修正Rastall引力中的黑洞时空

杨树政^{1*}, 林恺^{2,3}

1. 西华师范大学物理与空间科学学院, 南充 637002;

2. 中国地质大学(武汉)地球物理与空间信息学院地球内部多尺度成像湖北省重点实验室, 武汉 430074;

3. Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de Sao Paulo, Lorena 12602-810, Brazil

*联系人, E-mail: szyangphys@126.com

收稿日期: 2018-10-29; 接受日期: 2018-12-25; 网络出版日期: 2019-04-01

国家自然科学基金(编号: 11573022, 11805166)资助项目

摘要 本文对Rastall引力理论进行了修正, 并假设能动张量在弯曲时空中满足 $\nabla_\nu T_\mu^\nu = \lambda \nabla_\mu R$ 条件, 该假设虽然与传统的Rastall引力理论的具体假设条件有所不同, 但是并不违背Rastall原有的理论思想. 通过该假设我们得到了此修正引力理论中的静态带电黑洞解. 在这个黑洞时空中, 通过选择Rastall引力参数, 可以得到 $\Lambda > 0$ 的Anti-de Sitter时空, 或者 $\Lambda < 0$ 的de Sitter时空, 甚至可以构造出没有引力常数的(Anti-)de Sitter时空. 我们具体分析了 $n=1, 2, 3$ 三种情况下的球对称黑洞解的形式, 并且通过调节 λ 得到各种不同类型的黑洞时空. 我们的结果表明: 在传统的Rastall引力理论中($n=1$ 的情况), 等效宇宙学常数的符号由 Λ 和 λ 同时决定; $n=2$ 时, 我们发现即使 $\Lambda=0$ 的情况下, 我们依然有一个(Anti-)de Sitter解, 这表明即使在Rastall理论中, (Anti-)de Sitter的真空黑洞解不一定依赖于宇宙常数存在与否, 这有助于我们去理解暗能量的性质和Anti-de Sitter/共性场论(AdS/CFT)对应机制的物理本质. 本文将对这几种时空进行具体分析.

关键词 修正Rastall引力理论, 黑洞, (Anti-)de Sitter时空

PACS: 04.62.+v, 04.70.Dy, 11.30.-j

1 引言

1972年, Rastall^[1]提出了一种可能的对广义相对论推广的理论. Rastall认为广义相对论中的等效原理过于严格, 因为我们当今的实验只能证明在平直时空中能动张量的导数为零, 我们没有理由认为在弯曲时空中也满足这一要求. 为了放宽等效原理的限制, Rastall假设能动张量并不是协变导数为零的, 而应该一般的写为

$$T_{\mu;\nu}^\nu = a_\mu, \quad (1)$$

其中, 在平直时空极限条件的要求下, 在闵可夫斯基时空中, 上式右边为0, 即在平直时空中依然满足能动张量守恒条件, 故上式中 a_μ 是一个与时空曲率相关的量. 在参考文献[1]中Rastall的选择是

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = a_\mu = \lambda \nabla_\mu R, \quad (2)$$

其中 λ 是一个常数. 因此, 在这个假设下, 带宇宙学常数

引用格式: 杨树政, 林恺. 修正Rastall引力中的黑洞时空. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 070501

Yang S Z, Lin K. Black hole spacetime in generalized Rastall gravity (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2019, 49: 070501, doi: [10.1360/SSPMA2018-00360](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00360)

的爱因斯坦场方程变成

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}R), \quad (3)$$

其中, Λ 是宇宙常数, $\kappa = 8\pi G$ 是时空和物质的耦合常数. 这个引力理论放宽了等效原理的限制, 可以用来研究当今各种引力理论难题的候选理论.

