(\xi)$ ($\xi \in \mathfrak{g}$) 为 Lie 群 G 上的指数映射. 令 U 为 e 的一个相对紧邻域并是 $\exp$ 的可微同胚像, 则存在与基 $\{\xi_1, \dots, \xi_d\}$ 相关的坐标函数 ϕ_i , 满足 $\forall x \in U, x = \exp[\sum_i \phi_i(x) \xi_i]$. 这种坐标函数称 G 上的指数坐标函数. 当 $G = \mathbb{R}^d$ 时, 可令 $\xi_i = \partial/\partial x_i$, 则 $\phi_i(x) = x_i 1_{\|x\| \leq 1}$ 为相关的指数坐标函数, 这里 1_A 为集 A 的示性函数.

任意 $d \times d$ 非负定对称矩阵 $\{a_{ij}\}$ 称协方差矩阵. G 上的测度 μ 称 Lévy 测度, 若 $\mu(\{e\}) = 0$, $\mu(\|\phi\|^2) < \infty$, 并且对所有 e 的邻域 U , 有 $\mu(U^c) < \infty$, 这里 U^c 为 U 的余集. 易证 Lévy 测度的定义与基和坐标函数的选择无关. 以下形式的 Hunt 公式的证明可参见文献 [19].

定理 3.1 设 x_t 为 G 上的 Lévy 过程, 以 L 为生成算子, 则 L 的定义域 $D(L)$ 包含 $C_c^\infty(G)$, 且对所有 $f \in C_c^\infty(G)$ 和 $x \in G$, 有

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d a_{jk} \xi_j \xi_k f(x) + \xi_0 f(x) + \int_G \left[f(xy) - f(x) - \sum_{i=1}^d \phi_i(y) \xi_i f(x) \right] \eta(dy), \quad (3.4)$$

这里 $\xi_0 \in \mathfrak{g}$, a_{ij} 为协方差矩阵, η 为 G 上的 Lévy 测度. 而且这样的 (ξ_0, a_{ij}, η) 唯一. 反之, 任给这样的 (ξ_0, a_{ij}, η) 和任意初始分布, 则有分布意义下唯一的 G 中的 Lévy 过程 x_t , $x_0 = e$, 其生成算子有如上表达式.

定理 3.1 中, 三参数 (ξ_0, a_{ij}, η) 决定 Lévy 过程 x_t 的分布, 所以, 文献中称 (ξ_0, a_{ij}, η) 为 x_t 的特征 (characteristics).

可以证明 (3.4) 中 η - 积分的被积函数绝对可积. 先设 ϕ_i 为指数坐标函数. 令 U 为 e 处的小邻域, 则对 $f \in C_c^\infty(G)$, 由实函数 $\psi(t) = f(xe^{t \sum_i \phi_i \xi_i})$ 的 Taylor 展开到 2 阶项可得

$$\forall x \in G, \quad y \in U, \quad f(xy) = f(x) + \sum_{i=1}^d \phi_i(y) \xi_i f(x) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \phi_j(y) \phi_k(y) \xi_j \xi_k f(xy'), \quad (3.5)$$

这里 $y' = e^{s \sum_i \phi_i(y) \xi_i}$, $s \in [0, 1]$. 因为 $\eta(\|\phi\|^2) < \infty$, 所以, Hunt 公式 (3.4) 中 η - 积分的被积函数绝对可积. 由 (3.3) 可证这对一般坐标函数 ϕ_i 也成立.

注意到以上被积函数的最后一项, 即 $\sum_{i=1}^d \phi_i(y) \xi_i f(x)$, 是保证可积性的. 若 Lévy 测度满足以下有限一阶矩条件:

$$\int \sum_{i=1}^d |\phi_i(g)| \eta(dg) < \infty, \quad (3.6)$$

则没这项仍可积. 此时, Hunt 公式 (3.4) 可写为以下较简单形式, 不直接依赖于坐标函数 ϕ_i :

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d a_{jk} \xi_j \xi_k f(x) + \xi_0^r f(x) + \int_G [f(xy) - f(x)] \eta(dy), \quad (3.7)$$

这里 $\xi_0^r = \xi_0 - \sum_i [\int_G \phi_i(y) \eta(dy)] \xi_i$.

可测空间 X 上的随机测度 $\xi = \xi(\omega, \cdot)$ 可定义为从概率空间 Ω 到 X 的核. 若 ξ 仅取非负整数值 (包括 ∞), 则 ξ 也称点过程. 设 μ 为 X 上 σ - 有限测度, ξ 为乘积空间 $\mathbb{R}_+ \times X$ 上的点过程. 若测度值过程 $\xi_t = \xi([0, t] \times \cdot)$ 有独立平稳增量, 并且对所有可测集 $B \subset X$, $\xi_t(B)$ 是均值为 $t\mu(B)$ 的 Poisson 随机变量 (均值 0 和 ∞ 的 Poisson 随机变量分别定义为 0 和 ∞), 则 ξ 称 $\mathbb{R}_+ \times X$ 上的 Poisson 随机测度, 以 μ 为特征测度. 关于 Poisson 随机测度的更详细讨论可参见文献 [21, 第 12 章] (这里所给的定义与文献 [21] 中略有不同, 但基本等价, 参见文献 [21, 定理 12.10]).

设 x_t 为 Lie 群 G 中的 Lévy 过程. 对任意 $s > 0$, 若 $x_s^{-1}x_s \neq e$, 则 $x_s^{-1}x_s$ 称过程 x_t 在时刻 s 的跳. 令 N 为 $\mathbb{R}_+ \times G$ 上的点过程, 定义为

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad B \in \mathcal{B}(G), \quad N([0, t] \times B) = \#\{s \in (0, t]; x_s^{-1}x_s \neq e, x_s^{-1}x_s \in B\}, \quad (3.8)$$

即 $N_t(B) = N([0, t] \times B)$ 为过程 x_t 在时间区间 $[0, t]$ 上在 B 内的跳的个数. 以下定理的证明参见文献 [19, 命题 1.4].

定理 3.2 设 η 为 Lévy 过程 x_t 的 Lévy 测度, 则如上定义的 N 为 $\mathbb{R}_+ \times G$ 上的 Poisson 随机测度, 以 η 为特征测度.

由定理 3.2 知, Lévy 过程 x_t 连续的充要条件是 $\eta = 0$. 此时, 由其生成算子的形式 (3.4) 和随机分析的基本理论 (如文献 [22] 或 [23]) 可知, x_t 为以下随机微分方程的解:

$$dx_t = \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij} \xi_i(x_t) \circ dW_t^j + \xi_0(x_t) dt, \quad (3.9)$$

这里 $\{\sigma_{ij}\}$ 为协方差矩阵 $\{a_{ij}\}$ 的平方根, $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$ 是 d 维标准 Brown 运动, $\circ$ 指 Stratonovich 随机积分, 即对所有 $f \in C_c^\infty(G)$, 有

$$f(x_t) = f(x_0) + \int_0^t \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij} \xi_i f(x_s) \circ dW_s^j + \int_0^t \xi_0 f(x_s) ds.$$

若 Lévy 测度 η 非零但有限, 即 $\eta(G) < \infty$, 则由文献 [19, 第 1.4 小节] 中的讨论可知, Poisson 随机测度 N 的点可列为 $(T_1, \sigma_1), (T_2, \sigma_2), (T_3, \sigma_3), \dots$, 这里 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ 为独立同分布的 G 中的随机变量, 分布为 $\eta(\cdot)/\eta(G)$, $T_i = \tau_1 + \dots + \tau_i$, 而 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ 为独立同分布指数随机变量, 均值为 $1/\eta(G)$, 且与 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ 独立. 此时, Lévy 过程 x_t 可由解随机微分方程 (3.9), 但将 ξ_0 换为 (3.7) 中的 ξ_0^r , 并插入跳来得到. 具体程序如下: 令 Poisson 随机测度 N 与 Brown 运动 W_t 独立, 在任意初始点从零时刻解 (3.9) 至时刻 T_1 , 再以 $x_{T_1-\sigma_1}$ 为初始点从 T_1 时刻解 (3.9) 至时刻 T_2 , 以此重复下去可得在整个时间轴 $\mathbb{R}_+$ 上定义的 Lévy 过程 x_t , 其生成算子 L 有 (3.7) 的形式. 注意在以上逐次求解 (3.9) 时, ξ_0 需换为 ξ_0^r .

4 齐性空间中的 Lévy 过程

4.1 基本性质

设 X 为流形, G 为作用在 X 上的 Lie 群. 设 G -作用可迁, 即对 X 中任两点 x 和 y , 存在 $g \in G$ 使得 $gx = y$. 固定 X 中一点 o . 令 $K = \{k \in G; ko = o\}$, 则 K 为 G 的闭子群, 固定点 o .

熟知 (参见文献 [24] 第 2 章中定理 3.2 和 4.2, 及命题 4.3) 左陪集空间 $G/K = \{gK; g \in G\}$ 也称齐性空间, 为流形, 与 X 在映射 $gK \mapsto go$ 下可微同胚, 并且 G 在 X 上的作用就是 G 在 G/K 上的自然作用. 我们将等同 X 和 G/K , 则 $o = eK$, 称 $X = G/K$ 的原点, 并且自然投影 $\pi: G \rightarrow G/K$, $g \mapsto gK$, 就是映射: $G \rightarrow X$, $g \mapsto go$.

由以上讨论可知, X 中的 G -不变的 Markov 过程 x_t 可看作齐性空间 G/K 中在自然 G 作用下不变的 Markov 过程. 先发展一点有关 G/K 上测度的简单理论, 然后再讨论 $X = G/K$ 上 G -不变的 Markov 过程. 本节将只提及一些最基本性质, 更重要的结果将在下节讨论.

下文中, K 将设为紧. 一 (Borel) 可测映射 $S: X \rightarrow G$ 称 $X = G/K$ 上的截面映射, 若 $\pi \circ S = \text{id}_X$ (X 上恒等映射). 由于 G 局部为 Euclid 空间, 在单位元 e 的某邻域存在光滑的截面映射. 然后用左平移可将它延拓到整个 X 上, 保持可测性. 从而截面映射总存在, 但不唯一, 且可选为在任意点临近光滑.

