太阳帆轨迹间接优化技术收敛性分析

孙盼, 杨洪伟, 李爽*

南京航空航天大学航天学院, 南京 210016

*联系人, E-mail: lishuang@nuaa.edu.cn

收稿日期: 2018-10-12; 接受日期: 2018-12-11; 网络出版日期: 2019-06-03

国家自然科学基金(编号: 11672126)和江苏省基础 Research 计划(自然科学基金)(编号: BK20180410)资助项目

摘要 间接法是求解太阳帆航天器轨迹优化问题的一种常用方法. 然而, 间接法往往由于协态初值敏感性而存在收敛性难题. 为了改善数值求解收敛性, 协态变量归一化等多种间接优化技术已在深空探测轨迹优化研究中被提出. 但是, 对于太阳帆轨迹优化问题, 鲜有间接优化技术对收敛性影响分析. 本文以太阳帆航天器交会探测小行星为背景, 研究协态变量归一化技术、同伦技术及间接法求解中太阳帆动力学模型坐标系(直角坐标系或球坐标系)与收敛性关系. 首先, 构建基于不同间接优化技术的间接法求解模型, 采用数值打靶法求解最优的协态变量值. 然后, 根据协态变量所需猜测次数和协态变量初值估计的准确程度, 对比分析3种技术对提升优化收敛性能的作用. 仿真结果表明, 同伦法的初值估计准确度最高、收敛性也最好.

关键词 轨迹优化, 小行星, 太阳帆, 间接法, 收敛性

PACS: 02.60.Pn, 96.30.Ys, 92.60.Vb

1 引言

受小行星科学研究需求^[1]以及针对危险小行星撞击防御需求的牵引, 小行星撞击任务、采样返回任务、交会任务等一直是近些年轨道设计领域的研究热点问题之一. 太阳帆航天器由于无需推进工质的优点而在小行星探测任务轨道设计研究中受到广泛关注. 早在2005年, Dachwald和Wie^[2]就基于2004 WR近地小行星可能于2015年撞击地球的假设, 提出了利用高速太阳帆航天器来撞击小行星的任务设想. 两年后又提出利用太阳帆动能撞击器以相对速度非常高的逆行轨

道实现Apophis小行星撞击任务^[3]. 针对一些原始的近地双小行星系统^[4], 原位资源利用任务、小行星采样返回任务^[5]的概念也得到提出和可行性验证. 近些年, 利用太阳帆推进实现地球到Apophis小行星的快速交会任务^[6]和针对多个近地小行星的多次交会任务^[7,8]也不断出现. Heiligers和Scheeres^[9]还证实了太阳帆推进下单小行星系统和双小行星系统中人工拉格朗日点和周期轨道的存在, 从而实现上述系统的长期监测. 为了获得小行星精确的物理和轨道数据, 最直接的办法就是借助于最优交会轨道, 将探测器送入到绕飞小行星的轨道上^[10].

引用格式: 孙盼, 杨洪伟, 李爽. 太阳帆轨迹间接优化技术收敛性分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 084505

Sun P, Yang H W, Li S. Convergence properties analysis of the indirect optimization techniques for solar sail trajectory optimization (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2019, 49: 084505, doi: [10.1360/SSPMA2018-00351](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00351)

间接法是求解太阳帆航天器轨迹优化问题的常用方法之一. 该方法主要是通过变分法和庞特里亚金极值原理将最优控制问题转化为两点边值问题^[11]. 其优点在于优化变量少, 求解精度高且所得解满足最优性必要条件. 然而间接法存在初值敏感性难题, 即在初值猜测不准确的情况下很难得到收敛解^[12]. 为了改善间接法收敛性, 多种优化技术已在太阳帆轨迹优化领域被提出和应用. 在2010年, Gong等人^[13]就将协态变量选在单位超球面上, 通过缩放解决协态变量初值选择困难的问题. 之后Zeng等人^[14]又将归一化技术用于星际太阳帆角动量翻转逆向轨道的研究. Ma和Pan^[15]结合间接法和同伦法, 设计了基于Kustaanheimo-Stiefel变换的高性能太阳帆和低性能太阳帆时间最优转移轨道. 类似的间接优化技术在小推力轨迹优化领域也早有发展. 早在2002年, Bertrand和Epenoy^[16]就提出了平滑技术即同伦法, 实现了小推力轨迹优化能量最优问题到燃料最优问题的同伦求解. Guo等人^[17]则将伪谱法和同伦法结合起来, 解决了小推力下的燃料最优控制问题. Jiang等人^[18]又进一步提出了协态量归一化技术和开关检测技术, 大大增加了搜索到全局最优解的可能性. Yang等人^[19]结合粒子群优化算法和间接法, 设计了包含引力辅助的多小行星交会任务轨迹. Gong等人^[20]将同伦法引入到间接法中, 研究了太阳帆推进和电推进混合下的燃料最优控制问题. 最近, Sullo等人^[21]利用同伦法和数值延拓相结合的技术, 首次实现了小推力下最优控制问题到太阳帆推力下最优控制问题的转化. 此外, 太阳帆轨迹优化问题动力学模型坐标系除直角坐标系^[6]外也可采用球坐标系^[21]. Jun-kins和Taheri^[22]对比分析了8种坐标系选取结果对求解两点边值问题的影响, 结果表明, 在求解特定小推力轨迹优化问题时, 坐标系选取也会影响求解收敛性. 尽管已有多种间接优化技术, 但对于太阳帆轨迹优化却鲜有文献分析相关技术对改善收敛性的作用.

