五次非线性 Schrödinger 方程的非横截异宿链

陈爱永^{1,2}, 邓同杰¹, 闫东风^{3*}

1. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 桂林 541004;

2. 湖南第一师范学院数学与计算科学学院, 长沙 410205;

3. 郑州大学数学与统计学院, 郑州 450001

E-mail: aiyongchen@163.com, 2722699406@qq.com, yand11@fudan.edu.cn

收稿日期: 2017-10-05; 接受日期: 2018-08-27; 网络出版日期: 2018-11-20; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671107 和 11601487) 和广西自然科学基金 (批准号: 2015GXNSFGA139004) 资助项目

摘要 非横截扩散看起来类似 Arnold 扩散, 但它不同于 Arnold 扩散, 非横截扩散可能出现在可积系统中, 而 Arnold 扩散只能出现在非可积系统中. 本文研究五次非线性 Schrödinger 方程的非横截异宿链的存在性, 基于一个约化的有限维常微分系统—Toy 模型系统, 构造了该系统的非横截异宿链, 给出了非横截异宿轨道的显式表达式.

关键词 Schrödinger 方程 KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) 理论 Arnold 扩散 异宿轨道

MSC (2010) 主题分类 37C29, 37G25, 37J40

1 引言

Hamilton 系统的全局不稳定性问题是理解动力系统全局行为的主要问题之一. 基于联系带须不变环面的横截异宿链的存在性, Arnold^[1] 构造了一个著名的例子确认了全局不稳定性的存在性 (Arnold 扩散). 自从 Poincaré 奠定现代动力系统研究的基础后, 关于动力学稳定性的研究有了突破性的进展, 特别是人们对于近可积系统的理解已较为深入. Arnold 构造的例子非常特殊, 不具通有性. Cheng 和 Yan^[2,3] 对于二自由度非自治先验不稳定 Hamilton 系统中 Arnold 扩散轨道的存在性首次在通有性条件下给出了证明. 关于 Arnold 扩散的更多内容可参见综述性文献 [4,5].

20 世纪 80 年代末, Kuksin^[6] 和 Wayne^[7] 把有限维 KAM 理论发展到无穷维, 以用于研究偏微分方程时间拟周期解的存在性. 随后, 无穷维 KAM 理论蓬勃发展, 最先应用于波方程和 Schrödinger 方程, 证明了时间拟周期解的存在性和线性稳定性, 参见文献 [8–12] 等. 其后应用于非线性项中含有空间导数的方程, 如有重要流体动力学背景的 KdV (Korteweg-de Vries) 方程和 Benjamin-Ono 方程, 以及在等离子体物理学中应用广泛的导数 Schrödinger 方程, 参见文献 [13–15] 等.

英文引用格式: Chen A Y, Deng T J, Yan D F. Non-transversal heteroclinic chain in the quintic nonlinear Schrödinger equation (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1791–1802, doi: 10.1360/N012017-00218

对于周期三次非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} -i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $x \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$, $t \in \mathbb{R}$, 且 $u : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, 因为能量守恒, 所以, 方程 (1.1) 的任何解的 H^1 范数是一致有界的.

Bourgain^[16] 提出了下面著名的猜测:

在二维或更高维数空间, 方程 (1.1) 有 H^s ($s > 1$) 范数无界增长的解吗?

在 2010 年, Colliander 等^[17] 取得了突破性进展, 他们给出了该猜测的正面回答, 确认了扩散解的存在性, 证明了解的长时间强不稳定性.

定理 1.1^[17] 令 $s > 1$, $K \gg 1$, $0 < \delta \ll 1$, 那么方程 (1.1) 存在全局光滑解 $u(t, x)$ 和时间 $T > 0$, 使得当 $\|u(0)\|_{H^s} \leq \delta$ 时,

$$\|u(T)\|_{H^s} \geq K.$$

他们首先将方程 (1.1) 约化到一个无穷维常微分 Toy 模型系统, 然后研究轨道沿非横截异宿链的扩散, 最后通过一个近似定理证明方程 (1.1) 的解的长时间不稳定性. 他们的证明借鉴了 Arnold 的构造方法, 他们也宣称他们的构造与 Arnold 扩散类似, 但不相同. 一方面, Arnold 扩散发生在近可积系统; 另一方面, Arnold 扩散需要不变流形的横截相交.

从动力系统观点, Delshams 等^[18] 分析了非横截异宿链的跟踪, 阐述了横截扩散与非横截扩散两种机制的区别, 进一步说明了文献 [17] 的结果是一种不同于 Arnold 扩散的新的扩散现象.

最近, Guardia 和 Kaloshin^[19] 利用动力系统理论推广了文献 [17] 的结果, 他们对系统的扩散行为作了更精细的分析, 给出了解的扩散时间估计.

