一种改进的适用于多相流SPH模拟的粒子位移修正算法

王平平, 张阿漫*, 孟子飞

哈尔滨工程大学船舶工程学院, 哈尔滨 150001

* 联系人, E-mail: zhangaman@hrbeu.edu.cn

2019-09-18 收稿, 2019-10-31 修回, 2019-10-31 接受, 2019-12-30 网络版发表

国家数值风洞工程(2018-ZT2B05)和国防基础科研计划(JCKY2018604C010)资助

摘要 由于光滑粒子流体动力学(smoothed particle hydrodynamics, SPH)方法具有天然的拉格朗日特性, 粒子常常沿着流线运动, 易产生不均匀的粒子分布, 导致计算精度和稳定性下降. 作为一种粒子分布均匀化技术, 粒子位移修正(shifting)算法凭借其原理简单、效果显著等优点在SPH水动力学模拟中得到广泛应用. 但同时, 应用于多相流运动中的shifting算法的计算过程较为复杂. 针对这一问题, 本文提出了一种改进的适用于多相流模拟的粒子shifting算法. 与文献中已有的多相流shifting算法相比, 它在处理多相交界面时能够维持更加均匀的粒子分布, 同时可以保持清晰的异相界面, 且实施相对简单高效. 数值算例表明, 该shifting算法在多相流模拟中具有更高的精度和更好的能量守恒特性.

关键词 计算流体力学, 光滑粒子流体动力学, 多相流, 粒子位移修正算法, 粒子分布

多相流动广泛存在于自然界和工程中, 例如水下爆炸^[1~4]、气泡上浮^[5,6]、破舱进水^[7]等. 随着计算机技术的快速发展, 数值模拟成为研究多相流的重要手段之一. 由于采用基于网格的数值方法模拟多相流动时常常遇到一些挑战, 包括多相界面捕捉、流体的大变形和破碎等, 因此越来越多的学者将目光转向完全的拉格朗日粒子法. 光滑粒子流体动力学方法(smoothed particle hydrodynamics, SPH)是发展相对成熟的一种无网格粒子法, 它将整个流场离散为粒子, 而这些粒子的水动力学变量(包括速度、密度等)通过粒子之间的相互作用进行更新. 由于计算过程中避免了网格的参与, 因此SPH方法在处理带有复杂界面的多相水动力学问题时具有显著优势. 目前已发表的文献中已有多个多相流SPH模型^[8~15], 基于这些模型, 许多多相流问题都得到了很好的模拟.

由于SPH是一种完全的拉格朗日方法, 所以粒子严

格沿流线运动, 这在一些问题中会导致粒子分布不均匀. 而SPH方法的精度与粒子分布情况密切相关, 不均匀的粒子分布会使计算精度显著下降^[16]. 为了解决这个问题, 一种途径是采用高精度SPH算法^[17~19], 另一种途径是采用粒子均匀算法. SPH方法中已经发展了多种粒子均匀算法, 而粒子位移修正(shifting)算法是其中最常用的一种, 它最早由Xu等人^[20]提出并随后被Lind等人^[21]推广应用到多相流和自由表面流动中. 其原理是在每一个时间步内通过人为地将粒子从粒子浓度高的区域移动到粒子浓度低的区域, 从而达到粒子分布均匀化的目的. 由于shifting算法实施十分简单且效果显著, 近年来已有多种不同的shifting算法^[20~25]被提出并得到了广泛应用. 目前常应用于多相流模拟的shifting算法由Mokos等人^[22]提出, 在该算法中需要首先检测异相界面, 然后对粒子进行shifting. 需要注意的是, 这种算法对界面附近不同相的粒子分别进行特殊处理,

引用格式: 王平平, 张阿漫, 孟子飞. 一种改进的适用于多相流SPH模拟的粒子位移修正算法. 科学通报, 2020, 65: 729–739

Wang P P, Zhang A M, Meng Z F. An improved particle shifting algorithm for multiphase flows in SPH method (in Chinese). Chin Sci Bull, 2020, 65: 729–739, doi: 10.1360/TB-2019-0540

以避免不同相物质发生非物理的掺混. 虽然这种算法对维持异相界面的清晰和稳定有一定效果, 但它的实施较为复杂耗时, 而且常常会在界面附近产生间隙, 降低数值精度和稳定性. 针对这些问题, 本文对已有的shifting算法进行改进, 使得它在应用到多相流动问题时不仅简单高效, 而且能够消除异相界面附近的空隙, 维持更加均匀的粒子分布, 使计算更加精确和稳定. 最后通过几个经典的数值算例, 证明本文改进的shifting算法的精确性和鲁棒性.