本文将以太阳帆航天器交会探测小行星Apophis任务为背景, 通过数值仿真的方法分析研究不同间接优化技术(包括协态变量归一化、坐标系选取及同伦技术)对收敛性的影响, 进而为高效优化设计小行星任务太阳帆轨迹提供基础. 此外, 本文为了分析采用同伦技术时坐标系选取的影响, 在文献^[21]的基础上推导了直角坐标系下的三维小推力到三维太阳帆推力同伦法实现的最优控制条件.

2 太阳帆最优控制模型

在理想的二体质点动力学模型下, 假设太阳帆是个理想的反射体, 给出球坐标系和直角坐标系中太阳帆航天器只在中心天体引力和航天器推进加速度下的动力学方程表达式.

(1) 球坐标系

太阳帆航天器的动力学方程^[21]如式(1)所示:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{u}{r} \\ \frac{v}{r \cos \varphi} \\ \frac{w}{r} \\ \frac{v^2 + w^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \mathbf{f}_{\text{Sa}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ \frac{vw \tan \varphi - uv}{r} + \mathbf{f}_{\text{Sa}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \frac{v^2 \tan \varphi + uw}{r} + \mathbf{f}_{\text{Sa}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x} = [r \ \theta \ \varphi \ u \ v \ w]^T$, 表示方程中的状态量, r 表示航天器到中心天体的径向距离, θ 和 φ 分别表示经度角和纬度角, $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\}$ 表示由径向、 θ 和 φ 对应的线速度方向的单位矢量构成的一组单位正交基, $\{u, v, w\}$ 分别表示航天器速度矢量在这组正交基中的分量, μ 表示太阳引力常数($\mu = 1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$), $\mathbf{f}_{\text{Sa}}$ 表示太阳帆推力下的推进加速度矢量, 具体写作:

$$\mathbf{f}_{\text{Sa}} = a_c \left(\frac{r_{\oplus}}{r} \right)^2 \cos^2 \alpha \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中, $\alpha \in [0, \pi/2]$, $\beta \in [0, 2\pi]$, a_c 表示太阳帆的特征加速度, $r_{\oplus}$ 表示地球与太阳之间的平均距离, α 和 β 分别表示帆推力方向的倾斜角和时钟角^[23]. 记 $\mathbf{n}_s = [\cos \alpha \ \sin \alpha \sin \beta \ \sin \alpha \cos \beta]^T$ 表示推力方向的单位矢量, α 表示 $\mathbf{n}_s$ 与基矢量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 间的夹角, β 表示 $\mathbf{n}_s$ 在 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 组成的平面内的投影与基矢量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 之间的夹角.

(2) 直角坐标系

太阳帆航天器的动力学方程^[24]如式(3)所示:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f}_{\text{Ra}} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

式中, $\mathbf{x} = [\mathbf{r} \ \mathbf{v}]^T$ 表示状态量, $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{v}$ 分别表示航天器在迪卡儿日心惯性系下的位置和速度矢量, r 表示航天器到中心天体的径向距离, μ 同样表示太阳引力常数, $\mathbf{f}_{\text{Ra}}$ 表

示太阳帆推力下的推进加速度, 具体写作:

$$\mathbf{f}_{\text{Ra}} = a_c \left(\frac{r_{\oplus}}{r} \right)^2 \cos^2 \alpha \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \sin \delta \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中, $\alpha \in [0, \pi/2]$, $\delta \in [0, 2\pi]$, a_c , $r_{\oplus}$, r 的定义与球坐标系相同, α 和 δ 表示帆推力方向的倾斜角和时钟角, 记 $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{h}}\}$ 为轨道坐标系中分别表示径向、轨道切向、垂直轨道面的法向的一组单位正交基, $\mathbf{n}_R = [\cos \alpha \sin \alpha \cos \delta \sin \alpha \sin \delta]^T$ 表示推力方向的单位矢量, α 表示 $\mathbf{n}_R$ 与 $\hat{\mathbf{r}}$ 间的夹角, β 表示 $\mathbf{n}_R$ 在轨道平面内的投影与轨道切向量 $\hat{\mathbf{t}}$ 间的夹角.

(3) 时间最优控制模型

对于时间最优控制问题, 构建如下的性能指标函数:

$$J = - \int_{t_0}^{t_f} dt, \quad (5)$$

式中, t_0 和 t_f 分别表示初始时刻和末端时刻, 转移时间 $t_{\text{of}} = t_f - t_0$, 在此基础上, 构建哈密顿函数 H , 推出协态量微分方程. 在小行星交会轨迹优化任务中, 末端时刻自由, 初始时刻和末端时刻对应的边界条件和横截条件如下:

$$\Psi_0 = \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0 = 0, \quad (6)$$

$$\Psi_f = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_f \\ H(t_f) + 1 - \lambda(t_f) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_f}{\partial t_f} \end{bmatrix} = 0, \quad (7)$$

式中, $\mathbf{x}_0$ 表示初始时刻出发天体的初始状态, $\mathbf{x}_f$ 表示末端时刻目标天体的末端状态.

由庞特里亚金极大值原理推得最优控制条件.