定理 1.2^[19] 令 $s > 1$, $K \gg 1$, 那么方程 (1.1) 存在全局光滑解 $u(t, x)$ 和常数 $c > 0$, 使得对任意 $0 < T \leq K^c$, 有

$$\|u(T)\|_{H^s} \geq K \|u(0)\|_{H^s},$$

而且

$$\|u(0)\|_{L^2} \leq K^{-(s-1)c/4+2/(s-1)}.$$

利用文献 [17] 的方法, Haus 和 Procesi^[20] 研究了五次非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} -i\partial_t u + \Delta u = |u|^4 u, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{T}^2. \end{cases} \quad (1.2)$$

他们分析了方程解的 Soblev 范数增长, 证明了方程 (1.2) 的解的长时间强不稳定性.

定理 1.3^[20] 令 $s > 1$, $K \gg 1$, $0 < \delta \ll 1$, 那么五次非线性 Schrödinger 方程 (1.2) 存在全局光滑解 $u(t, x)$ 和时间 $T > 0$, 使得当 $\|u(0)\|_{H^s} \leq \delta$ 时,

$$\|u(T)\|_{H^s} \geq K.$$

我们打算基于 Guardia 和 Kaloshin 的方法, 研究方程 (1.2) 的解的扩散速度, 即给出解的扩散时间估计. 作为该研究的第一步, 本文首先证明关于方程 (1.2) 的 Toy 模型的非横截异宿链的存在性. 限于篇幅, 我们将在后续工作研究方程 (1.2) 的解的扩散速度.

2 常微分 Toy 模型系统

方程 (1.2) 是一个无穷维 Hamilton 系统, 有 Hamilton 函数

$$H = \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{3} \int_{\mathbb{T}^2} |u|^6 dx \quad (2.1)$$

和质量守恒

$$L = \int_{\mathbb{T}^2} |u|^2 dx(t) = \int_{\mathbb{T}^2} |u|^2 dx(0). \quad (2.2)$$

考虑方程 (1.2) 的解的 Fourier 级数表示

$$u(t, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} a_j(t) e^{ijx + i|j|^2 t}, \quad (2.3)$$

将 (2.3) 代入方程 (1.2), 得

$$-i\dot{a}_j = \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 \in \mathbb{Z}^2 \\ j_1 + j_2 + j_3 - j_4 - j_5 = j}} a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \bar{a}_{j_4} \bar{a}_{j_5} e^{iw_6 t}, \quad (2.4)$$

其中 $w_6 = |j_1|^2 + |j_2|^2 + |j_3|^2 - |j_4|^2 - |j_5|^2 - |j|^2$.

定义方程 (2.4) 的共振截断系统

$$-i\dot{\beta}_j = \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 \in \mathbb{Z}^2, \\ j_1 + j_2 + j_3 - j_4 - j_5 = j, \\ |j_1|^2 + |j_2|^2 + |j_3|^2 - |j_4|^2 - |j_5|^2 = |j|^2}} \beta_{j_1} \beta_{j_2} \beta_{j_3} \bar{\beta}_{j_4} \bar{\beta}_{j_5}. \quad (2.5)$$

基于文献 [17] 的结果, (2.4) 的动力能被共振截断系统 (2.5) 很好地近似. 方程 (2.5) 是无穷维 Hamilton 系统, 有 Hamilton 函数

$$H = \frac{1}{3} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6 \in \mathbb{Z}^2, \\ j_1 + j_2 + j_3 = j_4 + j_5 + j_6, \\ |j_1|^2 + |j_2|^2 + |j_3|^2 = |j_4|^2 + |j_5|^2 + |j_6|^2}} \beta_{j_1} \beta_{j_2} \beta_{j_3} \bar{\beta}_{j_4} \bar{\beta}_{j_5} \bar{\beta}_{j_6}. \quad (2.6)$$

此处对应的辛形式 $\Omega = i d\beta \wedge d\bar{\beta}$.

Haus 和 Procesi^[20] 构造了共振集 s_i , 将系统 (2.5) 限制在合适的不变子空间上, 则对于所有 $k \in s_i$, 任意 $i = 1, \dots, N$, $\beta_k = b_i$, 遵从文献 [17] 的构造, Hamilton 函数 (2.6) 被简化为

$$\begin{aligned} H = & 4 \sum_{k=1}^N |b_k|^6 - 9n \sum_{k=1}^N |b_k|^2 \left[\sum_{k=1}^N |b_k|^4 - 2 \sum_{k=1}^{N-1} (b_k^2 \bar{b}_{k+1}^2 + b_{k+1}^2 \bar{b}_k^2) \right] \\ & - 18 \sum_{k=1}^{N-1} (|b_k|^2 + |b_{k+1}|^2) (b_k^2 \bar{b}_{k+1}^2 + b_{k+1}^2 \bar{b}_k^2) \\ & + 36 \sum_{k=2}^{N-1} |b_k|^2 (b_{k-1}^2 \bar{b}_{k+1}^2 + b_{k+1}^2 \bar{b}_{k-1}^2), \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中 $n = 2^{N-1}$.