近来, 许多研究者把这个理论应用于宇宙学的研究中^[2-13]. 在 Λ CDM 的宇宙学模型的研究中, 人们发现, Rastall 参数可以修正塌缩区域内的密度参数, 并修正物质密度谱的非线性项和宇宙扰动的转化函数^[2]. 人们也对这个引力中的各种暗能量进行了研究^[3,4], 甚至有研究表明 Rastall 理论在某些条件下可以得到稳定的爱因斯坦静态宇宙模型^[5]. 另一方面, 人们也研究了 Rastall 引力下的各种形式的时空解, 包括静态带电球对称黑洞^[14,15]、Gaussian 黑洞^[16,17]、高维黑洞^[18,19]、虫洞^[20]、旋转黑洞^[21]、理想流体的星体^[22]、中子星^[23]、Godel-type 黑洞^[24]、阿贝尔-黑格斯弦解^[25]和黑膜解^[26]等, 也有工作对这些黑洞的热力学性质进行了研究^[19,27]. 除此之外, 人们也深入研究了 Rastall 引力中相关物理性质的问题^[28-31], 并把 Rastall 引力联合 Brans-Dircke 理论进行讨论^[32-34].

在这篇文章中, 我们将进一步把(1)式中能动张量协变导数的形式推广到 R 的幂指数形式, 即

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = \lambda \nabla_\mu R^n, \quad (4)$$

因此引力场方程变成

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}R^n), \quad (5)$$

这里的 n 是一个待定系数, 但是为了满足在平直时空中能动张量协变导数为零的物理条件, 我们必须要求 $n \geq 0$. 很显然, 当 $n=0$ 时, 在上式中的 Rastall 修正项将与宇宙常数项一致, 所以我们这里直接要求 $n>0$. 当 $n=1$ 时, 这个理论退回到 Rastall 引力理论.

在下一节中, 我们将具体选择 $n=2$ 和 $n=3$ 的情况来研究带电的静态黑洞解, 我们发现这个理论将修正黑洞的宇宙常数项, 使得我们得到不同的 de Sitter 或者 Anti-de Sitter 时空. 随后, 在第 3 节中, 我们研究宇宙常数 Λ , Rastall 项参数因子 λ 与 (Anti-)de Sitter 黑洞时空之间的具体关系. 第 4 节包括一些结论和讨论.

2 修正 Rastall 引力中静态黑洞解

本文研究四维球对称静态黑洞时空, 其度规有如下形式:

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (6)$$

由黑洞无毛定理, 我们知道静态黑洞有质量和电荷两个参数, 因此我们这里考虑物质场仅包括电磁场的情形. 因为时空是静态的, 并且假设电荷相对于黑洞静止, 因此这个黑洞时空的电磁场也是静电场. 我们可以把电势取为 $A_\mu = \delta_\mu^t A_t(r)$. 现在, 让我们首先回顾在 Rastall 引力中的情况, 相当于公式(4)和(5)中 $n=1$ 的情况. 在这种情况下, 把度规形式(6)和电势带入引力场方程和 Maxwell 方程, 我们可以得到

$$A_t(r) = \frac{Q}{r}, \quad (7)$$

$$h(r) = f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3-12\lambda}r^2.$$

可见, 源于 Rastall 引力的修正项已经可以对引力常数进行修正了. 尽管如此, 我们总是可以令

$$\Lambda_1^{\text{eff}} = \frac{\Lambda}{3-12\lambda} \quad (8)$$

为有效宇宙学常数, 把 Rastall 引力中的黑洞时空解(7)化为标准的广义相对论下的 (Anti-)de Sitter 黑洞时空解的形式.

接下来, 我们考虑在(3)式中, $n=2$ 的情况. 在这种情况下, 我们将得到两个解, 如果用标准的 (Anti-)de Sitter 黑洞时空解的形式, 可以写为

$$A_t(r) = \frac{Q}{r}, \quad (9)$$

$$h(r) = f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \Lambda_2^{\text{eff}}r^2,$$

其中, 有效宇宙学常数是

$$\Lambda_2^{\text{eff}} = -\frac{1 \pm \sqrt{1-64\lambda\Lambda}}{96\lambda}. \quad (10)$$