球坐标系最优控制律^[21]:

$$\tan \alpha = \frac{-3\lambda_u + \sqrt{9\lambda_u^2 + 8(\lambda_v^2 + \lambda_w^2)}}{4\sqrt{\lambda_v^2 + \lambda_w^2}}, \quad (8)$$

$$\cos \beta = \frac{\lambda_w}{\sqrt{\lambda_v^2 + \lambda_w^2}}, \quad \sin \beta = \frac{\lambda_v}{\sqrt{\lambda_v^2 + \lambda_w^2}}. \quad (9)$$

直角坐标系最优控制律^[6]:

$$\hat{\mathbf{n}}_R = \begin{cases} \frac{\sin(\tilde{\alpha} - \alpha)}{\sin \tilde{\alpha}} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} + \frac{\sin \alpha}{\sin \tilde{\alpha}} \frac{\lambda_v}{\|\lambda_v\|}, & \tilde{\alpha} \in (0, \pi), \\ \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}, & \tilde{\alpha} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

式中, $\lambda_v / \|\lambda_v\| = \cos \tilde{\alpha} \hat{\mathbf{r}} + \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\delta} \hat{\mathbf{t}} + \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\delta} \hat{\mathbf{h}}$, 且

$\tilde{\alpha} \in [0, \pi]$, $\tilde{\beta} \in [0, 2\pi]$, α 与 $\tilde{\alpha}$ 存在如下关系式:

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \tilde{\alpha} = 0, \\ \tan^{-1} \left(\frac{-3 + \sqrt{9 + 8 \tan^2 \tilde{\alpha}}}{4 \tan \tilde{\alpha}} \right), & \tilde{\alpha} \in (0, \pi/2], \\ \tan^{-1} \left(\frac{-3 - \sqrt{9 + 8 \tan^2 \tilde{\alpha}}}{4 \tan \tilde{\alpha}} \right), & \tilde{\alpha} \in (\pi/2, \pi), \\ \pi/2, & \tilde{\alpha} = \pi. \end{cases} \quad (11)$$

3 协态变量归一化技术和同伦法

(1) 协态变量归一化技术

归一化技术可以将协态变量初值的估计范围由多维无限空间缩减到半径为1的多维超球面上, 从而降低协态变量初值猜测的难度. 应用中需要引入额外的边界条件:

$$\|\lambda(t_0)\| - 1 = 0. \quad (12)$$

(2) 同伦法

引用两种动力学建模方式, 给出两种建模方式下不同的同伦函数.

球坐标系: 针对太阳帆的特征加速度值定义同伦函数^[21].

$$\mathbf{f}_{\text{Sa}} = \left[(1 - \varepsilon_1) a_{c,0} + \varepsilon_1 a_{c,f} \right] \cdot \left(\left(\frac{r_{\oplus}}{r} \right)^2 \cos^2 \alpha \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \right), \quad (13)$$

式中, ε_1 表示同伦参数, $\varepsilon_1 \in [0, 1]$, 当 $\varepsilon_1 = 0$ 时, 对应帆特征加速度值 $a_{c,0}$ 下的最优控制问题, 当 $\varepsilon_1 = 1$ 时, 对应帆特征加速度值 $a_{c,f}$ 下的最优控制问题. 同伦过程中任何解都对应着一定帆特征加速度值下的时间最优解.

直角坐标系: 针对航天器推进加速度定义同伦函数, 实现三维空间小推力到太阳帆推力的同伦转化.

$$\mathbf{f}_{\text{Ra}} = \left(a_{\text{max}} \bar{u} (1 - \varepsilon_2) + a_c \left(\frac{r_{\oplus}}{r} \right)^2 \frac{(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}_R)^2}{r^2} \varepsilon_2 \right) \hat{\mathbf{n}}_R, \quad (14)$$

式中, ε_2 表示同伦参数, $\varepsilon_2 \in [0, 1]$, 当 $\varepsilon_2 = 0$ 时, 对应小推力幅值为 a_{max} 、推力无量纲控制量为 $\bar{u}$ ($\bar{u} \in [0, 1]$) 的真实 ($\alpha \in [0, \pi]$, $\delta \in [0, 2\pi]$) 小推力加速度下的最优控制问题解; 当 $\varepsilon_2 = 1$ 时, 对应的是太阳帆特征加速度值为 a_c

的真实太阳帆推力加速度下的最优控制问题解, 此时控制量满足以下约束条件: $\alpha \in [0, \pi/2]$, $\delta \in [0, 2\pi]$.

控制变量的具体内容包括 $\{\bar{u}, \alpha, \delta\}$, 整理得到哈密顿函数仅与控制量有关的简化形式:

$$\tilde{H}(t, \mathbf{n}_R(t)) = \left(a_{\max} \bar{u} (1 - \varepsilon_2) + a_c \left(\frac{r_{\oplus}}{r} \right)^2 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_R)^2}{r^2} \varepsilon_2 \right) \cdot \mathbf{n}_R \cdot \tilde{\lambda}_v, \quad (15)$$

式中, $\tilde{\lambda}_v = \lambda_v / \|\lambda_v\| = \cos \tilde{\alpha} \hat{\mathbf{r}} + \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\delta} \hat{\mathbf{t}} + \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\delta} \hat{\mathbf{h}}$, λ_v 表示速度的协态变量.