1 SPH基本理论

1.1 WCSPH控制方程

在弱可压SPH方法^[8](weakly-compressible SPH, WCSPH)中, 当流体的黏性被忽略时, 流体的拉格朗日形式的质量和动量守恒方程如下:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}, \end{cases} \quad (1)$$

其中, ρ , $\mathbf{u}$ 和 p 分别为流体微团的密度、运动速度和压强; $\mathbf{g}$ 代表重力加速度, t 代表时间. 可以看出, 方程(1)是不封闭的, 通常需要通过状态方程建立压力和密度之间的关系来使之封闭. 本文中所有的流体均采用泰特状态方程^[26,27], 如果用下标a和b分别代表轻质和重质流体, 则它们的泰特状态方程形式如下:

$$\begin{cases} p_a = \frac{c_a^2 \rho_{0a}}{\gamma_a} \left[\left(\frac{\rho_a}{\rho_{0a}} \right)^{\gamma_a} - 1 \right], \\ p_b = \frac{c_b^2 \rho_{0b}}{\gamma_b} \left[\left(\frac{\rho_b}{\rho_{0b}} \right)^{\gamma_b} - 1 \right], \end{cases} \quad (2)$$

其中, ρ_{0a} 和 ρ_{0b} 分别代表流体a和b的参考密度. γ_a 和 γ_b 是与材料有关的常数, 例如, 对于水, $\gamma=7$; 对于空气, $\gamma=1.4$. 在WCSPH方法中, 对于重质流体, 它的声速 c_b 需要满足弱可压条件^[8], 即流场的马赫数小于0.1:

$$\frac{\|\mathbf{u}_{\max}\|}{c_b} = Ma \leq 0.1, \quad (3)$$

其中, $\mathbf{u}_{\max}$ 代表整个流场预估的最大速度, Ma 为马赫数. 对于轻质流体, 文献^[8]建议它的声速 c_a 通过使状态方程右边的系数相等求得, 即

$$\frac{c_a^2 \rho_{0a}}{\gamma_a} = \frac{c_b^2 \rho_{0b}}{\gamma_b}. \quad (4)$$

这种确定轻质流体声速的方法最早由Colagrossi和Landrini^[8]提出, 并在低速多相流SPH模拟中得到非常广泛的应用^[5~7]. 但事实上, 正如Monaghan和Rafiee^[11]指出, 这种声速的取法并没有实际的物理意义, 而且可能会导致轻质流体的声速大于实际声速. 但在近似不可压低速多相流动的模拟中, 当两种流体的密度比很大时, 这种处理方法对算法的稳定是非常必要的^[11].

1.2 多相流SPH方法的离散方程

本文采用了由Antuono等人^[28]提出的 δ -SPH方法, 它通过在连续方程右边加入人工的密度耗散项来减小传统WCSPH方法中经常出现的压力场的非物理高频振荡, 从而得到更加光顺的压力场. δ -SPH的离散的控制方程如下:

$$\begin{cases} \frac{d\rho_i}{dt} = \rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} + \mathbf{F}_\delta, \\ \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{p_i + p_j}{\rho_i} \nabla_i W_{ij} + \mathbf{g} + \mathbf{F}_v, \end{cases} \quad (5)$$