设质量

$$M_N(b_1, b_2, \dots, b_N) = \sum_{j=1}^N |b_j|^2 = 1, \quad (2.8)$$

则记

$$S_N = \{b \in \mathbb{C}^n : M_N(b) = 1\}. \quad (2.9)$$

对于任意指标集 $i \in I \subset \{1, \dots, N\}$, 子空间 $L_I = \{b = (b_1, \dots, b_N) : b_i = 0, i \notin I\}$ 是 Toy 模型系统的不变子空间. 对于任何指标 $j \in \{1, \dots, N\}$ 和子空间 L_j ,

$$T_j = L_j \cap S_N = \{b \in S_N : |b_j| = 1, b_k = 0, \forall k \neq j\}$$

是一个不变圆. T_j 由方程

$$\frac{db_j}{dt} = -3(4 - 9n)ib_j^3 \bar{b}_j^2 = -3(4 - 9n)i|b_j|^4 b_j = -3(4 - 9n)ib_j \quad (2.10)$$

所确定, 解方程 (2.10), 得

$$b_j = e^{-3(4-9n)it}, \quad (2.11)$$

所以, T_j 是一个周期轨道.

为了证明定理 1.3, Haus 和 Procesi^[20] 建立了类似文献 [17] 中的两个关键引理:

引理 2.1 (Toy 模型的不稳定性^[20]) 对于任意 $\epsilon > 0$ 和 $N > 6$, 存在时间 $T_0 > 0$ 和 Toy 模型的轨道, 使得

$$\begin{aligned} |b_3(0)| &\geq 1 - \epsilon, \quad |b_j(0)| \leq \epsilon, \quad j \neq 3, \\ |b_{N-2}(T_0)| &\geq 1 - \epsilon, \quad |b_j(T_0)| \leq \epsilon, \quad j \neq N - 2, \end{aligned}$$

此外, 对应解满足 $\|b(t)\|_{l^\infty} \sim 1, t \in [0, T_0]$.

该定理说明, 可以构造 Toy 模型的初值 $b(0) = (b_1(0), b_2(0), \dots, b_N(0))$, 使得质量集中在 $b(0)$ 的第三个元素 b_3 上, 然后对应初值问题的解, 质量从 b_3 传播到 b_4 , 从 b_4 传播到 $b_5, \dots$, 依此下去, 经过时间 T_0 后集中到 b_{N-2} . 引理 2.1 的证明极其困难, 需要对常微分系统的异宿轨道的稳定和不稳定流形作仔细的分析和估计, 这也是定理 1.3 的证明的主要部分.

定义

$$(\mathcal{N}(t)(a, b, c, d, f))_j := \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 \in \mathbb{Z}^2, \\ j_1 + j_2 + j_3 - j_4 - j_5 = j}} a_{j_1} b_{j_2} c_{j_3} \bar{d}_{j_4} \bar{f}_{j_5} e^{iw_6 t}, \quad (2.12)$$

那么, (2.4) 可写成

$$-i\dot{a}_j = (\mathcal{N}(t)(a, a, a, a, a))_j. \quad (2.13)$$

引理 2.2 (近似引理^[20]) 令 $0 < \sigma < 1$ 是一个绝对常数 (引理中的所有隐式常数依赖于 σ), 令 $B \gg 1, T \ll B^4 \log B$, 设 $g(t) := \{g_j(t)\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ ($0 \leq t \leq T$) 是方程

$$\dot{g}(t) = i(\mathcal{N}(t)(g(t), g(t), g(t), g(t), g(t))) + \mathcal{E}(t) \quad (2.14)$$

的解, 其中 $\mathcal{N}(t)$ 由 (2.12) 定义, 初值 $g(0)$ 具有紧支集. 假设解 $g(t)$ 和误差 $\mathcal{E}(t)$ 满足

$$\|g(t)\|_{l^1(\mathbb{Z}^2)} \lesssim B^{-1}, \quad \left\| \int_0^t \mathcal{E}(\tau) d\tau \right\|_{l^1(\mathbb{Z}^2)} \lesssim B^{-1}.$$

如果 $a(t)$ 是方程 (2.4) 满足初值 $a(0) = g(0)$ 的解, 那么,

$$\|a(t) - g(t)\|_{l^1(\mathbb{Z}^2)} \lesssim B^{-1-\sigma/2}, \quad t \in [0, T].$$

注意到 Toy 模型有尺度不变

$$b^{(\lambda)}(t) := \lambda^{-1} b\left(\frac{t}{\lambda^4}\right),$$

因此, 构造

$$g_j(t) = \begin{cases} b_i^{(\lambda)}(t), & j \in s_i, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