而对于 $n=3$ 的情况, 方程将给出三个解, 但是这三个解只有一个解会落在实轴上, 因此有物理意义的解只有一个, 其结果是

$$A_t(r) = \frac{Q}{r}, \quad (11)$$

$$h(r) = f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \Lambda_3^{\text{eff}}r^2.$$

这种情况下的有效宇宙学常数是

$$\Lambda_3^{\text{eff}} = -\frac{3^{\frac{1}{3}}\lambda + \left(\sqrt{3\lambda^3(431\lambda\Lambda^2 - 1)} - 36\lambda^2\Lambda\right)^{\frac{2}{3}}}{24 \times 3^{\frac{2}{3}}\lambda \left(\sqrt{3\lambda^3(431\lambda\Lambda^2 - 1)} - 36\lambda^2\Lambda\right)^{\frac{1}{3}}}. \quad (12)$$

从上面三种情况可知, 尽管黑洞都具有(Anti-)de Sitter时空度规的形式, 但是由于宇宙常数 Λ 和Rastall项参数因子 λ 选择的不同, 我们可以得到不同的有效宇宙学常数 Λ_n^{eff} ($n=1, 2, 3$), 尤其是有效宇宙学常数的符号将决定黑洞时空在渐近无穷远处的性质. 在下一节中, 我们将具体讨论修正Rastall引力中宇宙学常数 Λ 以及Rastall项参数因子 λ 与(Anti-)de Sitter时空的性质.

3 de Sitter时空和Anti-de Sitter时空与宇宙常数的关系

从上一节的结论中, 我们发现有效宇宙学常数 Λ_n^{eff} ($n=1, 2, 3$)一般由真实的引力常数 Λ 和Rastall项的耦合参数 λ 组成. 这为 Λ_n^{eff} 具体值的确定提供了一些自由度.

当 $n=1$ 时, 我们发现 Λ 为零时, 等效宇宙学常数 Λ_1^{eff} 也为零. 但是, 当 Λ 不为零时, 由于 λ 的取值缘故, Λ 与 Λ_1^{eff} 的符号也不一定相同. 具体说来, 当 $\lambda < 1/4$ 时, Λ 与 Λ_1^{eff} 的符号相同, 因此对于 $\Lambda > 0$ 的情况, 黑洞对应着de Sitter时空背景; 而对于 $\Lambda < 0$ 则对应着Anti-de Sitter时空背景. 然而, 当 $\lambda > 1/4$ 时, Λ 与 Λ_1^{eff} 的符号相反, 于是 $\Lambda > 0$ 对应着Anti-de Sitter时空背景, 而 $\Lambda < 0$ 对应着de Sitter时空背景. 值得注意的是, 在这种情况下 $\lambda \neq 1/4$, 否则度规将出现奇异.

进一步地, 当 $n=2$ 时, Λ_2^{eff} 对应两个可能的值, 其区别在于(10)式右边分子上的正负号. 因此我们可以分成两种情况进行讨论:

(1) (10)式中取正号的情况. $\Lambda_2^{\text{eff}} > 0$ 的条件要求: $\Lambda < 0$ 且 $0 > \lambda \geq \frac{1}{64\Lambda}$, 或 $\Lambda > 0$ 且 $\lambda < 0$; $\Lambda_2^{\text{eff}} < 0$ 的条件要求: $\Lambda > 0$ 且 $0 < \lambda \leq \frac{1}{64\Lambda}$, 或 $\Lambda \leq 0$ 且 $\lambda > 0$.

(2) (10)式中取负号的情况. $\Lambda_2^{\text{eff}} > 0$ 的条件要求:

$\Lambda < 0$ 且 $0 > \lambda \geq \frac{1}{64\Lambda}$, 或 $\lambda > 0$; $\Lambda_2^{\text{eff}} < 0$ 的条件要求: $\Lambda > 0$ 且 $0 < \lambda \leq \frac{1}{64\Lambda}$, 或 $\lambda < 0$.