由庞特里亚金极值原理推得的最优控制条件如下:

$$\begin{cases} \delta = \tilde{\delta}, \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha} = (A_2 + D_2) \tau^6 + 2(B_2 + 3C_2) \tau^5 \\ \quad + (A_2 - 11D_2) \tau^4 + 4(B_2 - 3C_2) \tau^3 \\ \quad - (A_2 - 11D_2) \tau^2 + 2(B_2 + 3C_2) \tau \\ \quad - (A_2 + D_2) = 0, \\ \bar{u} = \begin{cases} 1, & \text{if } (B_1 \cos \alpha + D_1 \sin \alpha + F_1 \sin \alpha) > 0, \\ 0, & \text{if } (B_1 \cos \alpha + D_1 \sin \alpha + F_1 \sin \alpha) < 0, \end{cases} \end{cases} \quad (16)$$

式中, $A_1 = \lambda_{vx} a_c (r_{\oplus}/r)^2 \varepsilon_2$, $B_1 = \lambda_{vx} a_{\max} (1 - \varepsilon_2)$, $C_1 = \lambda_{vy} a_c (r_{\oplus}/r)^2 \varepsilon_2 \cos \delta$, $D_1 = \lambda_{vy} a_{\max} (1 - \varepsilon_2) \cos \delta$, $E_1 = \lambda_{vz} a_c (r_{\oplus}/r)^2 \varepsilon_2 \sin \delta$, $F_1 = \lambda_{vz} a_{\max} (1 - \varepsilon_2) \sin \delta$, $A_2 = \bar{u} (D_1 + F_1)$, $B_2 = \bar{u} B_1$, $C_2 = A_1$, $D_2 = C_1 + E_1$, $\tau = \tan(\alpha/2)$, 即 $\alpha = 2 \tan^{-1}(\tau)$, $\alpha \in [0, \pi/2]$.

针对式(16)中的六阶多项式方程, 考虑到最优控制条件 $\bar{u}$ 的求解和 α 相关, 利用数值法求解出六阶多项式方程的所有实根, 在此基础上代入 $\bar{u} = \{0, 1\}$ 的两组可能解, 求得最大的 $\tilde{H}$ 值和与之相对应的一组 $\{\alpha, \bar{u}\}$, 完成最优控制条件的求解.

4 数值仿真和案例分析

仿真以 Apophis 小行星交会任务轨迹优化为例分析间接优化技术对收敛性的影响. 先由打靶法多次求解获得太阳帆推力下的最优轨迹, 得到最短飞行时间 t_{of}^* . 给出协态变量猜值次数和协态变量初值估计准确程度的表示方法, 依次比较协态变量归一化技术、

太阳帆动力学模型、坐标系选取和同伦法在提高收敛性方面的效果, 得到最有利于提高优化收敛性能的间接优化技术. 在所有的仿真案例中, 给定出发时刻地球和 Apophis 小行星的轨道根数, 具体内容如表 1 所示.

为了提高间接优化技术收敛性分析效率, 先由数值打靶法求得太阳帆轨迹最优转移时间. 由于最优控制推力连续, 编程中采用 RKF7(8) 变步长积分器, 同时保证积分精度和减少积分时间. 选用 Fortran 中 MINPACK-1^[25] 包内的 hybrd1 函数求解非线性微分方程.

给定太阳帆特征加速度值 $a_c = 0.6 \text{ mm/s}^2$, 由打靶法得到球坐标下地球到 Apophis 小行星的时间最优转移轨迹和最短飞行时间 $t_{\text{of}}^* = 465.47 \text{ d}$. 图 1 和 2 中分别给出

表 1 给定的出发时刻地球和 Apophis 的轨道根数

Table 1 Prescribed orbital elements of Earth and Apophis at the departure time

参数	地球	Apophis
半长轴 (AU)	0.9999880	0.9222942
偏心率	0.0167168	0.1911153
轨道倾角 (°)	0.00088544	3.33190072
升交点赤经 (°)	175.406477	204.431287
近地点幅角 (°)	287.61578	126.42502
平近点角 (°)	64.50968	152.73163

图 1 (网络版彩图) 地球到 Apophis 小行星的转移轨道 ($a_c = 0.6 \text{ mm/s}^2$)

Figure 1 (Color online) The transfer trajectory from Earth to Apophis ($a_c = 0.6 \text{ mm/s}^2$).

图 2 (网络版彩图) 倾斜角和时钟角的变化过程 ($a_c = 0.6 \text{ mm/s}^2$)

Figure 2 (Color online) The cone angle and the clock angle along the trajectory ($a_c = 0.6 \text{ mm/s}^2$).