熟知紧群 K 上存在唯一的左不变概率测度, 称 (规范的) Haar 测度, 记作 ρ_K . 它也是右不变并在逆映射下不变. 在计算中, $\rho_K(dk)$ 也简记为 dk . 齐性空间 $X = G/K$ 上任意两测度 μ 和 ν 的卷积 $\mu * \nu$ 为 X 上测度, 定义为

$$\mu * \nu(f) = \int_{X \times X} \int_K f(S(x)ky) dk \mu(dx) \nu(dy), \quad f \in \mathcal{B}_+(X). \quad (4.1)$$

该定义与截面映射 S 的选择无关 (若 S' 为另一界面映射, 则 $\forall x \in X$, $S'(x) = S(x)k_x$, $k_x \in K$). 当 $G/K = G$ 时 ($K = \{e\}$), G/K 上的卷积就是上节中已定义的 Lie 群 G 上的卷积. 易证, G/K 上的卷积也满足结合律, 即 $(\mu * \nu) * \gamma = \mu * (\nu * \gamma)$, 从而, n 重卷积 $\mu^{*n} = \mu * \mu * \dots * \mu$ 有意义.

若 ν 为 K -不变, 即 $\forall k \in K, k\nu = \nu$, 则卷积 $\mu * \nu$ 可简写为

$$\mu * \nu(f) = \int_{X \times X} f(S(x)y) \mu(dx) \nu(dy), \quad f \in \mathcal{B}_+(X). \quad (4.2)$$

此时, 若 μ 也是 K -不变, 则 $\mu * \nu$ 亦然.

齐性空间 $X = G/K$ 上的卷积半群与 Lie 群 G 上的卷积半群一样定义, 是一族 X 上的概率测度 $\mu_t, t \in \mathbb{R}_+$, 满足 $\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t$. 它称为连续的, 若当 $t \rightarrow 0$ 时, $\mu_t \rightarrow \mu_0$ (弱收敛). 此时对所有 $s > 0$, 当 $t \rightarrow s$ 时, $\mu_t \rightarrow \mu_s$ (弱收敛). 这可由 G 上的相同性质和下面的命题 4.1 和 4.2 推出.

以下命题给出 G 上和 G/K 上测度的一些基本联系.

命题 4.1 (1) 映射 $\mu \rightarrow \nu = \pi\mu$ 是从 G 上所有 K -右不变测度 μ 到 $X = G/K$ 上所有测度 ν 的 1-1 对应, 也是从 G 上所有 K -双不变测度 μ 到 X 上所有 K -不变测度 ν 的 1-1 对应.

(2) 若 ν 为 X 上测度, 则 G 上唯一的 K -右不变测度 μ 满足 $\pi\mu = \nu$, 由下式给出:

$$\forall f \in \mathcal{B}_+(G), \quad \mu(f) = \int_X \int_K f(S(x)k) dk \nu(dx), \quad (4.3)$$

这里 S 为任截面映射.

(3) 设 μ_1 和 μ_2 为 G 上测度, 满足以下三条件之一: μ_1 为 K -右不变, μ_2 为 K -左不变, 或 μ_2 为 K -共轭不变, 则

$$\pi(\mu_1 * \mu_2) = (\pi\mu_1) * (\pi\mu_2). \quad (4.4)$$

证明 若 $g \in G$, 则有 $k \in K$ 使得 $S \circ \pi(g) = gk$. 若 μ 为 G 上 K -右不变测度满足 $\pi\mu = \nu$, 则对 $f \in \mathcal{B}_+(G)$, 有

$$\mu(f) = \int_K \mu(f \circ r_k) dk = \int_K \mu(f \circ r_k \circ S \circ \pi) dk = \int_K \nu(f \circ r_k \circ S) dk.$$

这证明了 μ 满足 (4.3), 从而由其投影 $\nu = \pi\mu$ 所确定. 反之, 由 Haar 测度 dk 的 K -右不变性, 易证对任意 X 上测度 ν , 由 (4.3) 所确定的 μ 是 G 上 K -右不变测度, 满足 $\pi\mu = \nu$. 且易知 μ 为 K -双不变当且仅当 ν 为 K -不变. 由以上推理可得 (1) 和 (2). 为证 (3), 对 G 上任两测度 μ_1 和 μ_2 , 满足 (3) 中三条件之一, 令 $\nu_1 = \pi\mu_1, \nu_2 = \pi\mu_2$, 则

$$\begin{aligned} \pi(\mu_1 * \mu_2)(f) &= \int f(\pi(g_1 g_2)) \mu_1(dg_1) \mu_2(dg_2) = \int f(\pi(g_1 k g_2)) \mu_1(dg_1) dk \mu_2(dg_2) \\ &= \int f(g_1 k \pi(g_2)) \mu_1(dg_1) dk \mu_2(dg_2) = \int f(gk y) \mu_1(dg) dk \nu_2(dy) \\ &= \int f(S(\pi(g)) k' k y) \mu_1(dg) dk \nu_2(dy) \quad (\text{某 } k' \in K) \\ &= \int f(S(x) k y) \nu_1(dx) dk \nu_2(dy) = \nu_1 * \nu_2(f). \end{aligned}$$

证毕. □

G 上的概率测度 μ 称幂等 (idempotent), 若 $\mu * \mu = \mu$. 由文献 [10, 定理 1.2.10], 若 μ 为幂等, 则 μ 必是 G 的某紧子群 H 的 Haar 测度, 即 $\mu = \rho_H$. 设 μ_t 为 G 上的卷积半群. 因为 $\mu_0 * \mu_0 = \mu_0$, 所以有 G 的紧子群 H 使得 $\mu_0 = \rho_H$. 因为 $\mu_t = \mu_0 * \mu_t = \mu_t * \mu_0$, 此时, μ_t 是 H -双不变的.

命题 4.2 (1) G 上 K -右不变 (或 K -左不变) 的卷积半群 μ_t 是 K -双不变的.

(2) $X = G/K$ 上的卷积半群 ν_t 是 K -不变的, 且有 G 的紧子群 $H \supset K$, 使得 $\nu_0 = \pi\rho_H$.

(3) 映射 $\mu_t \rightarrow \nu_t = \pi\mu_t$ 是从 G 上所有 K -双不变的卷积半群 μ_t 到 X 上所有卷积半群 ν_t 的 1-1 对应, 并且 μ_t 连续当且仅当 ν_t 连续.

证明 由以上讨论可知, G 有紧子群 H 使得 $\mu_0 = \rho_H$ 并且 μ_t 为 H -双不变, 则由 μ_0 的 K -右不变性 (或 K -左不变性) 可得 $K \subset H$, 这证明了 (1). 设 ν_t 为 X 上卷积半群. 令 μ_t 为 G 上唯一 K -右不变测度, 满足 $\pi\mu_t = \nu_t$. 由命题 4.1 和 (1) 知, μ_t 为 G 上 K -双不变卷积半群, 从而 ν_t 为 K -不变. 并且有 G 的紧子群 H 使得 $\mu_0 = \rho_H$. 因为 μ_0 为 K -双不变, 所以 $K \subset H$. 这证明了 (2). (3) 可从 (2) 和命题 4.1 导出. 其中为从 ν_t 的连续性导出 μ_t 的连续性, 利用到以下事实: (4.3) 中积分 $\int_K f(S(x)k)dk$ 当 f 为有界连续时是 x 的连续函数. 这是因为该积分与截面映射 S 的选择无关, 而 S 可选为在任意点 x 邻域连续. $\square$

如同 G 中, 左不变的右连左极 Markov 过程也称 Lévy 过程, 我们将称 $X = G/K$ 中 G -不变的右连左极 Markov 过程 x_t 为 X 中的 Lévy 过程. 令 P_t 为其转移半群. 由 P_t 的 G -不变性可知, $\mu_t = P_t(o, \cdot)$ 为 X 上 K -不变的测度, 且 $\mu_0 = \delta_o$. 由以下计算可知 μ_t 为 X 上卷积半群:

$$\begin{aligned}\mu_{s+t}(f) &= P_{s+t}f(o) = P_s P_t f(o) = \int_X \mu_s(dx) P_t f(x) = \int_X \mu_s(dx) P_t f(S(x)o) \\ &= \int_X \mu_s(dx) P_t(f \circ S(x))(o) \quad (\text{由 } P_t \text{ 的 } G\text{-不变性}) \\ &= \int_{X \times X} \mu_s(dx) \mu_t(dy) f(S(x)y) = \mu_s * \mu_t(f).\end{aligned}$$

由轨道右连续性可知卷积半群 μ_t 的连续性.

反之, 若 μ_t 为 X 上连续卷积半群且 $\mu_0 = \delta_o$, 则令

$$P_t f(x) = \int f(S(x)y) \mu_t(dy). \quad (4.5)$$

由 μ_t 的 K -不变性可知上式与截面映射 S 的选择无关, 定义 X 上 G -不变的 Feller 转移半群. 对应的 Feller 过程为 X 中 G -不变的右连左极 Markov 过程, 即 Lévy 过程, 以 μ_t 为相关的卷积半群. 以上讨论可总结为下命题.

命题 4.3 设 x_t 为 $X = G/K$ 中的 Lévy 过程, 以 P_t 为转移半群, 则 x_t 为 Feller 过程, 且 $\mu_t = P_t(o, \cdot)$ 为 X 上连续卷积半群, 满足 $\mu_0 = \delta_o$. 反之, 若 μ_t 为 X 上这样的卷积半群, 则有 X 中的 Lévy 过程 x_t , 满足 $x_0 = o$ 且以 μ_t 为 x_t 的分布.