其中, $W_{ij}=W(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j, h)$ 代表核函数, 在二维和三维问题中, 它的支持域分别是圆面和球体. 支持域的半径用 kh 表示, 其中 h 被称为光滑长度, 而 k 是一个与所选核函数有关的常数. j 表示 i 粒子邻域内的粒子, 一般通过链表搜索^[29]找到. 本文中所有算例均采用改进高斯型核函数^[10], 此时 k 为3; 光滑长度取为1.2倍的初始粒子间距, 即 $h=1.2\Delta x$. 式(5)中连续方程右边的 $\mathbf{F}_\delta$ 代表人工密度耗散项^[28], 其计算公式为

$$\mathbf{F}_\delta = \delta h c_0 \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mu_{ij} \nabla_i W_{ij}, \quad (6)$$

其中, 系数 δ 用来调节耗散项的大小. Antuono等人^[28]通过分析指出, δ 的可取范围非常小, 因此对于不同的问题, 可以认为 δ 是一个常数0.1, 本文采用了这种方案. 式(6)中 μ_{ij} 的定义如下:

$$\begin{cases} \mu_{ij} = 2(\rho_i - \rho_j) \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2} \cdot (\langle \nabla \rho \rangle_i^L + \langle \nabla \rho \rangle_j^L), \\ \langle \nabla \rho \rangle_i^L = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\rho_j - \rho_i) \mathbf{L}_i \nabla_i W_{ij}, \\ \mathbf{L}_i = \left[\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \otimes \nabla_i W_{ij} \right]^{-1}. \end{cases} \quad (7)$$

式(5)中动量方程中的 $\mathbf{F}_v$ 代表由Monaghan和Gingold^[30]

提出的人工黏性力,它不仅为冲击波模拟提供了必需的数值耗散,而且能防止粒子相互接近时出现非物理的穿透现象,因此使数值计算更加稳定。 F_v 的具体计算公式如下:

$$\left\{ \begin{aligned} F_v &= \alpha h c_0 \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \phi_{ij} \nabla_i W_{ij}, \\ \phi_{ij} &= \begin{cases} \frac{(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2} & (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) < 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (8)$$

其中,系数 α 控制人工黏性力的大小,其取值范围为0.01~1.0,本文中取为常用的一个参数0.05^[31]。

1.3 多相流界面处理技术

当采用SPH方法模拟多相流时,界面两侧的速度、压强是连续的,但粒子的密度和质量是不连续的,这种不连续性常会导致移动交界面附近出现压力振荡^[32]。为了解决这个问题,在SPH方法中已发展出多种界面处理技术,例如多相密度正则化技术^[12]、压强梯度修正技术^[9]、异相界面力技术^[10]等。本文中为了使异相界面稳定并获得较为光顺的压力场,采用了由Chen等人^[12]提出的多相密度正则化技术。在该技术中,所有流体粒子的密度每20个时间步通过下式更新一次:

$$\rho_i^{\text{new}} = \frac{\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij} \rho'_j}{\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij}}, \quad (9)$$

其中, ρ_i^{new} 代表更新后的*i*粒子的密度。 ρ'_j 表示*j*粒子与*i*粒子的同相密度,即当*j*与*i*同相时, ρ'_j 为*j*粒子本身的密度;当*j*与*i*异相时, ρ'_j 为*j*粒子的压强代入*i*粒子的状态方程反求得到的密度。该技术能有效地克服由于粒子自由移动导致的核函数不满足归一性的问题,减小密度和压力场的振荡。

2 改进的粒子位移修正技术

粒子位移修正技术即shifting技术最早由Xu等人^[20]提出用来提高数值的精度和稳定性。随后,Lind等人^[21]采用Fick定律对该技术进行了改进,得到的粒子移动矢量为

$$\delta \mathbf{x}_i = -0.5 h^2 \nabla C_i, \quad (10)$$

其中, ∇C 代表粒子浓度的梯度,其计算公式为

$$\nabla C_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (1 + \chi_{ij}) \nabla_i W_{ij}, \quad \chi_{ij} = 0.2 \left(\frac{W_{ij}}{W(\Delta x)} \right)^4, \quad (11)$$