令 $\mathcal{E}(t) := \{\mathcal{E}_j(t)\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$, 其中 $\mathcal{E}_j(t)$ 为非共振部分:

$$\mathcal{E}_j(t) = - \sum_{k_i \in s_i: k_1+k_2+k_3-k_4-k_5=j} g_{k_1} g_{k_2} g_{k_3} \bar{g}_{k_4} \bar{g}_{k_5} e^{i w_6 t},$$

这里

$$w_6 = |k_1|^2 + |k_2|^2 + |k_3|^2 - |k_4|^2 - |k_5|^2 - |j|^2.$$

选择合适的 λ 和 B , 使得初值 $g(0) = a(0)$ 满足

$$\left(\sum_{j \in S} |g_j(0)|^2 |j|^{2s} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \delta.$$

进一步可以证明

$$\left(\sum_{j \in S} |g_j(\lambda^4 T_0)|^2 |j|^{2s} \right)^{\frac{1}{2}} \geq K.$$

由近似引理 2.2, 可以获得

$$\sum_{j \in S} |g_j(\lambda^4 T_0) - a_j(\lambda^4 T_0)|^2 |j|^{2s} \leq 1.$$

定理 1.3 由此得证, 详细证明参见文献 [20].

3 非横截异宿链

接下来研究周期轨道 T_j 之间的异宿连接, 为此先作辛极坐标变换:

$$b_k = \sqrt{I_k} e^{i\theta_k}, \quad \bar{b}_k = \sqrt{I_k} e^{-i\theta_k}. \quad (3.1)$$

引理 3.1 作辛极坐标变换 (3.1), 则 Hamilton 函数 (2.7) 转化为

$$H(I, \theta) = 4 \sum_{k=1}^N |I_k|^3 - 9n \sum_{k=1}^N |I_k| \left\{ \sum_{k=1}^N I_k^2 - 4 \sum_{k=1}^N [I_k I_{k+1} \cos 2(\theta_{k+1} - \theta_k)] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & -36 \sum_{k=1}^{N-1} (I_k + I_{k+1})(I_k I_{k+1} \cos 2(\theta_{k+1} - \theta_k)) \\
 & + 72 \sum_{k=2}^{N-1} I_{k-1} I_k I_{k+1} \cos 2(\theta_{k+1} - \theta_{k-1}).
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

证明 由极坐标变换, 有

$$\begin{aligned}
 db_k \wedge d\bar{b}_k &= d(\sqrt{I_k} e^{i\theta_k}) \wedge d(\sqrt{I_k} e^{-i\theta_k}) \\
 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{I_k}} e^{i\theta_k} dI_k + i\sqrt{I_k} e^{i\theta_k} d\theta_k \right) \wedge \left(\frac{1}{2\sqrt{I_k}} e^{-i\theta_k} dI_k - i\sqrt{I_k} e^{-i\theta_k} d\theta_k \right) \\
 &= -\frac{i}{2} dI_k \wedge d\theta_k + \frac{i}{2} d\theta_k \wedge dI_k \\
 &= -idI_k \wedge d\theta_k.
 \end{aligned}$$

将辛极坐标变换 (3.1) 代入 (2.7), 则

$$\begin{aligned}
 H(I, \theta) &= H(\sqrt{I_k} e^{i\theta_k}, \sqrt{I_k} e^{-i\theta_k}) \\
 &= 4 \sum_{k=1}^N |I_k|^3 - 9n \sum_{k=1}^N I_k \left\{ \sum_{k=1}^N I_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{N-1} [I_k I_{k+1} e^{2i(\theta_k - \theta_{k+1})} + I_{k+1} I_k e^{2i(\theta_{k+1} - \theta_k)}] \right\} \\
 &\quad - 18 \sum_{k=1}^{N-1} (I_k + I_{k+1})(I_k I_{k+1} e^{2i(\theta_k - \theta_{k+1})} + I_{k+1} I_k e^{2i(\theta_{k+1} - \theta_k)}) \\
 &\quad + 36 \sum_{k=2}^{N-1} I_k (I_{k-1} I_{k+1} e^{2i(\theta_{k-1} - \theta_{k+1})} + I_{k+1} I_{k-1} e^{2i(\theta_{k+1} - \theta_{k-1})}) \\
 &= 4 \sum_{k=1}^N |I_k|^3 - 9n \sum_{k=1}^N |I_k| \left\{ \sum_{k=1}^N I_k^2 - 4 \sum_{k=1}^N [I_k I_{k+1} \cos 2(\theta_{k+1} - \theta_k)] \right\} \\
 &\quad - 36 \sum_{k=1}^{N-1} (I_k + I_{k+1})(I_k I_{k+1} \cos 2(\theta_{k+1} - \theta_k)) \\
 &\quad + 72 \sum_{k=2}^{N-1} I_{k-1} I_k I_{k+1} \cos 2(\theta_{k+1} - \theta_{k-1}).
 \end{aligned}$$