转移轨迹图、转移过程中太阳帆倾斜角和时钟角的变化曲线图。在转移轨迹图中, 红色实线表示转移轨道, 蓝色虚线表示地球轨道, 黑色点画线表示Apophis小行星轨道。从图2中可以看到时钟 β 在变化过程中有个 $180^\circ \rightarrow 180^\circ$ 的突变, 该变化是基于帆姿态调整在瞬间完成的假设。

打靶法求解太阳帆轨迹优化问题时, 每次算例中的协态变量初值都是随机猜测的, 如果说第一次的协态变量猜值没有得到收敛解, 那算例中会重复这个协态变量初值的估计过程, 直到问题收敛。记录下算例收敛时协态变量初值的随机猜测次数 N_g 。同样的条件下, 完成上述求解过程的100次重复仿真^[26], 得到100个 N_g 值, 通过对 N_g 值分布区间情况的统计, 得到具体算例下的收敛结果, 实现不同优化技术下收敛性效果的对比。

分析协态变量初值估计的准确程度时, 定义一个新的变量 ε 来描述得到收敛解时协态变量估值的相对误差, ε 值越小, 对应协态变量估值准确程度越高; ε 值越大, 对应协态变量估值准确程度越低。 ε 的具体定义如下:

$$\varepsilon(i) = \left| \frac{\lambda_f(i) - \lambda_0(i)}{\lambda_f(i)} \right| \times 100\%, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (17)$$

式中, $\lambda_0(i)$ 对应于6个协态变量估值, $\lambda_f(i)$ 对应于6个协态变量最优解。

4.1 协态变量归一化技术

基于上述研究, 已知 $t_{of}^* = 465.47 \text{ d}$ 。该部分仿真会在球坐标系下引入协态变量归一化技术, 利用协态变量猜值次数分析收敛性。

图3中给出了引入协态变量归一化技术前后的收敛性对比结果, 红色和浅蓝色柱形图分别代表着引入和未引入归一化技术。横坐标中的数字1–6分别表示 $N_g = 1$, $N_g = 2$, $N_g = 3$, $3 < N_g \leq 50$, $50 < N_g \leq 100$, $N_g > 100$, 纵坐标对应于随机猜测次数情况在100次重复仿真中的统计结果。从图中可以直观得出: 归一化技术下打靶法可以实现3次猜值次数内全部收敛, 收敛性有效提高; 对比之下, 未引入协态量归一化技术时, 6次猜值次数内方能全部收敛。

为了进一步研究归一化技术对收敛性的影响程度, 分别给出引入归一化技术前后的协态变量估值和协态变量最优解, 得到图4所示结果。横坐标对应于具体的协态变量分布情况, 数字1–6依次对应6个协态变量; 虚线和实线下的圆形标记分别表示归一化后的协态变量估值和最优解; 虚线和实线下的方形标记分别表示未归一化时的协态变量估值和最优解。此处不考虑 λ_0 , 仿真中需要保证 λ_0 值始终为正数。

分析可知, 协态变量归一化技术的引用使得协态

图 3 (网络版彩图) 引入归一化技术前后的收敛性对比结果

Figure 3 (Color online) The convergence results with and without normalization.

图 4 (网络版彩图)无归一化技术和归一化技术下的协态变量猜值和协态变量最优解

Figure 4 (Color online) The value of guessed and optimal costate vector without and with the normalization.

变量估值与协态变量最优解的吻合程度大大提高。换言之, 归一化技术使得协态变量初值估计的准确程度大大提高, 从而提高打靶法的收敛性, 该结果进一步验证出协态变量归一化技术下优异的收敛性能。

4.2 坐标系选取

基于上述结果, 分析坐标系选取对于间接法收敛性的影响程度。分别给出帆特征加速度值 $a_c=0.6 \text{ mm/s}^2$ 和 $a_c=0.12 \text{ mm/s}^2$ 的两种情形, 对比这两种情形下的收敛效果。

(1) $a_c=0.6 \text{ mm/s}^2$. 该部分仿真内容中均引入协态变量归一化技术, 已知 $t_{\text{or}}^*=465.47 \text{ d}$, 对比分析直角坐标系和球坐标系下的收敛性能。图5中给出了直角坐标系和球坐标系下的收敛性对比结果, 横坐标中的数字1~4分别表示 $N_g=1$, $N_g=2$, $N_g=3$, $N_g=4$, 纵坐标对应于具体的随机猜测次数情况在100次重复仿真中的统计结果。由图可知, 两种坐标系下的100次仿真都可以在随机猜测4次的情况内收敛, 收敛性比较好。球坐标系中, $N_g=1$ 和 $N_g \leq 2$ 时猜值收敛率分别为85%和96%; 对应于直角坐标系中分别是68%和87%。相比于直角坐标系, 球坐标系下的收敛效果拥有略微的优势, 但是总体的收敛性差异不大。

为了进一步分析坐标系选取对于收敛性的影响程度, 分别给出直角坐标系和球坐标系下的协态变量估

图 5 (网络版彩图)直角坐标系和球坐标系下的收敛性对比结果($a_c=0.6 \text{ mm/s}^2$)

Figure 5 (Color online) The comparison of the convergence properties in the Cartesian and Spherical coordinate system ($a_c=0.6 \text{ mm/s}^2$).