尽管 $X = G/K$ 上没有自然的乘积结构, 对 X 上 K -不变的测度 μ 和 ν , 以下形式的积分有意义:

$$\begin{aligned}\int f(xy) \mu(dy) &= \int f(S(x)y) \mu(dy), \\ \int f(xy, xyz) \mu(dy) \nu(dz) &= \int f(S(x)y, S'(S(x)y)z) \mu(dy) \nu(dz) \\ &= \int f(S(x)y, S(x)S'(y)z) \mu(dx) \nu(dy),\end{aligned} \quad (4.6)$$

即它们与截面映射 S 和 S' 的选择无关, 这里注意到 $S'(S(x)y) = S(x)S'(y)k_{x,y}$, $k_{x,y} \in K$. 在这个意义下, G 中 Lévy 过程的有限维分布公式 (3.2) 对 X 中的 Lévy 过程也成立.

易见, 若 x 和 y 为 X 中随机变量, 且 y 的分布 K -不变, 则 $xy = S(x)y$ 的分布与 S 的选择无关.

由以下命题知, G/K 中的 Lévy 过程在某种意义上可用独立平稳增量来刻画, 如同 G 上的情形.

命题 4.4 设 x_t 为 $X = G/K$ 中的右连左极过程, $\mathcal{F}_t^x$ 为其自然 σ -代数族. 若 x_t 为 Lévy 过程, μ_t 为相关的卷积半群, 则对任意截面映射 S 和 $s < t$, $x_s^{-1}x_t = S(x_s)^{-1}x_t$ 与 $\mathcal{F}_s^x$ 独立且有分布 μ_{t-s} . 从而该分布为 K -不变, 仅依赖于 $t-s$, 与 S 的选择无关. 反之, 若对某截面映射 S 和任意 $s < t$, $x_s^{-1}x_t = S(x_s)^{-1}x_t$ 与 $\mathcal{F}_s^x$ 独立, 且其分布为 K -不变, 仅依赖于 $t-s$, 则 x_t 为 X 中的 Lévy 过程.

证明 设 x_t 为 X 中的 Lévy 过程, μ_t 为相关的卷积半群. 由 x_t 的有限维分布公式 (3.2), 可证 $S(x_s)^{-1}x_t$ 与 $\mathcal{F}_s^x$ 独立且其分布为 μ_{t-s} . 为简单起见, 将仅证对 $r < s < t$, $x_s^{-1}x_t = S(x_s)^{-1}x_t$ 与 x_r 独立且有分布 μ_{t-s} . 固定任意截面映射 S , 由 (3.2), 对 $f, g \in \mathcal{B}_+(X)$, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(x_r)g(x_s^{-1}x_t)] &= \int \mu_0(dx_0)\mu_r(dx_1)\mu_{s-r}(dx_2)\mu_{t-s}(dx_3)f(x_0x_1)g((x_0x_1x_2)^{-1}x_0x_1x_2x_3) \\ &= \int \mu_0(dx_0)\mu_r(dx_1)\mu_{s-r}(dx_2)\mu_{t-s}(dx_3)f(x_0x_1)g(x_3) \\ &= \mathbb{E}[f(x_r)]\mathbb{E}[g(x_{t-s})]. \end{aligned}$$

由此可知, $x_s^{-1}x_t$ 与 x_r 独立且有分布 μ_{t-s} . 反之, 设对某截面映射 S 和任意 $s < t$, $x_s^{-1}x_t = S(x_s)^{-1}x_t$ 与 $\mathcal{F}_s^x$ 独立且其分布, 记为 $\mu_{s,t}$, 是 K -不变, 仅依赖于 $t-s$, 则对 $f \in \mathcal{B}_+(X)$, 有 $\mathbb{E}[f(x_t) | \mathcal{F}_s^x] = \mathbb{E}[f(S(x_s)S(x_s)^{-1}x_t) | \mathcal{F}_s^x] = \int_X f(S(x_s)y)\mu_{s,t}(dy) = \int_X f(S(x_s)y)\mu_{0,t-s}(dy)$. 由 $\mu_{s,t}$ 的 K -不变性和 (4.2) 知, $\mu_{r,s} * \mu_{s,t} = \mu_{r,t}$. 因为 $\mu_{s,t}$ 仅依赖于 $t-s$, 易知 $\mu_t = \mu_{0,t}$ 为连续卷积半群, x_t 为 X 中 G -不变 Markov 过程, 以 μ_t 为相关的卷积半群, 从而 x_t 是 X 中的 Lévy 过程. $\square$

4.2 生成算子

由命题 4.3 知, $X = G/K$ 中的 Lévy 过程 x_t 为 Feller 过程, 从而其分布由生成算子 L 确定. 为陈述生成算子的 Hunt 公式, 我们需做些准备. 如前, $\mathfrak{g}$ 为 G 的 Lie 代数. 对 $g \in G$, 共轭映射 $c_g = l_g \circ r_{g^{-1}}$ 在单位元 e 处的微分记作 $\text{Ad}(g)$, 即 $\forall \xi \in \mathfrak{g}$, $\text{Ad}(g)\xi = Dc_g(\xi)$. 映射 $G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $(g, \xi) \mapsto \text{Ad}(g)\xi$ 是 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的作用, 称 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随作用 (adjoint action), 记为 $\text{Ad}(G)$. 该作用在 K 上的限制则记为 $\text{Ad}(K)$.

设 T 为 G 上算子, 以 $C^\infty(G)$ 为定义域. 若 T 为 K -右不变, 则 T 诱导出 $X = G/K$ 上算子 T^π , 以 $C^\infty(X)$ 为定义域, 如下:

$$T^\pi f(x) = T(f \circ \pi)(g), \quad f \in C^\infty(X), \quad x \in X,$$

这里 $g \in G$ 满足 $x = \pi(g)$, π 为自然投影: $G \rightarrow K$. 由 T 的 K -右不变性知, 上式与 g 的选择无关. 易见, 若 T 为左不变, 则 T^π 为 G -不变. 为简单起见, T^π 将记为 T , 从而, G 上 K -右不变的算子 T 可看作 X 上的算子. 具体为何种算子可由上下文确定.

任意 $\xi \in \mathfrak{g}$ 可看作是 G 上左不变向量场, 即 G 上左不变的一阶微分算子. 若 ξ 是 $\text{Ad}(K)$ -不变, 则 ξ 作为算子 K -右不变, 从而可看作是 X 上的 G -不变的一阶微分算子, 即 G -不变的向量场.

令 $\mathfrak{k}$ 为 K 的 Lie 代数. 因为 K 是紧的, 所以, $\mathfrak{g}$ 中有与 $\mathfrak{k}$ 互补的 $\text{Ad}(K)$ -不变的子空间 $\mathfrak{p}$, 即 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ (直和) 且 $\forall k \in K$, $\text{Ad}(k)\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$. 这里 $\mathfrak{p}$ 可取为在 $\mathfrak{g}$ 上某 $\text{Ad}(K)$ -不变的内积下与 $\mathfrak{k}$ 正交的子空间, 而 $\text{Ad}(K)$ -不变的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 可按下式从 $\mathfrak{g}$ 上的任一内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ 得到:

$$\forall \xi, \zeta \in \mathfrak{g}, \quad \langle \xi, \zeta \rangle = \int_K \langle \text{Ad}(k)\xi, \text{Ad}(k)\zeta \rangle' dk.$$

固定 $X = G/K$ 的原点 o 处切空间 $T_o X$ 的一组基 $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. 因为自然投影 $\pi: G \rightarrow X$ 在单位元 e 处的微分映射 $D\pi: \mathfrak{g} \rightarrow T_o X$ 将 $\mathfrak{p}$ 1-1 映到 $T_o X$, 从而, $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ 也可看作 $\mathfrak{p}$ 上的基. 对 $k \in K$, 令 $\{[\text{Ad}(k)]_{ij}\}$ 为映射 $\text{Ad}(k): \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ 在该基下的表示矩阵, 即 $\text{Ad}(k)\xi_j = \sum_{i=1}^n [\text{Ad}(k)]_{ij}\xi_i$. 任意 $n \times n$ 对称矩阵 $\{a_{ij}\}$ 称 $\text{Ad}(K)$ - 不变, 若 $\forall k \in K, a_{ij} = \sum_{p,q=1}^n a_{pq}[\text{Ad}(k)]_{ip}[\text{Ad}(k)]_{jq}$. 易证此时 G 上的左不变二阶微分算子 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j$ 是 K - 右不变, 从而可看作是 X 上的 G - 不变的二阶微分算子.

由以上讨论得到, 对任意 $\text{Ad}(K)$ - 不变的对称矩阵 a_{ij} 和 $\text{Ad}(K)$ - 不变的 $\xi_0 \in \mathfrak{p}$, G 上的左不变微分算子

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j + \xi_0 \quad (4.7)$$

可看作是 X 上 G - 不变的微分算子. 可以证明, X 上任 G - 不变的二阶线性微分算子 T , 若满足 $T1 = 0$, 必由上式 (4.7) 给出, 且 $\text{Ad}(K)$ - 不变的对称矩阵 a_{ij} 和 $\text{Ad}(K)$ - 不变的 $\xi_0 \in \mathfrak{p}$ 是唯一的.

可以证明 $X = G/K$ 上有有界 Borel 函数 $\phi_1, \dots, \phi_n$, 在 o 点和某紧集外为 0, 在 o 附近光滑, 对所有 o 附近的 x , 有

$$x = \exp\left(\sum_{i=1}^n \phi_i(x)\xi_i\right)o, \quad (4.8)$$

且对所有 $x \in X$, 有

$$\forall k \in K, \sum_{i=1}^n \phi_i(x)\text{Ad}(k)\xi_i = \sum_{i=1}^n \phi_i(kx)\xi_i. \quad (4.9)$$

这样的函数 ϕ_i 将称为 $X = G/K$ 上与 $\mathfrak{p}$ 的基 $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ 相关的指数坐标函数. 注意到, 若 $\phi'_1, \dots, \phi'_n$ 为另一组与同个基相关的指数坐标函数, 则在 o 的某邻域, $\phi'_i = \phi_i$.