证毕. □

周期轨道 J_j ($1 \leq j \leq N$) 在辛坐标 (I_j, θ_j) 下可表示为

$$T_j = \{(I, \theta) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{T}^N, I_j = 1, I_k = 0, \forall k \neq j\},$$

T_j 可以看作是 n 维环面. 因为总质量

$$M_N(b) = \sum_{k=1}^N |b_k|^2 = \sum_{k=1}^N I_k,$$

将其看作一个变量, 我们可以获得降低一个自由度的系统. 为此, 使用 Mathieu 变换^[21], 可得

$$\begin{cases} I_1 = J_1 - \sum_{j=2}^N J_j, \\ I_i = J_i, \quad i \neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_1 = \varphi_1, \\ \theta_i = \varphi_1 + \varphi_i, \quad i \neq 1, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} J_1 = \sum_{j=1}^N I_j, \\ J_i = I_i, \quad i \neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_1 = \theta_1, \\ \varphi_i = \theta_i - \theta_1, \quad i \neq 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

引理 3.2 作坐标变换 (3.3) 和 (3.4) 后, Hamilton 函数 (3.2) 转化为

$$\begin{aligned} H(J, \varphi) = & 4 \left(J_1 - \sum_{j=2}^N J_j \right)^3 + 4 \sum_{j=2}^N J_j^3 - 9nJ_1 \left[\left(J_1 - \sum_{j=2}^N J_j \right)^2 + \sum_{j=2}^N J_j^2 \right. \\ & \left. - 4 \sum_{j=2}^{N-1} J_j J_{j+1} \cos 2(\varphi_{j+1} - \varphi_j) \right] + 36J_2 \left(J_1 - \sum_{j=2}^N J_j \right) \left[(n-1)J_1 + \sum_{j=3}^N J_j \right] \cos 2\varphi_2 \\ & - 36 \sum_{j=2}^{N-1} (J_j + J_{j+1}) J_j J_{j+1} \cos 2(\varphi_{j+1} - \varphi_j) + 72J_2 J_3 \left(J_1 - \sum_{j=2}^N J_j \right) \cos 2\varphi_3 \\ & + 72 \sum_{j=3}^{N-1} J_j J_{j-1} J_{j+1} \cos 2(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

证明 将极坐标变换 (3.3) 和 (3.4) 代入 Hamilton 函数 (3.2), 则

$$\begin{aligned} H(J, \varphi) = & 4 \left(J_1 - \sum_{j=2}^N J_j \right)^3 + 4 \sum_{j=2}^N J_j^3 - 9nJ_1 \left[\left(J_1 - \sum_{j=2}^N J_j \right)^2 + \sum_{j=2}^N J_j^2 \right. \\ & \left. - 4J_2 \left(J_1 - \sum_{j=2}^N J_j \right) \cos 2\varphi_2 - 4 \sum_{j=2}^{N-1} J_j J_{j+1} \cos 2(\varphi_{j+1} - \varphi_j) \right] \\ & - 36J_2 \left(J_1 - \sum_{j=2}^N J_j \right)^2 \cos 2\varphi_2 - 36J_2^2 \left(J_1 - \sum_{j=2}^N J_j \right) \cos 2\varphi_2 \\ & - 36 \sum_{j=2}^{N-1} (J_j + J_{j+1}) J_j J_{j+1} \cos 2(\varphi_{j+1} - \varphi_j) \\ & + 72J_2 J_3 \left(J_1 - \sum_{j=2}^N J_j \right) \cos 2\varphi_3 + 72 \sum_{j=3}^{N-1} J_j J_{j-1} J_{j+1} \cos 2(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}). \end{aligned}$$

证毕. □

Hamilton 函数 (3.5) 不含 φ_1 , 因此, 作用量 J_1 是常数, 考虑到周期轨道限制在质量 $M_N(b) = 1$, 取 $J_1 = 1$. 在新的坐标系下, 周期轨道可表示为

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(J, \varphi) \in [0, 1]^{N-1} \times \mathbb{T}^N, J_k = 0, \forall k \neq 1\}, \\ T_j &= \{(J, \varphi) \in [0, 1]^{N-1} \times \mathbb{T}^N, J_j = 1, J_k = 0, \forall k \neq j\}. \end{aligned}$$

再作坐标变换

$$\begin{cases} J_j = k_j - k_{j+1}, \quad j \neq N, \\ J_N = k_N, \\ \varphi_j = \sum_{i=2}^j \psi_i, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} k_j = \sum_{i=j}^N J_i, \\ \psi_2 = \varphi_2, \\ \psi_j = \varphi_j - \varphi_{j-1}, \quad j \neq 2. \end{cases} \quad (3.7)$$