值和协态变量最优解, 但是利用协态变量值无法直接对比得到协态变量的变化程度。

图6中给出了两种坐标系下的协态变量估值相对误差, 深蓝色和浅粉色柱形图分别对应直角坐标系和球坐标系的仿真结果。通过对比分析可得球坐标系的估值相对误差总体要低于直角坐标系, 该结论进一步解释了在该具体仿真内容下球坐标系的收敛性要略优于直角坐标系的原因。

(2) $a_c=0.12 \text{ mm/s}^2$. 同样地, 该部分仿真内容中均引入协态变量归一化技术, 已知 $t_{\text{or}}^*=1286.45 \text{ d}$, 进一步对比分析两种坐标系下的收敛性。图7中给出了该部分仿真在直角坐标系和球坐标系的收敛性对比结果, 横坐标中的数字1~5分别表示 $1 \leq N_g < 5$, $1 \leq N_g < 10$, $10 \leq N_g < 15$, $15 \leq N_g < 20$, $20 \leq N_g < 30$, 纵坐标对应于具体的随机猜测次数情况在100次重复仿真中的统计结果。从图中可以直观总结到: 两种坐标系下均可以在随机猜测30次的情况内收敛, 但是直角坐标系下的打靶法收敛性要优于球坐标系。直角坐标系中, $N_g \leq 5$ 和 $N_g \leq 10$ 时猜值收敛率分别是58%和86%; 对应于球坐标系中分别是45%和82%。

为了进一步分析该仿真内容中坐标系选取技术对

图 6 (网络版彩图)两种坐标系下的协态变量估值相对误差 ($a_c=0.6 \text{ mm/s}^2$)

Figure 6 (Color online) The relative error of the guessed costate vector in the Cartesian and the Spherical coordinate system ($a_c=0.6 \text{ mm/s}^2$).

图 7 (网络版彩图)直角坐标系和球坐标系下的收敛性对比结果 ($a_c=0.12 \text{ mm/s}^2$)

Figure 7 (Color online) The comparison of the convergence properties in the Cartesian and Spherical coordinate system ($a_c=0.12 \text{ mm/s}^2$).

于收敛性的影响程度, 给出两种坐标系下的协态变量估值相对误差曲线, 得到的结果如图8所示, 其中深蓝

图 8 (网络版彩图)两种坐标系下的协态变量估值相对误差 ($a_c=0.12 \text{ mm/s}^2$)

Figure 8 (Color online) The relative error of the guessed costate vector in the Cartesian and the Spherical coordinate system ($a_c=0.12 \text{ mm/s}^2$).

色和浅粉色柱形图分别对应直角坐标系和球坐标系的仿真结果. 通过比较得到: 直角坐标系的协态变量估值准确程度要低于球坐标系. 尽管两种坐标系的协态变量估值与协态变量最优解的吻合度都不是很高, 但是球坐标系中协态变量估值相对误差的最大值已经超过 500%, 而直角坐标系中估值相对误差的最大值甚至不超过 150%, 该结果也进一步解释了直角坐标系的打靶收敛率要略高于球坐标系的原因.

结合两部分的仿真内容可知, 坐标系选取对于收敛性的影响程度要远低于协态变量归一化技术. 针对具体的仿真内容, 坐标系选取对于收敛性的影响仍然取决于协态变量初值估计的准确程度, 即只有基于准确的初值估计结果, 选取的坐标系才能够显示出更好的收敛性.

4.3 同伦法

利用给出的两种同伦函数, 进一步分析同伦法在提高收敛性方面的优势, 该部分内容同样利用球坐标系和直角坐标系下的两种动力学建模方式展开.

(1) 球坐标系. 给定 $a_{c,0}=0.6 \text{ mm/s}^2$, $a_{c,f}=0.12 \text{ mm/s}^2$, 以初始帆特征加速度 $a_{c,0}$ 下的太阳帆轨迹最优解为初解, 通过同伦迭代, 最终得到帆特征加速度 $a_{c,f}$ 下的太

阳帆轨迹最优解. 当 $a_{c,f}=0.12 \text{ mm/s}^2$ 时, 得到图9所示的三维转移轨迹图. 在转移轨迹图中, 红色实线表示转移轨道, 蓝色虚线表示地球轨道, 黑色点画线表示Apo-phisis小行星轨道. 利用同伦法, 可以得到中间迭代过程一系列帆特征加速度、转移时间和协态变量最优解, 可以绘出转移时间随帆特征加速度值的变化曲线图, 得到图10所示的结果. 从图中可以推得, 转移时间随着帆特征加速度值的增大而减小; 当太阳帆特征加速度为 0.2 mm/s^2 时, 同等仿真任务内容下的转移时间约为850 d, 将该结果用作转移时间变量的初始估值, 发现打靶法很快收敛, 得到841.74 d的最优解. 由此可见, 利用同伦法, 可以提高同种类型任务的设计效率.

(2) 直角坐标系. 给定 $a_{\max}=0.6 \text{ mm/s}^2$, $a_c=0.6 \text{ mm/s}^2$. 以三维小推力下的最优解为初解, 通过同伦迭代, 求得真实的三维太阳帆推力下的最优轨迹. 分析过程中, 引入一个新的参数 $\bar{a}_c$, 用来表示对应的同伦参数下, 轨道积分到末端时刻的等效特征加速度, 其表达式如下:

$$\bar{a}_c = a_{\max} \pi (1 - \varepsilon_2) / \left[\left(\frac{r_{\oplus}}{r} \right)^2 \cos^2 \alpha + a_c \varepsilon_2 \right] \quad (18)$$

图11中给出了转移时间和等效特征加速度值随同伦参数 ε_2 的变化曲线. 可以看出, 随着同伦参数值 ε_2 的增加, $\bar{a}_c$ 值不断减小, 直到等于末端值 a_c , t_{of} 值不断增加至最优解470.19 d. 在同伦的初始时刻, 由于对应的是

图9 (网络版彩图)地球到Apophis小行星的转移轨道($a_c=0.12 \text{ mm/s}^2$)

Figure 9 (Color online) The transfer trajectory from Earth to Apophis ($a_c=0.12 \text{ mm/s}^2$).