为证以上 ϕ_i 的存在性, 注意到 (4.8) 在 o 点邻近定义了一组光滑函数 ϕ_i , 满足 $\phi_i(o) = 0$. 它们可延伸为 X 上的有紧支撑的有界 Borel 函数. 对 $k \in K$ 和足够接近 o 的 x , $kx = \exp[\sum_i \phi_i(kx)\xi_i]o$, 并且

$$kx = k \exp\left[\sum_i \phi_i(x)\xi_i\right]k^{-1}o = \exp\left[\sum_i \phi_i(x)\text{Ad}(k)\xi_i\right]o.$$

因为 K 是紧的, 当 x 接近 o 时, 对所有 $k \in K$, kx 一致地接近 o . 从而存在 o 的邻域 U , 使得对所有 $x \in U$, (4.9) 成立. 将 ϕ_i 换为 $\psi\phi_i$, 这里 ψ 为 K - 不变的光滑函数, 在 U 外为 0 而在 o 附近为 1, 则 (4.9) 在整个 X 上成立. 这证明了指数坐标函数的存在性.

任意 $n \times n$ $\text{Ad}(K)$ - 不变的非负定对称矩阵 $\{a_{ij}\}$ 称 X 上的协方差矩阵. X 上 K - 不变的测度 μ 称为 Lévy 测度, 若 $\mu(\{o\}) = 0$, $\mu(\sum_{i=1}^n \phi_i^2) < \infty$, 并且对所有 o 的邻域 U , 有 $\mu(U^c) < \infty$. 易证 Lévy 测度的定义与基和坐标函数的选择无关. 以下形式的 Hunt 公式的证明可参见文献 [19].

定理 4.1 设 x_t 为 $X = G/K$ 上的 Lévy 过程, 以 L 为生成算子, 则 L 的定义域 $D(L)$ 包含 $C_c^\infty(X)$, 且对所有 $f \in C_c^\infty(X)$ 和 $x \in X$, 有

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk}\xi_j\xi_k f(x) + \xi_0 f(x) + \int_X \left[f(xy) - f(x) - \sum_{i=1}^n \phi_i(y)\xi_i f(x) \right] \eta(dy), \quad (4.10)$$

这里 $\xi_0 \in \mathfrak{g}$, a_{ij} 为 X 上的协方差矩阵, η 为 X 上的 Lévy 测度. 而且这样的 (ξ_0, a_{ij}, η) 唯一. 反之, 任给这样的 (ξ_0, a_{ij}, η) 和任意初始分布, 则有分布意义下唯一的 X 中的 Lévy 过程, 从 o 点出发, 其生成算子有如上表达式.

由 (3.4) 和 (4.10) 知, G 上 Lévy 过程的生成算子和 $X = G/K$ 上 Lévy 过程的生成算子有相同形式, 但 (4.10) 中的微分和积分运算应有适当解释, 见本节前面关于 X 上微分算子和上节关于 X 上积分的讨论.

如同 Lie 群 G 中的 Lévy 过程, 定理 4.1 中的三参数 (ξ_0, a_{ij}, η) 决定齐性空间 $X = G/K$ 中的 Lévy 过程 x_t 的分布, 所以, (ξ_0, a_{ij}, η) 称 x_t 的特征. 可以证明 x_t 连续的充要条件是其 Lévy 测度 η 为零, 见后面的注 4.2.

齐性空间 $X = G/K$ 上, K 固定点 $o = eK$, 从而诱导出 K 在切空间 $T_o X$ 上的作用: $K \times T_o X \rightarrow T_o X, (k, \xi) \mapsto Dk(\xi)$. 齐性空间 $X = G/K$ 称不可约 (irreducible), 若该作用不可约, 即它没有非平凡的不变子空间. 因为 $\mathfrak{p}$ 与 $T_o X$ 在 $D\pi$ 下 1-1 对应, 且 $\text{Ad}(k)$ 对应于 Dk , 从而 X 不可约当且仅当 $\text{Ad}(K)$ 在 $\mathfrak{p}$ 上不可约. 不可约齐性空间的典型的例子是 n 维球面 S^n , 作为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位球面, 可看作正交群 $O(n+1)$ 的齐性空间, 即 $S^n = O(n+1)/O(n)$.

现设 $\mathfrak{p}$ 的基 $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ 选择为在某 $\text{Ad}(K)$ - 不变的内积下正交规范, 则对任意 $k \in K$, $\{[\text{Ad}(k)]_{ij}\}$ 为正交矩阵.

设 H 是 $O(n)$ 的子群, 在 $\mathbb{R}^n$ 上的作用不可约. 由文献 [25, 附录 5] 中的定理 1 可知, $\mathbb{R}^n$ 上的任意 H - 不变的对称双线性形式必与 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积只差一常数因子. 由此可以推出, 若 $X = G/K$ 不可约, 即 $\text{Ad}(K)$ 在 $\mathfrak{p}$ 上不可约, 则任意 $\text{Ad}(K)$ - 不变的对称矩阵必与单位矩阵 I 只差一常数因子. 此时, 若 $\dim(\mathfrak{p}) = \dim(X) > 1$, 则 $\mathfrak{p}$ 中无非零的 $\text{Ad}(K)$ - 不变向量. 因为齐性空间 X 上的 G - 不变的二阶线性微分算子 T , 若 $T1 = 0$, 必由 (4.7) 给出, 从而, 若 X 不可约且 $\dim(X) > 1$, 则

$$T = a \sum_{i=1}^n \xi_i \xi_i, \quad (4.11)$$

这里 a 为某常数, 而基 $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ 选择为在某 $\text{Ad}(K)$ - 不变的内积下正交规范. 易证, 在 X 不可约的假设下, $\mathfrak{p}$ 上任意两个 $\text{Ad}(K)$ - 不变的内积只差一常数因子.

另外, 由 (4.9) 和 Lévy 测度 η 的 K - 不变性知, 对所有 o 的 K - 不变的邻域 U , $\int_{U^c} \sum_{i=1}^n \eta(dy) \phi_i(y) \xi_i$ 是 $\mathfrak{p}$ 中 $\text{Ad}(K)$ - 不变的向量, 从而为零. 由此可知, (4.10) 中的 η - 积分可写为 $\int_G [f(xy) - f(x)] \eta(dy)$, 理解为积分主值, 即当 o 的 K - 不变的领域 U 收缩到 o 时, 积分 $\int_{U^c} [f(xy) - f(x)] \eta(dy)$ 的极限.

综上所述, 我们得到以下当 $X = G/K$ 不可约时 Hunt 公式的简单形式.

定理 4.2 设 $X = G/K$ 为不可约, $\dim(X) > 1$, 并且 $\mathfrak{p}$ 的基的选择如上, 则定理 4.1 中生成算子的 (4.10) 可写为

$$Lf(x) = \frac{a}{2} \sum_{i=1}^n \xi_i \xi_i f(x) + \int_X [f(xy) - f(x)] \eta(dy), \quad (4.12)$$

这里 $a \geq 0$ 为某常数, η - 积分理解为如上定义的积分主值. 另外, 任给常数 $a \geq 0$ 和 X 上的 Lévy 测度 η , 有分布意义下唯一的 X 中的 Lévy 过程, 从 o 出发, 其生成算子 L 在 $C_c^\infty(X)$ 上的限制满足 (4.12).

Lie 群 G 中的 Lévy 过程 g_t 称 K - 共轭不变, 若其转移半群 P_t 为 K - 共轭不变, 即对所有 $t > 0$, $f \in C_c^\infty(G)$ 和 $k \in K$, 有 $P_t(f \circ c_k) = (P_t f) \circ c_k$. 因为 Lévy 过程左不变, 所以其 K - 共轭不变等价于 K - 右不变. 若 $g_0 = e$, 则这等价于对所有 $t > 0$ 和 $k \in K$, $kg_t k^{-1} \stackrel{d}{=} g_t$ (同分布). 由独立平稳增量知, 这也等价于对所有 $k \in K$, 过程 $kg_t k^{-1}$ 与 g_t 同分布. 以下定理给出 G 中的 Lévy 过程和 $X = G/K$ 中的 Lévy 过程的一个有用的关系. 该定理上半部的证明很容易, 下半部的证明用到 Hunt 公式 (4.10), 参见文献 [19, 定理 2.2].

定理 4.3 设 g_t 是 G 中的 K -共轭不变的 Lévy 过程, $g_0 = e$, 则 $x_t = \pi(g_t)$ 是 $X = G/K$ 中的 Lévy 过程. 反之, 若 x_t 是 X 中的 Lévy 过程, $x_0 = o$, 则存在 G 中的 K -共轭不变的 Lévy 过程 g_t , $g_0 = e$, 使得过程 $\pi(g_t)$ 与 x_t 同分布.

注 4.1 在定理 4.3 中, 对给定的 $X = G/K$ 中的 Lévy 过程 x_t , 对应的 G 中的 K -共轭不变的 Lévy 过程 g_t 在分布意义下不唯一. 这可由 X 中的 Brown 运动可由 G 中的不同过程投影得到一事可知, 参见文献 [19, 命题 2.7].

注 4.2 在定理 4.3 的证明中 (参见文献 [19, 定理 2.2] 的证明), 得到 g_t 的 Lévy 测度 η 与 x_t 的 Lévy 测度 $\bar{\eta}$ 的如下关系:

$$\forall f \in \mathcal{B}_+(G), \quad \eta(f) = \int_X \int_K f(kS(x)k^{-1})dk \bar{\eta}(dx),$$

这里 S 为某截面映射. 由此可知, 若 $\bar{\eta} = 0$, 则 $\eta = 0$. 由定理 3.2 可得 g_t 连续, 从而 $x_t = \pi(g_t)$ 连续. 反之, 若 $\bar{\eta}$ 非零, 由上式可知 $\eta(K^c) > 0$. 由定理 3.2 可知 $P(A) > 0$, 这里 A 为以下事件: 存在 $t > 0$ 使得 $g_t^{-1}g_t \in K^c$. 若 $g_t^{-1}g_t \in K^c$, 则 $x_{t-} = \pi(g_{t-}) \neq \pi(g_t) = x_t$, 从而 x_t 不连续. 因此, x_t 连续的充要条件是其 Lévy 测度 $\bar{\eta}$ 为零.