引理 3.3 作坐标变换 (3.6) 和 (3.7) 后, Hamilton 函数 (3.5) 转化为

$$\begin{aligned} H(k, \psi) = & 4 - 12k_2 + 12k_2^2 - 12 \sum_{j=2}^{N-1} k_j^2 k_{j+1} + 12 \sum_{j=2}^{N-1} k_j k_{j+1}^2 \\ & - 9n \left[1 - 2k_2 + 2k_2^2 + 2 \sum_{j=3}^N k_j^2 - 2 \sum_{j=2}^{N-1} k_j^2 k_{j+1} - 4(k_{N-1} - k_N)k_N \cos 2\psi_N \right] \\ & + 36(1 - k_2)(k_2 - k_3)(n - 1 + k_3) \cos 2\psi_2 \\ & + 36 \sum_{j=3}^{N-1} (n - k_{j-1} + k_{j+1})(k_{j-1} - k_j)(k_j - k_{j+1}) \cos 2\psi_j \\ & - 36(k_{N-1} - k_N)k_{N-1}k_N \cos 2\psi_N \\ & + 72(k_2 - k_3)(k_3 - k_4)(1 - k_2) \cos 2(\psi_2 + \psi_3) \\ & + 72 \sum_{j=3}^{N-2} (k_j - k_{j+1})(k_{j-1} - k_j)(k_{j+1} - k_{j+2}) \cos 2(\psi_j + \psi_{j+1}) \\ & + 72(k_{N-1} - k_N)(k_{N-2} - k_{N-1})k_N \cos 2(\psi_{N-1} + \psi_N). \end{aligned} \quad (3.8)$$

证明 由变换 (3.6) 和 (3.7), 有

$$\sum_{j=2}^N J_j = \sum_{j=2}^{N-1} (k_j - k_{j+1}) + k_N = k_2, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^N J_j^2 &= \sum_{j=2}^{N-1} (k_j - k_{j+1})^2 + k_N^2 = \sum_{j=2}^{N-1} (k_j^2 + k_{j+1}^2 - 2k_j k_{j+1}) + k_N^2 \\ &= k_2^2 + 2 \sum_{j=3}^N k_j^2 - 2 \sum_{j=2}^{N-1} k_j k_{j+1}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^N J_j^3 &= \sum_{j=2}^{N-1} (k_j - k_{j+1})^3 + k_N^3 = \sum_{j=2}^{N-1} (k_j^3 - 3k_j^2 k_{j+1} + 3k_j k_{j+1}^2 - k_{j+1}^3) + k_N^3 \\ &= k_2^3 - 3 \sum_{j=2}^{N-1} k_j^2 k_{j+1} + 3 \sum_{j=2}^{N-1} k_j k_{j+1}^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

将 (3.6)、(3.7) 和 (3.9)–(3.11) 代入 Hamilton 函数 (3.5), 则

$$\begin{aligned} H(k, \psi) = & 4(1 - k_2)^3 + 4k_2^3 - 12 \sum_{j=2}^{N-1} k_j^2 k_{j+1} + 12 \sum_{j=2}^{N-1} k_j k_{j+1}^2 - 9n \left[(1 - k_2)^2 + k_2^2 \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=3}^N k_j^2 - 2 \sum_{j=2}^{N-1} k_j k_{j+1} - 4 \sum_{j=2}^{N-2} (k_j - k_{j+1})(k_{j+1} - k_{j+2}) \cos 2\psi_{j+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4(k_{N-1} - k_N)k_N \cos 2\psi_N \Big] + 36(k_2 - k_3)(1 - k_2)(n - 1 + k_3) \cos 2\psi_2 \\
& - 36 \sum_{j=2}^{N-2} (k_j - k_{j+2})(k_j - k_{j+1})(k_{j+1} - k_{j+2}) \cos 2\psi_{j+1} - 36(k_{N-1} - k_N)k_{N-1}k_N \cos 2\psi_N \\
& + 72(k_2 - k_3)(k_3 - k_4)(1 - k_2) \cos 2(\psi_2 + \psi_3) \\
& + 72 \sum_{j=3}^{N-2} (k_j - k_{j+1})(k_{j-1} - k_j)(k_{j+1} - k_{j+2}) \cos 2(\psi_j + \psi_{j+1}) \\
& + 72(k_{N-1} - k_N)(k_{N-2} - k_{N-1})k_N \cos 2(\psi_{N-1} + \psi_N).
\end{aligned}$$

证毕. □

周期轨道 T_j 在新的坐标系下表示为

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(k, \psi) \in [0, 1]^{N-1} \times \mathbb{T}^{N-1} : k = 0\}, \\
A_j &= \{(k, \psi) \in [0, 1]^{N-1} \times \mathbb{T}^{N-1} : k_i = 1, \forall i \leq j; k_i = 0, \forall i > j\}.
\end{aligned}$$

令

$$P_{j-1,j} = \{(k, \psi) \in [0, 1]^{N-1} \times \mathbb{T}^{N-1} : k_i = 1, \forall i < j; k_i = 0, \forall i > j\},$$