图10 (网络版彩图)太阳帆特征加速度与转移时间的对应关系

Figure 10 (Color online) The transfer time as a function of the sail characteristic acceleration.

图11 (网络版彩图)转移时间和等效特征加速度值随同伦参数的变化曲线

Figure 11 (Color online) The transfer time and the equivalent characteristic acceleration as functions of the homotopic parameter.

小推力幅值为 0.6 mm/s^2 的最优控制问题, 等效特征加速度取到最大值 30.72 mm/s^2 , 随着同伦参数的增加, 推力加速度中伪小推力加速度所占比重不断下降, 太阳帆推力加速度所占比重不断上升, 导致等效特征加速度值 $\bar{a}_c$ 不断减小. 需要指出的是, 虽然 $\bar{a}_c$ 值和对应的转移时间在实际任务设计中没有直接关联性的参考意义, 但是可以方便任务设计者去分析一定比例的伪小推力加速度($a_{\max}(1-\varepsilon_2)$)和太阳帆推力加速度($a_c\varepsilon_2$)混合

下的太阳帆轨迹优化问题.

进一步分析同伦法下协态变量猜值和协态变量最优解的变化程度, 得到表2所示结果. 从中可以直接看出, 同伦法的应用使得协态变量猜值非常接近协态变量最优解; 得到的球坐标系估值相对误差均在0.7%以下, 直角坐标系估值相对误差更小. 球坐标系同伦参数从0增加到1时经过24次迭代, 最后两步对应0.99872825和1; 直角坐标系同伦参数经过35次迭代, 最后两步对应0.99999959和0.99999992. 显然, 直角坐标系中同伦参数的倒数第二项要更加接近同伦参数的末端值, 当以逼近最优解的协态变量猜值去求解协态变量最优解时, 协态变量猜值相对误差明显要更接近于0.

总结下来, 无论是直角坐标系, 还是球坐标系, 同伦法的应用都使得协态变量猜值与协态变量最优解呈现出高度吻合的趋势, 即同伦法的应用可以保证协态变量猜值足够贴近打靶收敛时的协态变量最优解. 由于同伦法的应用可以保证同伦过程中优化变量始终沿零路径收敛, 所以在接近同伦末端时刻, 最后一次迭代过程中协态变量猜值几乎直逼原优化问题收敛时的最优解.

5 总结

本文主要以太阳帆航天器交会探测Apophis小行星任务为背景, 完成了不同间接优化技术的收敛性对比分析. 首先求得具体仿真内容下的太阳帆时间最优轨迹和最短飞行时间. 其次, 依次比较协态变量归一

表 2 球坐标系和直角坐标系协态变量估值相对误差

Table 2 The relative error of the guessed costate vector in the Spherical and Cartesian coordinate system

坐标系	λ	协态变量猜值	协态变量最优解	相对误差 (%)
球系	λ_1	5.648761990	5.687399726	6.8×10^{-1}
	λ_2	0.188500373	0.189491922	5.2×10^{-1}
	λ_3	1.281364474	1.273299290	6.3×10^{-1}
	λ_4	9.272879111	9.336672806	6.8×10^{-1}
	λ_5	2.627394826	2.635509524	3.1×10^{-1}
	λ_6	-3.568097892	-3.592479453	6.8×10^{-1}
直系	λ_1	-0.882922640	-0.882922641	2.4×10^{-8}
	λ_2	-0.048028677	-0.048028677	1.6×10^{-7}
	λ_3	0.167845952	0.167845953	2.7×10^{-7}
	λ_4	-0.690479170	-0.690479171	2.6×10^{-8}
	λ_5	-0.144033770	-0.144033770	1.7×10^{-7}
	λ_6	0.312089311	0.312089312	2.0×10^{-7}

化技术、动力学模型坐标系选取和同伦法对于间接法收敛性的影响程度. 由协态变量猜值次数情况在100次重复仿真中的统计结果和协态变量初值估计的准确程度来辅助对比这3种优化技术的收敛性能. 仿真结果表明: 同伦法下协态变量初值估计准确度最高, 收敛性能最好, 协态变量归一化技术次之, 动力学模型坐标系的影响程度最小; 应用两种同伦函数时, 利用一系列中间过程解还可以提高相关任务设计效率. 该结论同时验证出好的优化技术下更容易获得准确的初值估计, 初值估计的准确性是衡量优化技术收敛性能的指标.