5 非齐性 Lévy 过程

按第 3 节中的定义, Lie 群 G 中的右连左极过程 x_t 称 G 中的 Lévy 过程, 若它有独立平稳增量. 如果只设 x_t 有独立增量, 即设对所有 $s < t$, $x_s^{-1}x_t$ 与 $\mathcal{F}_s^x$ 独立, 则 x_t 称 G 中的非齐性 Lévy 过程.

设 x_t 为 G 中的非齐性 Markov 过程, 以 $P_{s,t}$ 为 (双参数) 转移半群. x_t 称左不变, 若 $P_{s,t}$ 为左不变, 即对所有 $g \in G$ 和 $f \in \mathcal{B}_+(G)$, 有 $P_{s,t}(f \circ l_g) = (P_{s,t}f) \circ l_g$. 由非齐 Markov 性和左不变性, 对所有 $s < t$, 都有

$$E[f(x_s^{-1}x_t) | \mathcal{F}_s^x] = P_{s,t}(f \circ l_{x_s^{-1}})(x_s) = P_{s,t}f(e).$$

由此可知, $x_s^{-1}x_t$ 独立于 $\mathcal{F}_s^x$, 并以 $P_{s,t}(e, \cdot)$ 为分布. 因此, x_t 有独立增量, 是非齐性 Lévy 过程. 反之, 正如 Lévy 过程为左不变 Markov 过程, 易证非齐性 Lévy 过程为左不变非齐性 Markov 过程. 我们得到以下命题.

命题 5.1 G 中的右连左极过程是非齐性 Lévy 过程的充要条件是它是左不变的非齐性 Markov 过程.

Lie 群 G 上的一族概率测度 $\mu_{s,t}$ ($0 \leq s \leq t$) 称双参数卷积半群, 若对所有 $r \leq s \leq t$, 有 $\mu_{r,s} * \mu_{s,t} = \mu_{r,t}$. 它称为连续的, 若 $(s, t) \mapsto \mu_{s,t}$ 在弱收敛意义下连续. 易见, 若 μ_t 为连续的卷积半群, 则 $\mu_{s,t} = \mu_{t-s}$ 为连续的双参数卷积半群.

设 x_t 为 G 中的非齐性 Lévy 过程, 则易见其增量 $x_s^{-1}x_t$ 的分布 $\mu_{s,t}$ 组成一双参数卷积半群, 满足 $\mu_{t,t} = \delta_e$, 称与过程 x_t 相关的卷积半群. 显然, $\mu_{s,t}$ 连续当且仅当 x_t 是随机连续的, 即对所有 $t > 0$, 有 $P(x_t = x_{t-}) = 1$.

现设 $\mu_{s,t}$ 为 G 上连续的双参数卷积半群, 满足 $\mu_{t,t} = \delta_e$. 对所有 $u, t \in \mathbb{R}_+$, $x \in G$ 和 $f \in C_0(\mathbb{R}_+ \times G)$, 令

$$R_t f(u, x) = \int_G f(u+t, xy) \mu_{u, u+t}(dy). \quad (5.1)$$

不难证明上式定义乘积空间 $\mathbb{R}_+ \times G$ 上的 Feller 转移半群 R_t . 令 z_t 为相应的 $\mathbb{R}_+ \times G$ 中的 Feller 过程, 以 (u, x) 为出发点, 则 z_t 可写为 $z_t = (u+t, y_t)$, 且对 $f \in C_c(G)$, 有 $E[f(y_t)] = \int_G f(xy) \mu_{u, u+t}(dy)$. 令 $x_t = y_{t-u}$, $t \geq u$, 则 x_t 是左不变非齐性 Markov 过程, 且其转移半群 $P_{s,t}$ 满足 $P_{s,t}(e, \cdot) = \mu_{s,t}$. 从而, x_t 是非齐性 Lévy 过程, 以 $\mu_{s,t}$ 为相关的卷积半群. 作为 Feller 过程的一个分量, x_t 必是随机连续的. 我们得到以下定理.

定理 5.1 设 $\mu_{s,t}$ ($0 \leq s \leq t$) 是 G 中的双参数卷积半群, 满足 $\mu_{t,t} = \delta_e$, 则 $\mu_{s,t}$ 与某随机连续的非齐性 Lévy 过程相关的充要条件是 $\mu_{s,t}$ 连续.

由非齐 Markov 性不难证明非齐性 Lévy 过程 x_t 的有限维分布可由其初始分布 μ_0 和相关的双参数卷积半群 $\mu_{s,t}$ 表示如下: 对所有 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 和 $f \in \mathcal{B}_+(G^n)$, 有

$$\begin{aligned} E[f(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})] \\ = \int f(x_0 x_1, x_0 x_1 x_2, \dots, x_0 x_1 x_2 \cdots x_n) \mu_0(dx_0) \mu_{0,t_1}(dx_1) \mu_{t_1,t_2}(dx_2) \cdots \mu_{t_{n-1},t_n}(dx_n). \end{aligned} \quad (5.2)$$

如前, 设 K 为 G 的紧子群. 齐性空间 $X = G/K$ 中的非齐性 Lévy 过程的基本理论可比照第 4.1 小节讨论的 X 中的 Lévy 过程作平行发展. 如此, X 中的右连左极且 G -不变的非齐性 Markov 过程 x_t 称非齐性 Lévy 过程. 令 $P_{s,t}$ 为其转移半群, 并令 $\mu_{s,t} = P_{s,t}(o, \cdot)$, 则 $\mu_{s,t}$ 为 K -不变, 且由非齐 Markov 性和 $P_{s,t}$ 的 G -不变性可得 x_t 的有限维分布有 (5.2) 的形式, 这里形如 $\int f(xy, xyz) \mu(dy) \nu(dz)$ 的积分按 (4.6) 的意义理解 (与该式中截面映射 S 的选择无关).

按以下命题, $X = G/K$ 中的非齐性 Lévy 过程可用独立增量来刻画, 正如 G 中的非齐性 Lévy 过程. 其证明类似命题 4.4, 故从略.

命题 5.2 令 x_t 为 $X = G/K$ 中的右连左极过程. 若 x_t 是非齐性 Lévy 过程, 以 $P_{s,t}$ 为转移半群, 则对任意截面映射 S 和 $s < t$, $x_s^{-1} x_t = S(x_s)^{-1} x_t$ 独立于 $\mathcal{F}_s^x$, 并且其分布为 $\mu_{s,t} = P_{s,t}(o, \cdot)$, 从而为 K -不变并与 S 的选择无关. 反之, 若对某截面映射 S 和所有 $s < t$, $x_s^{-1} x_t = S(x_s)^{-1} x_t$ 独立于 $\mathcal{F}_s^x$ 且其分布为 K -不变, 则 x_t 是 X 中的非齐性 Lévy 过程.

Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的右连左极的独立增量过程也称可加过程 (additive processes). 由著名的 Lévy-Itô 表示, 如文献 [21, 定理 15.4], 可加过程可写为三个分量的和: 非随机的漂移、扩散和独立的跳. 由于一般 Lie 群不可交换, G 中的非齐性 Lévy 过程不能作如此简单的分解. Feinsilver^[6] 得到了 G 中随机连续的非齐性 Lévy 过程的一个鞅表示, 这是一个依赖于时间的三参数表示, 推广了 Stroock 和 Varadhan^[7] 关于连续过程的结果. Heyer 和 Pap^[8] 用抽象 Fourier 分析将 Feinsilver 的结果推广到更一般的局部紧群. Liao^[9] 将以上鞅表示推广到齐性空间, 并在文献 [26] 中推广到非随机连续的情形. 这里由于篇幅有限, 将只讨论随机连续的过程, 对齐性空间重点考虑不可约的情形.

Lie 群 G 中的从单位元 e 出发的连续轨道 b_t 将称为 G 中的漂移. 设 d 为 G 的维数. G 上的协方差矩阵函数 $A(t)$ 为任意 $d \times d$ 对称矩阵值函数, 满足 $A(0) = 0$ (零矩阵), $t \mapsto A(t)$ 连续且 $\forall s < t$, $A(t) - A(s)$ 非负定. G 上的一族 Lévy 测度 (定义见第 3 节) $\eta(t, \cdot)$, $t \in \mathbb{R}_+$, 称 Lévy 测度函数, 若其上升, 即 $\forall s < t$ 和 $B \in \mathcal{B}(G)$, $\eta(s, B) \leq \eta(t, B)$, 且连续, 即若对某 $u > s$, $\eta(u, B) < \infty$, 则当 $t \rightarrow s$ 时, $\eta(t, B) \rightarrow \eta(s, B)$.

令 $\{\xi_1, \dots, \xi_d\}$ 为 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基, $\phi_1, \dots, \phi_d$ 为相关的指数坐标函数 (定义见第 3 节). 以下定理为 Feinsilver^[6] 的鞅表示 (其中 (5.4) 的证明可参见文献 [9]).

定理 5.2 设 x_t 为 G 中的随机连续的非齐性 Lévy 过程, $x_0 = e$, 则存在唯一的漂移 b_t , 协方差

矩阵函数 $A(t)$ 和 Lévy 测度函数 $\eta(t, \cdot)$, 使得 $x_t = z_t b_t$ 且对所有 $f \in C_c^\infty(G)$, 有

$$\begin{aligned} f(z_t) - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \int_0^t [\text{Ad}(b_s)\xi_j][\text{Ad}(b_s)\xi_k] f(z_s) dA_{jk}(s) \\ - \int_0^t \int_G \left\{ f(z_s b_s y b_s^{-1}) - f(z_s) - \sum_{i=1}^d \phi_i(y) [\text{Ad}(b_s)\xi_i] f(z_s) \right\} \eta(ds, dy) \end{aligned} \quad (5.3)$$

为 $\{\mathcal{F}_t^x\}$ -鞅. 反之, 任给如上的 (b, A, η) , 则有在分布意义下唯一的 G 中的右连左极过程 $x_t = z_t b_t$, $x_0 = e$, 使得对所有 $f \in C_c^\infty(G)$, (5.3) 为 $\{\mathcal{F}_t^x\}$ -鞅. 此时, x_t 为非齐性 Lévy 过程, 满足

$$\forall t > 0, \quad B \in \mathcal{B}(G), \quad \eta(t, B) = \mathbb{E}[\#\{t > 0; x_t^{-1} x_t \in B, x_t^{-1} x_t \neq e\}]. \quad (5.4)$$

从而, 由 $\eta(t, \cdot)$ 的连续性可知 x_t 为随机连续, 并且 x_t 连续的充要条件是 $\eta(t, \cdot) = 0$.