另一个非常有趣的事实是, $n=2$ 的黑洞时空解虽然是(Anti-)de Sitter时空解, 但是并不一定需要宇宙常数的存在, 即当 $\Lambda = 0$ 时, 该黑洞时空依然有可能是(Anti-)de Sitter时空. 这时 $\Lambda_2^{\text{eff}} = \frac{1 \pm 1}{96\lambda}$. 在前式中, 分子取负号会导致有效宇宙学常数消失. 但是当其分子取正号的时候, 有效宇宙学常数 Λ_2^{eff} 在宇宙学常数 Λ 为零的情况下依然存在, 而其符号正好与 λ 的符号相反. 这意味着, 即使没有宇宙常数, 修正的Rastall引力中依然可能存在de Sitter或者Anti-de Sitter解.

最后, 我们关注 $n=3$ 的情况. 由(12)式我们发现, 尽管在这种情况下只有一个解, 但是很难直观的看出 λ , Λ 以及 Λ_3^{eff} 的关系, 所以可以把它们之间的关系展示在图1中. 很明显, 当 $\Lambda > 0$ 时, Λ_3^{eff} 和 λ 的曲线出现在一、三象限, 而当 $\Lambda < 0$ 时, Λ_3^{eff} 和 λ 的曲线出现在二、四象限.

4 结论

本文通过对Rastall理论进行推广之后, 得到了修正的带静电荷的静态(Anti-)de Sitter黑洞解. 在这个解中, 我们可能通过调节 λ 的值使得有效宇宙学常数 Λ_n^{eff} 偏离宇宙学常数 Λ 的值, 甚至可能使 Λ_n^{eff} 与 Λ 反号. 我们分析了 $n=1, 2, 3$ 三种情况的 λ , Λ 与 Λ_n^{eff} 的关系. 最有趣

图1 (网络版彩图) Λ_3^{eff} 与不同的 λ 以及 Λ 的关系. 其中蓝线、红线、黑线和橙线分别表示 $\Lambda=-5$, $\Lambda=-1$, $\Lambda=1$ 和 $\Lambda=5$ 的情形

Figure 1 (Color online) The relation between Λ_3^{eff} , λ and Λ . $\Lambda=-5$ (blue line); $\Lambda=-1$ (red line); $\Lambda=1$ (black line); $\Lambda=5$ (orange line).

的是, 当 $n=2$ 时, 有可能通过选择 λ 使得在 Λ 为零的情况下 Λ_2^{eff} 依旧不为零, 从而实现没有宇宙学常数的(Anti-) de Sitter黑洞时空.

在Rastall设想中, (1)式中的 a_μ 是一个与弯曲时空相联系的物理量, 只需要满足在平直时空 $a_\mu = 0$ 的条件即可. 这个条件将大大放宽广义相对论的约束条件, 有可能为将来解决暗能量和暗物质问题提供一个新的线索. 满足上述条件的物理量有很多种形式, 仅仅考虑 a_μ 的形式是某种与时空曲率相关的标量求导, 即认为 $a_\mu = F(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}, \dots; TR, R_{\mu\nu}T^{\mu\nu}, \dots)$, 这已经是随意度很高的形式了. 为了简单起见, 对于Rastall

的修正, 一个可能的推广形式是

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = \lambda \nabla_\mu F(R). \quad (13)$$

其对应的引力场方程变成

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}F(R)), \quad (14)$$

这里 $F(R)$ 是曲率标量 R 的任意函数. 这个理论不同于 $f(R)$ 引力, 因为在 $f(R)$ 引力中作用量是标曲率 R 的任意函数. 而这里只是通过修正等效原理, 让能动张量的协变导数拥有正比于 $\nabla_\mu F(R)$ 的形式. 我们在未来将对这种修正的Rastall引力进行深入研究.