参考文献

- Li J F, Baoyin H X, Jiang F H. Dynamics and Control of Interplanetary Flight (in Chinese). Beijing: Tsinghua University Press, 2014 [李俊峰, 宝音贺西, 蒋方华. 深空探测动力学与控制. 北京: 清华大学出版社, 2014]
- Dachwald B, Wie B. Solar sail trajectory optimization for intercepting, impacting, and deflecting near-Earth asteroids. In: Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. San Francisco: AIAA, 2005
- Dachwald B. Optimal solar sail trajectories for missions to the outer solar system. *J Guid Control Dyn*, 2005, 28: 1187–1193
- Ball A J, Ulamec S, Dachwald B, et al. A small mission for *in situ* exploration of a primitive binary near-Earth asteroid. *Adv Space Res*, 2009, 43: 317–324
- Brophy J R, Friedman L, Culick F. Asteroid retrieval feasibility. In: 2012 IEEE Aerospace Conference. Big Sky, MT: IEEE, 2012. 1–16
- Zeng X, Gong S, Li J. Fast solar sail rendezvous mission to near Earth asteroids. *Acta Astronaut*, 2014, 105: 40–56
- Peloni A, Ceriotti M, Dachwald B. Solar-sail trajectory design for a multiple near-Earth-asteroid rendezvous mission. *J Guid Control Dyn*, 2016, 39: 2712–2724
- Peloni A, Dachwald B, Ceriotti M. Multiple near-Earth asteroid rendezvous mission: Solar-sailing options. *Adv Space Res*, 2018, 62: 2084–2098

- 9 Heiligers J, Scheeres D J. Solar-sail orbital motion about asteroids and binary asteroid systems. *J Guid Control Dyn*, 2018, 41: 1947–1962
- 10 Mengali G, Quarta A A. Rapid solar sail rendezvous missions to asteroid 99942 Apophis. *J Spacecraft Rockets*, 2006, 46: 134–140
- 11 Betts J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *J Guid Control Dyn*, 1998, 21: 193–207
- 12 Conway B A. A survey of methods available for the numerical optimization of continuous dynamic systems. *J Optim Theor Appl*, 2012, 152: 271–306
- 13 Gong S P, Gao Y F, Li J F. Solar sail time-optimal interplanetary transfer trajectory design. *Res Astron Astrophys*, 2011, 11: 981–996
- 14 Zeng X, Alfrend K T, Li J, et al. Optimal solar sail trajectory analysis for interstellar missions. *J Astronaut Sci*, 2012, 59: 502–516
- 15 Ma Y Y, Pan B F. Solar sail time-optimal trajectory optimization using Kustaanheimo-Stiefel transformation. In: The Fourth International Symposium on Solar Sailing. Kyoto, 2017
- 16 Bertrand R, Epenoy R. New smoothing techniques for solving bang-bang optimal control problems—Numerical results and statistical interpretation. *Optim Control Appl Meth*, 2002, 23: 171–197
- 17 Guo T, Jiang F, Li J. Homotopic approach and pseudospectral method applied jointly to low thrust trajectory optimization. *Acta Astronaut*, 2012, 71: 38–50
- 18 Jiang F, Baoyin H, Li J. Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach. *J Guid Control Dyn*, 2012, 35: 245–258
- 19 Yang H, Li J, Baoyin H. Low-cost transfer between asteroids with distant orbits using multiple gravity assists. *Adv Space Res*, 2015, 56: 837–847
- 20 Gong S, Li J, Jiang F. Interplanetary trajectory design for a hybrid propulsion system. *Aerospace Sci Tech*, 2015, 45: 104–113
- 21 Sullo N, Peloni A, Ceriotti M. Low-thrust to solar-sail trajectories: A homotopic approach. *J Guid Control Dyn*, 2017, 40: 2796–2806
- 22 Junkins J L, Taheri E. Exploration of alternative state vector choices for low-thrust trajectory optimization. *J Guid Control Dyn*, 2019, 42: 47–64
- 23 Zeng X Y. Solar Sail Spacecraft Novel Trajectory Design in Deep Space Exploration (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Beijing: Tsinghua University, 2013 [曾祥远. 深空探测太阳帆航天器新型轨道设计. 博士学位论文. 北京: 清华大学, 2013]
- 24 McInnes C R. Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications. London: Springer-Verlag, 1999. 34–170
- 25 Moré J J, Garbow B S, Hillstom K E. User guide for MINPACK-1. Technical Report. Argonne: Argonne National Laboratory, 1980
- 26 Chi Z, Yang H, Chen S, et al. Homotopy method for optimization of variable-specific-impulse low-thrust trajectories. *Astrophys Space Sci*, 2017, 362: 216

Convergence properties analysis of the indirect optimization techniques for solar sail trajectory optimization

SUN Pan, YANG HongWei & LI Shuang^{*}

College of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China

The indirect method is commonly used for solving the solar sail spacecraft trajectory optimization problem. However, the convergence difficulty usually tends to happen due to the sensitivity of the initial costates. In order to improve the numerical convergence properties, many indirect optimization techniques, such as the normalization of the costate vector, have been proposed in the research of deep space trajectory optimization problem. However, there is little literature focused on the analysis of the convergence properties for different indirect optimization techniques. This paper takes the asteroid rendezvous mission with solar sail spacecraft as background, and analyzes the relationship between the indirect optimization techniques which includes the normalization of the costate vector, the homotopic approach and different coordinate systems (the Cartesian and the Spherical coordinate system) for solar sail dynamic models and the convergence properties. First, dynamic models based on different indirect optimization techniques are developed. The shooting method is used to solve for the optimal costates. Then, the convergence properties of the three techniques are compared and analyzed according to the times of initial guesses and the accuracy of the guessed costates. The results of the numerical simulations show that the homotopic approach can achieve the highest accuracy of initial guesses and the best convergence properties.

trajectory optimization, asteroid, solar sail, indirect method, convergence

PACS: 02.60.Pn, 96.30.Ys, 92.60.Vb

doi: [10.1360/SSPMA2018-00351](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00351)