注 5.1 定理 5.2 的鞅表示不是直接对过程 x_t 给出, 而是通过 $z_t = x_t b_t^{-1}$. 这是因为一般非齐性 Lévy 过程 x_t 不是半鞅, 而 z_t 总是半鞅, 即对任 $f \in C_c^\infty(G)$, $f(z_t)$ 是实值半鞅. 这与 $\mathbb{R}^n$ 中可加过程的情形是一致的. 可以证明, x_t 为半鞅的充要条件是, 其漂移 b_t 为有限变差, 即对任 $f \in C_c^\infty(G)$, $f(b_t)$ 为实值有限变差函数. 当 b_t 为有限变差时, x_t 有直接的鞅表示, 参见文献 [26]. 这里叙述一下这个结果的形式. 设漂移 b_t 为有限变差, 则有唯一的一族实值的有限变差连续函数 $b_1(t), \dots, b_d(t)$, $b_i(0) = 0$, 对所有 $f \in C_c^\infty(G)$, 满足 $f(b_t) = f(e) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \xi_i f(b_s) db_i(s)$. 现设 x_t 为 G 中的右连左极过程. 任给如定理 5.2 中的 (b, A, η) , 其中 b_t 为有限变差, 则对任 $f \in C_c^\infty(G)$, (5.3) 是 $\{\mathcal{F}_t^x\}$ -鞅的充要条件是, 对任意 $f \in C_c^\infty(G)$, 有

$$\begin{aligned} f(x_t) - \sum_{i=1}^d \int_0^t \xi_i f(x_s) db_i(s) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \xi_i \xi_j f(x_s) dA_{ij}(s) \\ - \int_0^t \int_G \left\{ f(x_s y) - f(x_s) - \sum_{i=1}^d \phi_i(y) \xi_i f(x_s) \right\} \eta(ds, dy) \end{aligned} \quad (5.5)$$

是 $\{\mathcal{F}_t^x\}$ -鞅.

由定理 5.2 知, 从 e 点出发的随机连续的非齐性 Lévy 过程的分布完全由 (b, A, η) 决定. 将称 (b, A, η) 为 Lévy 过程 x_t 的三参数表示. 对非随机连续的非齐性 Lévy 过程, 这样的三参数表示依然成立, 只是漂移 b_t 和 Lévy 测度函数 $\eta(t, \cdot)$ 的定义, 以及 (5.3), 需要适当推广, 参见文献 [26].

现考虑齐性空间 $X = G/K$ (K 紧) 的情形. 如在第 4.2 小节, 选择 X 在 $o = eK$ 点处切空间 $T_o X$ 上的一组基及相关的指数坐标函数、 X 上的漂移 b_t 、协方差矩阵函数 $A(t)$ 和 Lévy 测度函数 $\eta(t, \cdot)$ 的定义与 G 上一样, 但要求 b_t 和 $\eta(t, \cdot)$ 为 K -不变, 而 $A(t)$ 为 $\text{Ad}(K)$ -不变, 即对所有 $k \in K$, 有 $kb_t = b_t$, $k\eta(t, \cdot) = \eta(t, \cdot)$ 和 $A_{ij}(t) = \sum_{p,q} A_{pq}(t) [\text{Ad}(k)]_{ip} [\text{Ad}(k)]_{jq}$, 这里 $[\text{Ad}(k)]_{ip}$ 为第 4.2 小节中定义的映射 $\text{Ad}(k): \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ 的表示矩阵. X 上的非齐性 Lévy 过程的鞅表示具有与 G 上相同的形式, 即定理 5.2 在 X 上也成立, 但 (5.3) 中的运算应作适当解释. 从而, X 中从 $o = eK$ 点出发的非齐性 Lévy 过程 x_t 的分布完全由三参数 (b, A, η) 确定, 参见文献 [26]. 这里只对不可约情形作进一步讨论.

不可约的齐性空间 $X = G/K$ 已在第 4.2 小节中定义. 在原点 $o = eK$ 附近 K -不变的点 x 可写为 $x = e^\xi$, 这里 $\xi \in \mathfrak{p}$ 为 $\text{Ad}(K)$ -不变. 若 $\dim(X) > 1$, 则由 X 的不可约性可知 $\xi = 0$, 从而 $x = o$. 这意味着任漂移 b_t 必是平凡的, 即 $\forall t > 0$, 有 $b_t = o$. 由第 4.2 小节中讨论可知, 在不可约的 X 上, $A(t)$ 可写为 $A(t) = a(t)I$, 这里 $a(t) \geq 0$ 为连续非降函数, $a(0) = 0$, I 为单位矩阵, 而 $\mathfrak{p}$ 的基选择为在某

$\text{Ad}(K)$ - 不变的内积下正交规范. 由于 $b_t = o$, 因此, (5.3) 中最后一项可写为比较简单的主值意义的积分: $\int_0^t \int_X [f(x_s y) - f(x_s)] \eta(ds, dy) = \lim_{U \downarrow \{o\}} \int_{U^c} [f(x_s y) - f(x_s)] \eta(ds, dy)$ (U 为 K - 不变的 o 点的邻域). 综上所述, 我们得以下定理.

定理 5.3 设 $X = G/K$ 为不可约, $\dim(X) > 1$, 并且 $\mathfrak{p}$ 的基 $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ 选择如上. 若 x_t 为 X 中的随机连续的非齐性 Lévy 过程, $x_0 = o$, 则有唯一的连续非降函数 $a(t) \geq 0$ 和 $a(0) = 0$, 以及 X 上的 Lévy 测度函数 $\eta(t, \cdot)$, 使得对所有 $f \in C_c^\infty(X)$, 有

$$f(x_t) - \int_0^t \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \xi_j \xi_j f(x_s) da(s) - \int_0^t \int_X [f(x_s y) - f(x_s)] \eta(ds, dy) \quad (5.6)$$

为 $\{\mathcal{F}_t^x\}$ - 鞅 (以上 η - 积分为主值意义的积分). 反之, 任给如上 (a, η) , 则 X 中有分布意义下唯一的右连左极过程 x_t ($x_0 = o$) 有以上鞅表示. 此时, x_t 必是随机连续的非齐性 Lévy 过程.

6 Markov 过程的分解

设 Lie 群 G 作用于流形 X , 并设该作用不可迁, 则任两 G - 轨道 Gx 和 Gy 或重合或不相交, 且 X 为所有 G - 轨道的并. 此时, 在一定条件下, X 中的 G - 不变的 Markov 过程可分解为一横截 G - 轨道的分量和一沿 G - 轨道的分量, 前者保持 Markov 性而后者保持 G - 不变性.

设 Y 为 X 的子流形, 与任意 G - 轨道相交且仅相交一点, 称 Y 为 X 的 (在 G - 作用下的) 横截子空间. 对任意 $y \in Y$, 令 $G_y = \{g \in G; gy = y\}$, 称 G 在 y 点处的迷向子群 (isotropy subgroup), 则 G_y 为 G 的闭子群, 固定点 y . 现设所有 G_y ($y \in Y$) 相同且紧, 记为 K . 在一定情况下, 当横截子空间 Y 适当选择时, 该假设成立. 例如, 考虑 X 为 $\mathbb{R}^d$ 除去原点, 正交群 $O(d)$ 的轨道为关于原点的同心圆. 任意从原点出发的曲线, 若与每个同心圆相交一点, 则为横截子空间. 若该曲线取作由原点出发的射线, 则其上所有点 y 有相同的迷向子群 $G_y = O(d-1)$. 我们将在例 6.2 后对该假设的合理性做进一步说明.

令 $Z = G/K$, 则 Z 与任 G - 轨道 Gy ($y \in Y$) 可微同胚. 定义映射 $F: (Y \times Z) \rightarrow X$ 为 $F(y, z) = gy$, $z = gK$. 易见该定义有效, F 为 $Y \times Z$ 到 X 的 1-1 满射. 由文献 [27, 第 II 章引理 3.3] 可证, 若 X 在任意 $y \in Y$ 处的切空间为 Y 的切空间与 G_y 的切空间的直和, 即

$$\forall y \in Y, \quad T_y X = T_y(Gy) \oplus T_y Y \quad (\text{直和}), \quad (6.1)$$

则 F 为可微同胚.

我们将设 F 为可微同胚. 对记号做一小修正, 我们的基本假设可叙述如下: $X = Y \times Z$ 为流形的直积, $Z = G/K$, G 为 Lie 群, K 为 G 的紧子群. G 在 $Z = G/K$ 上的自然作用直接延伸为在 X 上的作用, 即对 $(y, z) \in X$ 和 $g \in G$, $g(y, z) = (y, gz)$. 在这个框架下, $Y \times \{eK\}$ 为 G - 作用下的横截子空间, 其上所有点的迷向子群为 K . 令

$$J_1: X \rightarrow Y, \quad J_2: X \rightarrow Z \quad (6.2)$$

分别为 X 到 Y 和 Z 的自然投影. 令 $\pi: G \rightarrow Z$ 为自然投影, e 为 G 的单位元, $o = \pi(e)$.

设 x_t 为 X 中右连左极的 G - 不变的 Markov 过程, 以 P_t 为转移半群. 令 $y_t = J_1(x_t)$ 和 $z_t = J_2(x_t)$, 分别称为过程 x_t 的径分量和角分量. 由 G - 不变性可知, 对所有 $f \in \mathcal{B}_+(Y)$, $y \in Y$ 和 $z \in Z$, 有 $P_t(f \circ J_1)(y, z) = P_t(f \circ J_1)(y, o)$.