则在子空间上的运动方程为

$$\begin{cases} \dot{k}_j = -\frac{\partial H}{\partial \psi_j} = 72(1-n)(1-k_j)k_j \sin 2\psi_j, \\ \dot{\psi}_j = \frac{\partial H}{\partial k_j} = -6(1-2k_j)[3n-2+6(n-1)\cos 2\psi_j]. \end{cases} \quad (3.12)$$

系统 (3.12) 的相图见图 1, Hamilton 函数为

$$\begin{aligned}
H(k_j, \psi_j) &= 4 - 12k_j + 12k_j^2 - 9n(1 - 2k_j + 2k_j^2) + 36(n-1)(1-k_j)k_j \cos 2\psi_j \\
&= 4 - 9n + 6(3n-2)k_j - 6(3n-2)k_j^2 + 36(n-1)(1-k_j)k_j \cos 2\psi_j \\
&= 4 - 9n + 6(3n-2)(1-k_j)k_j + 36(n-1)(1-k_j)k_j \cos 2\psi_j.
\end{aligned}$$

取子空间

$$\gamma_{j-1,j} = \left\{ (k, \psi) \in P_{j-1,j} : \psi_j = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{3n-2}{6(1-n)} \right) \right\},$$

则 k_j 沿异宿轨道从 0 增加到 1. 对于 $P_{j-1,j}$, 类似地, 取

$$\gamma_{j,j+1} = \left\{ (k, \psi) \in P_{j,j+1} : \psi_{j+1} = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{3n-2}{6(1-n)} \right) \right\}.$$

因此, 定义环面 T_j :

$$T_j = \gamma_{j-1,j} \cap \gamma_{j,j+1} = \left\{ (k, \psi) \in A_j : \psi_j = \psi_{j+1} = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{3n-2}{6(1-n)} \right) \right\}.$$

定理 3.1 环面 T_j 与 T_{j+1} 之间存在非横截相交的异宿链.

图 1 系统 (3.12) 的相图

证明 为计算方便, 考虑 T_1 与 T_2 之间的异宿连接, 其他 T_j 与 T_{j+1} 之间可类似讨论. 由 (φ_1, k_2, ψ_2) 所确立的系统为

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = 27n - 12 - 6(2 - k_2)k_2[3n - 2 + 6(n - 1)\cos 2\psi_2], \\ \dot{k}_2 = 72(1 - n)(1 - k_2)k_2 \sin 2\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -6(1 - k_2)[3n - 2 + 6(n - 1)\cos 2\psi_2]. \end{cases}$$

在子空间 $\gamma_{1,2}$ 上, 系统为

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = 27n - 12, \\ \dot{k}_2 = 12\sqrt{(9n - 8)(3n - 4)}(1 - k_2)k_2, \\ \dot{\psi}_2 = 0. \end{cases}$$

异宿轨道 $\gamma_{1,2}$ 的显式表达式为

$$\gamma_{1,2}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ k_2(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(0) + (27n - 12)t \\ \frac{1}{1 + \frac{1 - k_2(0)}{k_2(0)}e^{-12\sqrt{(9n - 8)(3n - 4)}t}} \\ \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{3n - 2}{6(1 - n)}\right) \end{pmatrix},$$

令 $\Sigma_0 = \varphi_1 = \varphi_1(0)$, 则 $\Sigma_0 \cap \gamma_{1,2}$ 上的点在流的作用下将返回到 $\Sigma_0 \cap \gamma_{1,2}$, 且所用时间为

$$t^* = \frac{2\pi}{27n - 12}.$$

定义 Poincaré 映射 $P: \Sigma_0 \cap \gamma_{1,2} \rightarrow \Sigma_0 \cap \gamma_{1,2}$, 则

$$P(k_2) = \frac{1}{1 + \frac{1 - k_2(0)}{k_2(0)}e^{-\frac{8\sqrt{(9n - 8)(3n - 4)}\pi}{9n - 4}}}.$$

显然, Poincaré 映射的正向迭代趋于 $k_2 = 1$, 负向迭代趋于 $k_2 = 0$, 所以, 两个相邻不动点的不变流形的相交是一致的, 都是非横截的, 返回到系统的流, 则周期轨道 T_1 和 T_2 由非横截异宿轨道连接, 对于 T_j 和 T_{j+1} ($j > 1$) 可以类似讨论. $\square$

4 结论

2010 年, Colliander 等^[17] 研究了三次非线性 Schrödinger 方程的全局不稳定性, 用一个 N 自由度的 Hamilton 系统—Toy 模型系统来分析三次非线性 Schrödinger 方程的动力学行为. 文献 [17] 中 Toy 模型系统的扩散是非横截的^[18]. 非横截扩散看起来类似 Arnold 扩散, 但它不同于 Arnold 扩散, 非横截扩散能出现在可积系统, 而 Arnold 扩散只能出现在非可积系统. 本文研究五次非线性 Schrödinger 方程的非横截异宿链的存在性, 基于一个约化的有限维常微分系统—Toy 模型系统, 构造了该系统的非横截异宿链, 给出了非横截异宿轨道的显式表达式. 我们的目的是研究五次非线性 Schrödinger 方程解的扩散时间估计, 这是一个困难的任务, 需要较长的篇幅才能完成. 本文是该研究课题的第一步, 关于五次非线性 Schrödinger 方程解的扩散时间估计, 将在后续工作完成.