参考文献

- 1 Rastall P. Generalization of the einstein theory. *Phys Rev D*, 1972, 6: 3357
- 2 Fabris J C, Piattella O F, Rodrigues D C, et al. Rastall cosmology. *Int J Mod Phys Conf Ser*, 2012, 18: 67–76, arXiv: [1205.1198](#)
- 3 Capone M, Cardone V F, Ruggiero M L. The possibility of an accelerating cosmology in Rastall's theory. *J Phys-Conf Ser*, 2010, 222: 012012
- 4 Bronnikov K A, Fabris J C, Piattella O F, et al. Duality between k-essence and Rastall gravity. *Eur Phys J C*, 2017, 77: 409, arXiv: [1701.06662](#)
- 5 Darabi F, Atazadeh K, Heydarzade Y. Einstein static universe in the Rastall theory of gravity. *Eur Phys J Plus*, 2018, 133: 249, arXiv: [1710.10429](#)
- 6 Batista C E M, Daouda M H, Fabris J C, et al. Rastall cosmology and the Λ CDM model. *Phys Rev D*, 2012, 85: 084008
- 7 Yuan F F, Huang P. Emergent cosmic space in Rastall theory. *Class Quantum Grav*, 2017, 34: 077001, arXiv: [1607.04383](#)
- 8 Fabris J C, Daouda M H, Piattella O F. Note on the evolution of the gravitational potential in Rastall scalar field theories. *Phys Lett B*, 2012, 711: 232–237, arXiv: [1109.2096](#)
- 9 Batista C E M, Fabris J C, Piattella O F, et al. Observational constraints on Rastall's cosmology. *Eur Phys J C*, 2013, 73: 2425, arXiv: [1208.6327](#)
- 10 Capone M, Cardone V F, Ruggiero M L. Cardassian-like model from Rastall's theory. *AIP Conf Proc*, 2010, 1241: 534
- 11 Fabris J C, Piattella O F, Rodrigues D C. Rastall's cosmology and its observational constraints. *AIP Conf Proc*, 2015, 1647: 50
- 12 Moradpour H, Heydarzade Y, Darabi F, et al. A generalization to the Rastall theory and cosmic eras. *Eur Phys J C*, 2017, 77: 259, arXiv: [1704.02458](#)
- 13 Moradpour H. Thermodynamics of flat FLRW universe in Rastall theory. *Phys Lett B*, 2016, 757: 187–191, arXiv: [1601.04529](#)
- 14 Heydarzade Y, Moradpour H, Darabi F. Black hole solutions in Rastall theory. *Can J Phys*, 2017, 95: 1253–1256, arXiv: [1610.03881](#)
- 15 Bronnikov K A, Fabris J C, Piattella O F, et al. Static, spherically symmetric solutions with a scalar field in Rastall gravity. *Gen Relativ Gravit*, 2016, 48: 162, arXiv: [1606.06242](#)
- 16 Spallucci E, Smailagic A. Gaussian black holes in Rastall gravity. *Inter J Mod Phys D*, 2018, 27: 1850003
- 17 Ma M-S, Zhao R. Noncommutative geometry inspired black holes in Rastall gravity. *Eur Phys J C*, 2017, 77: 629
- 18 Moraes G J P, Lobo I P. Scalar QNMs for higher dimensional black holes surrounded by quintessence in Rastall gravity. *Eur Phys J C*, 2018, 78: 101
- 19 Lin K, Liu Y Q, Qian W-L. Higher dimensional charged black holes in Rastall gravity. arXiv: [1809.10075](#)
- 20 Moradpour H, Sadeghnezhad N, Hendi S H. Traversable asymptotically flat wormholes in Rastall gravity. *Can J Phys*, 2017, 95: 1257–1266, arXiv: [1606.00846](#)
- 21 Xu Z, Hou X, Gong X, et al. Kerr-Newman-AdS black hole surrounded by perfect fluid matter in Rastall gravity. *Eur Phys J C*, 2018, 78: 513
- 22 Heydarzade Y, Darabi F. Black hole solutions surrounded by perfect fluid in Rastall theory. *Phys Lett B*, 2017, 771: 365–373, arXiv: [1702.07766](#)
- 23 Oliveira A M, Velten H E S, Fabris J C, et al. Neutron stars in Rastall gravity. *Phys Rev D*, 2015, 92: 044020, arXiv: [1506.00567](#)