命题 6.1 径分量 $y_t = J_1(x_t)$ 为 Y 中右连左极的 Markov 过程, 其转移半群 Q_t 由下式给出:

$$Q_t f(y) = P_t(f \circ J_1)(y, o), \quad y \in Y \quad \text{和} \quad f \in \mathcal{B}_+(Y). \quad (6.3)$$

当 G 紧时, 若 x_t 为 X 中的 Feller 过程, 则 y_t 为 Y 中的 Feller 过程.

证明 设 $f \in \mathcal{B}_+(X/G)$ 和 $y \in Y$, 则

$$E[f \circ J_1(x_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t^x] = P_s(f \circ J_1)(x_t) = Q_s f(J_1(x_t)).$$

这证明 y_t 是 Y 中的 Markov 过程, 以 Q_t 为转移半群. 当 G 紧时, 若 $f \in C_0(Y)$, 则 $f \circ J_1 \in C_0(X)$ 且 $(Q_t f) \circ J_1 = P_t(f \circ J_1) \in C_0(X)$. 这意味着 $Q_t f \in C_0(Y)$. 由此, y_t 的 Feller 性可由 x_t 的 Feller 性导出. $\square$

在讨论角分量 z_t 前, 先看两个例子.

例 6.1 考虑在正交群 $G = O(d)$ 作用下的 Euclid 空间 $X = \mathbb{R}^d$ ($d > 1$). $O(n)$ - 轨道为关于原点的同心圆, 包括原点, 而任从原点出发的半直线 Y 为横截子空间. 除原点外, 该半直线上所有点有相同的迷向子群 $K = O(d-1)$.

若令 X' 为 $\mathbb{R}^d$ 除去原点, Y' 为 Y 除去原点, 并令 $Z = O(d)/O(d-1)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球面, 则 Y' 上所有点有相同的迷向子群 $K = O(d-1)$, 且 X' 与 $Y' \times Z$ 可微同胚. 我们的假设在 X' 上成立. 显然, X' 中的点分解为径分量和角分量就是 $\mathbb{R}^n$ 上通常的球极坐标分解.

例 6.2 令 X 为所有 $n \times n$ 实对称矩阵全体 ($n > 1$). 作为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的子空间, X 具有自然的流形结构. 令 Lie 群 $G = O(n)$ 按共轭作用于 X , 即对所有 $g \in G$ 和 $x \in X$, $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$. 由于具有相同特征值的对称矩阵 $O(n)$ - 共轭, 若 Y 为所有具有非增对角线的 $n \times n$ 对角矩阵的全体, 则 Y 为横截子空间.

令 Y' 为所有 Y 中具有严格下降对角线的对角矩阵的全体, 则 Y' 中所有点有相同的迷向子群 K . 这里 K 为 $G = O(n)$ 的有限子群, 由对角矩阵组成, 其对角线元素为 ± 1 . 令 X' 为 X 中具有不同特征值的对称矩阵的全体, 则 X' 为 X 的稠密开子集, 并且在映射 $Y' \times (G/K) \rightarrow X'$, $(y, gK) \mapsto gyg^{-1}$ 下与 $Y' \times (G/K)$ 可微同胚. 我们的假设在 X' 上成立.

以上两例子中, 我们的假设在 X 上并不成立, 但在 X 的某由 G - 轨道组成的稠密开子集 X' 上成立. 这种情形其实具有相当的普遍性. 由变换群理论中的轨道主类型定理 (principle orbit type theorem)^[28], 若 G 为作用于流形 X 的紧 Lie 群, 则存在 X 的由 G - 轨道组成的稠密开子集 X' 和 G 的紧子群 K , 使得 X' 中的任意 G - 轨道上必有一点以 K 为迷向子群. 从而有可能找到过这些点的横截子空间使得我们的假设在 X' 上成立.

此时, 若 x_t 为 X 中 G - 不变的 Markov 过程, 则其在 X' 上的限制为 X' 中的 G - 不变 Markov 过程, 只是其生存时间可能有限. 我们的讨论可在 X' 上进行.

令 $D(X)$ 为 X 中的所有右连左极轨道 $\omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ 的全体. 右连左极的 Markov 过程 x_t 可看作 $D(X)$ 上的坐标过程, 即 $x_t(\omega) = \omega(t)$. 令 $\{\mathcal{F}_t^x\}$ 为其自然 σ - 代数族. 过程 x_t 的分布确定 $D(X)$ 上的一个概率测度. 当 $x_0 = x$ 时, 该测度记为 P_x . 类似地, 径过程 y_t 和角过程 z_t 可分别看作 $D(Y)$ 和 $D(Z)$ 上的坐标过程, 以 $\{\mathcal{F}_t^y\}$ 和 $\{\mathcal{F}_t^z\}$ 为自然 σ - 代数族. 对任意 $y \in Y$, 令 Q_y 为从 $y \in Y$ 出发的径过程 y_t 在 $D(Y)$ 上的分布. 前面 J_1 和 J_2 已用来记 X 到 Y 和 Z 的投影, 为简单起见, 我们将还用 J_1 和 J_2 来记 $D(X)$ 到 $D(Y)$ 和 $D(Z)$ 的投影, 即

$$J_1: D(X) \rightarrow D(Y), \quad x(\cdot) \mapsto y(\cdot) \quad \text{和} \quad J_2: D(X) \rightarrow D(Z), \quad x(\cdot) \mapsto z(\cdot),$$

这里 $x(\cdot) = (y(\cdot), z(\cdot))$. 若 $y = J_1(x)$, 则 $Q_y = J_1 P_x$.

一测度空间 S 称 Borel 空间, 若它与 $[0, 1]$ 的某 Borel 子集 B 可测同构, 即存在从 S 到 B 的可测 1-1 满射, 其逆映射也可测. 熟知任完备可分距离空间在其 Borel σ -代数下为 Borel 空间, 并且 $D(X)$ 上可定义完备可分距离空间结构, 其 Borel σ -代数就是 $\mathcal{F}_\infty^x$, 参见文献 [21, 附录 A1 和 A2]. 从而, $D(X)$ 在 $\mathcal{F}_\infty^x$ 下为 Borel 空间.

设 P 为 Borel 空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ -代数, 则存在从 $(\Omega, \mathcal{G})$ 到 $(\Omega, \mathcal{F})$ 的概率核 $\tilde{P}^\omega$, $\omega \in \Omega$, 称 P 的在给定 $\mathcal{G}$ 的条件下的正则条件分布, 满足 $\forall F \in \mathcal{F}_+$ 和 $H \in \mathcal{G}_+$, $P(HF) = P[H\tilde{P}^\omega(F)]$, 并且对 P -几乎所有 ω , 这样的 $\tilde{P}^\omega$ 是唯一的, 参见文献 [21, 第 6 章].

固定 $x \in X$. 令 $\tilde{P}_x^\omega$ ($\omega \in D(X)$) 为 P_x 的给定 $J_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty^y)$ 的正则条件分布. 因为 $\tilde{P}_x^\omega$ 为 $J_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty^y)$ -可测, 它可看作是 $(D(Y), \mathcal{F}_\infty^y)$ 上测度值函数, 记为 $\tilde{P}_x^{y(\cdot)}$, $y(\cdot) \in D(Y)$. 固定 $x = (y, z) \in X = Y \times Z$, 则对 Q_y -几乎所有 $y(\cdot) \in D(Y)$, 有 $y(0) = y$. 令

$$R_z^{y(\cdot)} = J_2 \tilde{P}_x^{y(\cdot)}, \quad y(\cdot) \in D(Y),$$

则对所有 $F_1 \in (\mathcal{F}_\infty^y)_+$ 和 $F_2 \in (\mathcal{F}_\infty^z)_+$, 有

$$P_x(F_1 F_2) = \int_{D(Y)} F_1(y(\cdot)) R_z^{y(\cdot)}(F_2) Q_y(dy(\cdot)). \quad (6.4)$$

从而, $R_z^{y(\cdot)}$ 是在 P_x 下, 给定径过程 y_t 和角过程 z_t 的条件分布.

由以下定理, 在给定径过程 $y_t = J_1(x_t)$ 的条件分布下, 角过程 $z_t = J_2(x_t)$ 为齐性空间 $Z = G/K$ 中的非齐性 Lévy 过程. 该定理的证明参见文献 [9]. 如在第 4.2 小节, 选择 Z 在 $o = eK$ 点处切空间 $T_o Z$ 上的一组基 $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ 及相关的指数坐标函数 ϕ_i , 则由第 5 节中的讨论知, z_t 具有三参数表示 (b, A, η) .

定理 6.1 对所有 $y \in Y$, $z \in Z$ 和 Q_y -几乎所有 $y(\cdot) \in D(Y)$, $D(Z)$ 上的坐标过程 z_t 在分布 $R_z^{y(\cdot)}$ 下为非齐性 Lévy 过程, 并且, 若 (b, A, η) 为 z_t 的三参数表示, 则对所有 $s < t$, $b_s^{-1}b_t$ 、 $A(t) - A(s)$ 和 $\eta(t, \cdot) - \eta(s, \cdot)$ 为 $\mathcal{F}_{s,t}^y$ -可测, 这里 $\mathcal{F}_{s,t}^y$ 为 $D(Y)$ 上由 y_u ($s \leq u \leq t$) 生成的 σ -代数.

设 M 为 Riemann 流形, 其上的 Laplace 算子 Δ (也称 Laplace-Beltrami 算子) 可定义为

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 f(x), \quad f \in C^\infty(M), \quad x \in M,$$

这里 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 为 M 上以 x 为原点的正规坐标 (normal coordinates), 参见文献 [25, 注 14]. 该算子在任意 M 上的保距变换下不变. M 中的 Brown 运动可定义为 M 中以 $(1/2)\Delta$ 为生成算子的扩散运动. 关于流形中扩散运动的基本理论可参见文献 [23, 第 IV.5 和 IV.6 节]. 从任意 $x \in M$ 点出发的 Brown 运动 x_t 也可刻画为: 分布意义下唯一的连续过程 x_t 使得对所有 $f \in C_c^\infty(M)$,

$$f(x_t) - \int_0^t \frac{1}{2} \Delta f(x_s) ds$$

为 $\{\mathcal{F}_t^x\}$ -鞅. 以上定义是 Euclid 空间上的 Laplace 算子和 Brown 运动在 Riemann 流形上的推广.