致谢 感谢审稿人指出初稿的多处错误并提出非常有帮助的修改建议, 使本文结果得以完善.

参考文献

- 1 Arnold V I. Instability of dynamical systems with several degrees of freedom. *Soviet Math Dokl*, 1964, 5: 581–585
- 2 Cheng C Q, Yan J. Existence of diffusion orbits in a priori unstable Hamiltonian systems. *J Differential Geom*, 2004, 67: 457–517
- 3 Cheng C Q, Yan J. Arnold diffusion in Hamiltonian systems: A priori unstable case. *J Differential Geom*, 2009, 82: 229–277
- 4 Cheng C Q, Li X. Variational construction of unbounded orbits in Lagrangian systems. *Sci China Math*, 2010, 53: 617–624
- 5 程崇庆. KAM 理论与 Arnold's 扩散: Hamilton 系统的动力学稳定性问题. *中国科学 A 辑*, 2004, 34: 257–267
- 6 Kuksin S B. Nearly Integrable Infinite-Dimensional Hamiltonian System. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1556. New York: Springer-Verlag, 1993
- 7 Wayne C E. Periodic and quasi-periodic solutions of nonlinear wave equations via KAM theory. *Comm Math Phys*, 1990, 127: 479–528
- 8 Kuksin S B. *Analysis of Hamiltonian PDEs*. Oxford: Oxford University Press, 2000
- 9 Kuksin S B, Pöschel J. Invariant Cantor manifolds of quasi-periodic oscillations for a nonlinear Schrödinger equation. *Ann of Math (2)*, 1996, 143: 149–179
- 10 You J G. Perturbations of lower dimensional tori for Hamiltonian systems. *J Differential Equations*, 1999, 152: 1–29
- 11 Yuan X P. Quasi-periodic solutions of nonlinear Schrödinger equations of higher dimension. *J Differential Equations*, 2003, 195: 230–242
- 12 Yuan X P. Quasi-periodic solutions of completely resonant nonlinear wave equations. *J Differential Equations*, 2006, 230: 213–274
- 13 Kuksin S B. A KAM theorem for equations of the Korteweg-de Vries type. *Rev Math Phys*, 1998, 10: 1–64
- 14 Kappler T, Pöschel J. *KdV & KAM*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2003
- 15 Liu J J, Yuan X P. A KAM theorem for Hamiltonian partial differential equations with unbounded perturbations. *Comm Math Phys*, 2011, 307: 629–673
- 16 Bourgain J. Problems in Hamiltonian PDE's. In: *Visions in Mathematics. Modern Birkhäuser Classics*. Basel: Birkhäuser, 2000, 32–56
- 17 Colliander J, Keel M, Staffilani G, et al. Transfer of energy to high frequencies in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation. *Invent Math*, 2010, 181: 39–113
- 18 Delshams A, Simon A, Zgliczyński P. Shadowing of non-transversal heteroclinic chains. *J Differential Equations*, 2018, 264: 3619–3663

- 19 Guardia M, Kaloshin V. Growth of Sobolev norms in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation. J Eur Math Soc (JEMS), 2015, 17: 71–149
- 20 Haus E, Procesi M. Growth of Sobolev norms for the quintic NLS on T^2 . Anal PDE, 2015, 8: 883–922
- 21 Kenneth R M, Glen R H, Daniel C O. Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-body Problem, Volume 90. New York: Springer-Verlag, 1992

Non-transversal heteroclinic chain in the quintic nonlinear Schrödinger equation

Aiyong Chen, Tongjie Deng & Dongfeng Yan

Abstract Non-transversal diffusion seems similar to the Arnold diffusion, but it is a different phenomenon since it could be applied to integrable systems in contrast to the Arnold diffusion, which is a phenomenon that only takes place in non integrable systems. In this paper, the existence of the non-transversal heteroclinic chain in the quintic nonlinear Schrödinger equation is studied. Based on a finite dimensional system of ordinary differential equations, the Toy model system associated with the quintic nonlinear Schrödinger equation, we construct the non-transversal heteroclinic chain of the Toy model system. The explicit expression for the dynamics of the heteroclinic is given.

Keywords Schrödinger equation, KAM theory, Arnold diffusion, heteroclinic orbit

MSC(2010) 37C29, 37G25, 37J40

doi: 10.1360/N012017-00218