- 24 Santos A F, Ulhoa S C. On Gödel-type solution in Rastall's gravity. *Mod Phys Lett A*, 2015, 30: 1550039
- 25 Bezerra de M E R, Fabris J C, Hartmann B. Abelian-Higgs strings in Rastall gravity. *Class Quantum Grav*, 2015, 32: 085009, arXiv: [1407.3849](#)
- 26 Sadeghi M. Black brane solution in Rastall AdS massive gravity and viscosity bound. arXiv: [1809.08698](#)
- 27 Lobo I P, Moradpour H, Morais Graça J P, et al. Thermodynamics of black holes in Rastall gravity. *Int J Mod Phys D*, 2018, 27: 1850069, arXiv: [1710.04612](#)
- 28 Majernik V, Richterek L. Rastall's gravity equations and Mach's principle. arxiv: gr-qc/061007
- 29 Licata I, Moradpour H, Corda C. The commutator algebra of covariant derivative as general framework for extended gravity. The Rastall theory case and the role of the torsion. *Int J Geom Methods Mod Phys*, 2017, 14: 1730003
- 30 Visser M. Rastall gravity is equivalent to Einstein gravity. *Phys Lett B*, 2018, 782: 83–86, arXiv: [1711.11500](#)
- 31 Darabi F, Moradpour H, Licata I, et al. Einstein and Rastall theories of gravitation in comparison. *Eur Phys J C*, 2018, 78: 25, arXiv: [1712.09307](#)
- 32 Caramês T R P, Daouda M H, Fabris J C, et al. The brans-dicke-rastall theory. *Eur Phys J C*, 2014, 74: 3145, arXiv: [1409.2322](#)
- 33 Salako I G, Jawad A. Bianchi type-III models with anisotropic dark energy in Brans-Dicke-Rastall theory. *Astrophys Space Sci*, 2015, 359: 46
- 34 Salako I G, Houndjo M J S, Jawad A. Generalized Mattig's relation in Brans-Dicke-Rastall gravity. *Int J Mod Phys D*, 2016, 25: 1650076, arXiv: [1605.07611](#)

Black hole spacetime in generalized Rastall gravity

YANG ShuZheng^{1*} & LIN Kai^{2,3}

¹ *Department of Astronomy, China West Normal University, Nanchong 637002, China;*

² *Hubei Subsurface Multi-scale Imaging Key Laboratory, Institute of Geophysics and Geomatics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China;*

³ *Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de Sao Paulo, Lorena 12602-810, Brazil*

This work generalizes the Rastall gravity and assumes that the energy momentum tensor satisfies the condition $\nabla_\nu T_\mu^\nu = \lambda \nabla_\mu R^n$. The condition is different from the traditional Rastall gravity, but the generalized form does not contradict the basic idea of Rastall. Therefore, we obtain the gravitational field equation in generalized Rastall gravity and calculate the static charged spherical black hole solutions. The results show that in generalized Rastall gravity, Anti-de Sitter spacetime solution with $\Lambda > 0$ and de Sitter spacetime with $\Lambda < 0$ are possible. Furthermore, we also can get the asymptotic (Anti-)de Sitter black hole solution with $\Lambda = 0$. We study the $n=1, 2, 3$ cases respectively, and get several black holes spacetimes by adjusting λ . It is found that the effective cosmological constant is determined by both Λ and λ as $n=1$ case, while as $n=2$ case, the effective cosmological constant can still exist, even if Λ vanishes. The properties can help to understand the nature of dark energy and Anti-de Sitter/Conformal Field Theory (AdS/CFT) correspondence. We will investigate several properties of the black hole solutions in this work.

generalized Rastall gravity, black holes, (Anti-)de sitter spacetimes

PACS: 04.62.+v, 04.70.Dy, 11.30.-j

doi: [10.1360/SSPMA2018-00360](#)