齐性空间 G/K (K 紧) 上存在 G -不变的 Riemann 结构 (参见文献 [25, 第 2 卷第 X.3 节]). 在该结构下, Laplace 算子 Δ 和 Brown 运动都是 G -不变的. $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面 S^{n-1} 作为 $\mathbb{R}^n$ 的子流形具有自然的 Riemann 结构, 这是 S^{n-1} 作为齐性空间 $O(n)/O(n-1)$ 的 $O(n)$ -不变的 Riemann 结构. 在该结构下, S^{n-1} 中的 Brown 运动称球面 Brown 运动.

现考虑 $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$) 中的 Brown 运动 x_t . 令 X 为 $\mathbb{R}^n$ 除去原点. 由于 x_t 到达任意单点的概率为 0, 从而, x_t 可看作是 X 中的 Markov 过程, 在正交群 $G = O(n)$ 的作用下不变. 由命题 6.1 知, 其径过程 $r_t = |x_t|$ 为 $(0, \infty)$ 中的连续 Markov 过程, 通常称 Bessel 过程. 可以证明其角过程 $\theta_t = r_t/|r_t|$ 为球面 Brown 运动的一个时间变换, 即存在一个与径过程 r_t 独立的球面 Brown 运动 w_t , 使得 $\theta_t = w_{\alpha(t)}$, 这里 $\alpha(t)$ 为连续严格增过程 (时间变换过程) 满足 $\alpha(0) = 0$, 且对任意 $s < t$, $\alpha(t) - \alpha(s)$ 为 $\mathcal{F}_{s,t}^r$ 可测. 这称为 Brown 运动的斜乘积分解 (skew-product decomposition) [29]. 当 $n = 3$ 时, Galmarino [30] 将斜乘积分解推广到连续的 $O(3)$ - 不变的 Markov 过程. Liao [9] 将斜乘积分解推广到更一般的空间, 这个结果叙述如下.

定理 6.2 在定理 6.1 的条件下, 设 $Z = G/K$ 不可约且 $\dim(Z) > 1$. 若 x_t 为 X 中连续的 G - 不变的 Markov 过程, 则存在连续非降过程 $a(t)$, 满足 $a(0) = 0$, 且对任意 $s < t$, $a(t) - a(s)$ 为 $\{\mathcal{F}_{s,t}^y\}$ - 可测, 使得对任意 Z 中与径过程 y_t 独立的 Brown 运动 w_t , 过程 $x_t = (y_t, z_t)$ 与 $(y_t, w_{a(t)})$ 同分布.

证明 因为 $Z = G/K$ 不可约且 $\dim(Z) > 1$, 由第 4.2 小节中的讨论知, Z 上所有 G - 不变的无常数项的二阶线形微分算子 T 必有 (4.11) 的形式. 特别可设 Z 上的 Laplace 算子 Δ 为 $\sum_{i=1}^n \xi_i \xi_i$. 由定理 5.3 和 6.1, 以及 x_t 的连续性可知, 存在定理 6.2 中所述的过程 $a(t)$ 满足: 在给定径过程 y_t 的条件分布下, 对任意 $f \in C_c^\infty(Z)$,

$$f(z_t) - \int_0^t \frac{1}{2} \Delta f(z_s) da(s) = f(z_t) - \int_0^t \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \xi_i \xi_i f(z_s) da(s)$$

是鞅. 令 w_t 为 Z 中的 Brown 运动, 与径过程 y_t 独立, 则 $f(w_t) - \int_0^t \frac{1}{2} \Delta f(w_s) ds$ 为鞅. 给定径过程 y_t , $a(t)$ 为非随机, 从而,

$$f(w_{a(t)}) - \int_0^t \frac{1}{2} \Delta f(w_{a(s)}) da(s) = f(w_{a(t)}) - \int_0^{a(t)} \frac{1}{2} \Delta f(w_s) ds$$

为鞅. 由定理 5.3 中过程分布的唯一性可知, 在给定径过程 y_t 的条件分布下, 过程 z_t 与 $w_{a(t)}$ 同分布. 这意味着过程 (y_t, z_t) 与 $(y_t, w_{a(t)})$ 同分布. $\square$

以上定理 6.2 中的假设 $\dim(Z) > 1$ 是必要的. 我们举一个平凡的例子. 令 X 为 $\mathbb{R}^2$ 除去原点, 在 $G = O(2)$ 的作用下, 令 x_t 为绕原点的均匀转动, 即 $x_t = (r \cos t, r \sin t)$, 这里 $r > 0$ 为常数, 则 x_t 为 $O(2)$ - 不变. 其径过程 $y_t \equiv r$, 而角过程 z_t 为单位圆 $Z = S^1$ 中的均匀转动, 不可表示为 S^1 中 Brown 运动的时间变换. 非平凡的例子可参见文献 [31].

致谢 作者感谢审稿人对原文中多处笔误给予指正.

参考文献

- 1 王梓坤. 马尔可夫过程和今日数学. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1999
- 2 Applebaum D. Lévy Processes and Stochastic Calculus, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009
- 3 Bertoin J. Lévy Processes. Cambridge: Cambridge University Press, 1996
- 4 Sato K. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions (translated from 1990 Japanese original and revised by the author). Cambridge: Cambridge University Press, 1999
- 5 Hunt G A. Semi-groups of measures on Lie groups. Trans Amer Math Soc, 1956, 81: 264–293
- 6 Feinsilver P. Processes with independent increments on a Lie group. Trans Amer Math Soc, 1978, 242: 73–121
- 7 Stroock D W, Varadhan S R S. Limit theorems for random walks on Lie groups. Sankhyā, 1973, 35: 277–294
- 8 Heyer H, Pap G. Convolution hemigroups of bounded variation on a Lie projective group. J Lond Math Soc (2), 1999, 59: 369–384
- 9 Liao M. A decomposition of Markov processes via group actions. J Theoret Probab, 2009, 22: 164–185

- 10 Heyer H. Probability Measures on Locally Compact Groups. New York: Springer-Verlag, 1977
- 11 Born E. An explicit Lévy-Hinčin formula for convolution semigroups on locally compact groups. *J Theoret Probab*, 1989, 2: 325–342
- 12 Dani S G, McCrudden M. Convolution roots and embeddings of probability measures on Lie groups. *Adv Math*, 2007, 209: 198–211
- 13 Liao M. Convolution of probability measures on Lie groups and homogenous spaces. *Potential Anal*, 2015, 43: 707–715
- 14 Diaconis P. Group Representations in Probability and Statistics. Lecture Notes-Monograph Series, vol. 11. Group Representations in Probability and Statistics. Hayward: Institute of Mathematical Statistics, 1988
- 15 Heyer H. Convolution semigroups of probability measures on Gelfand pairs. *Expo Math*, 1983, 1: 3–45
- 16 Liao M. Lévy processes and Fourier analysis on compact Lie groups. *Ann Probab*, 2004, 32: 1553–1573
- 17 Liao M, Wang L. Lévy-Khinchin formula and existence of densities for convolution semigroups on symmetric spaces. *Potential Anal*, 2007, 27: 133–150
- 18 Applebaum D. Probability on Compact Lie Groups. New York: Springer, 2014
- 19 Liao M. Lévy Processes in Lie Groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- 20 Liao M, Wang L. Limiting properties of Lévy processes in symmetric spaces of noncompact type. *Stoch Dyn*, 2012, 12: 1250001
- 21 Kallenberg O. Foundations of Modern Probability, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2002
- 22 Elworthy K D. Geometric aspects of diffusions on manifolds. In: *Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XVII July 1987*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1362. New York: Springer, 1988, 276–425
- 23 Ikeda N, Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, 2nd ed. Amsterdam: North-Holland Publishing; Tokyo: Kodansha, 1989
- 24 Helgason S. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. Amsterdam: Academic Press, 1978
- 25 Kobayashi S, Nomizu K. Foundations of Differential Geometry, Vols. I; II. New York: Interscience Publishers, 1963; 1969
- 26 Liao M. Inhomogeneous Lévy processes in Lie groups and homogeneous spaces. *J Theoret Probab*, 2014, 27: 315–357
- 27 Helgason S. Groups and Geometric Analysis. Amsterdam: Academic Press, 1984
- 28 tom Dieck T. Transformation Groups. Berlin: de Gruyter, 1987
- 29 Itô K, McKean H P Jr. Diffusion Processes and Their Sample Paths, Second Printing, Corrected. New York: Springer-Verlag, 1974
- 30 Galmarino A R. Representation of an isotropic diffusion as a skew product. *Z Wahrscheinlichkeit Verw Gebiete*, 1963, 1: 359–378
- 31 Evans S N, Henning A, Wayman E. When do skew-products exist? *Electron J Probab*, 2015, 20: 1–14

Invariant Markov processes under actions of Lie groups

Ming Liao

Abstract We present a representation theory for invariant Markov processes under Lie group actions, in the spirit of the classic Lévy-Khinchin representation. We will study invariant Markov processes at three different levels of generality. First, we consider Markov processes in Lie groups that are invariant under translations, and then Markov processes in manifolds that are invariant under transitive group actions. These two types of processes are called Lévy processes, and they possess a triple representation. The third type of processes are Markov processes that are invariant under non-transitive group actions. Under certain conditions, such a process may be decomposed into a radial part, that is transversal to group orbits, and an angular part, that is along an orbit. The latter is a time inhomogeneous invariant Markov process, and may be represented by a time-dependent triple.

Keywords invariant Markov process, Lie group, homogeneous space

MSC(2010) 60B15, 60J25, 58J65

doi: 10.1360/N012017-00234