其中, χ_{ij} 用来克服SPH中的张力不稳定性问题^[33]。需要注意的是,当shifting技术应用到自由表面流动时,需要对距自由表面 kh 范围以内的粒子进行特殊处理,否则由于核函数被自由表面截断,在自由面法向上会产生巨大的粒子浓度差,导致自由面及其附近的粒子沿法向大幅移动,引起自由面的非物理的“蓬起”。为了解决这个问题,目前文献中常采用的方法是对距自由表面 kh 范围以内的粒子,由式(10)求得的粒子移动矢量只保留沿自由面的切向分量,而忽略其法向分量(参考文献^[23,24,31,34]),最终得到的修正后的shifting矢量为

$$\widetilde{\delta \mathbf{x}}_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i \in S, \\ (\mathbf{e} - \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \delta \mathbf{x}_i & \text{if } i \in F, \\ \delta \mathbf{x}_i & \text{if } i \in I, \end{cases} \quad (12)$$

其中, $\mathbf{n}$ 代表自由表面的单位法向向量, $\mathbf{e}$ 为单位张量。 S 、 F 和 I 分别代表飞溅粒子、距自由表面 kh 范围以内(包括自由表面)的区域和内部流体域。搜索飞溅粒子和距自由表面 kh 范围以内的粒子的方法可以参考文献^[31]。

对于单相的自由表面流动,可以直接采用式(12)来计算得到粒子的位移矢量。而对于多相流动,Mokos等人^[22]在通过对溃坝等算例进行模拟后指出,轻质和重质流体需要采用不同的shifting算法,才能保证数值的精度和稳定性。具体如下:首先需要对重质流体粒子进行移动,此时忽略轻质流体,并通过式(12)计算得到移动矢量,这样可以避免不同相粒子之间的相互掺杂,得到清晰的界面。然后对轻质流体粒子进行移动,此时需要考虑重质流体,且移动矢量的求解采用的是式(10)给出的方案,而不能采用式(12)的自由表面修正方案,否则会抑制轻质流体(例如空气)的自由膨胀。虽然Mokos等人^[22]的方法在一些问题中能够使异相界面更加稳定,这种方法在其他的一些粒子法中也被采用(例如文献^[35]),但它仍存在两处不足。一方面,这种方法需要首先侦测出异相的交界面,而且由于要对重质和轻质流体按顺序分别处理,所以需两个链表搜索来分别计算重质和轻质流体粒子的shifting,这些都会导致计算时间显著增加。另一方面,由于重质和轻质流体采用的shifting方案不同,有时会引起异相界面附近出现非物理空隙^[14],造成粒子分布不均匀,增大计算误差。

针对Mokos等人^[22]方法存在的这些不足,本文提

出一种改进的shifting算法. 它对重质和轻质流体采用统一的处理方法, 所有粒子的shifting矢量可以在一个

$$\widetilde{\delta \mathbf{x}}_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i \in S, \\ \left(\mathbf{e} - \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \right) \left[-2h \|\mathbf{u}_{\max}\| \Delta t \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \left(1 + 0.2 \left(\frac{W_{ij}}{W(\Delta \mathbf{x})} \right)^4 \right) \nabla_i W_{ij} \right] & \text{if } i \in F, \\ -2h \|\mathbf{u}_{\max}\| \Delta t \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \left(1 + 0.2 \left(\frac{W_{ij}}{W(\Delta \mathbf{x})} \right)^4 \right) \beta_{ij} \nabla_i W_{ij} & \text{if } i \in I, \end{cases} \quad (13)$$

其中, Δt 为时间步大小. 需要注意的是, 在改进的方法中, 因为不需要侦测异相界面, 所以判断一个粒子是否属于自由表面需要考虑该粒子周围的所有粒子(包括同相粒子和异相粒子). 与式(10)不同的是, 式(13)中shifting的计算考虑了流场最大速度 $\mathbf{u}_{\max}$ 和时间步长 Δt , 它们的作用是防止粒子的shifting过大导致其运动轨迹被破坏^[36], 使计算更加稳定. 在多相流shifting中, 它们的引入有助于维持异相界面的清晰和稳定. 式(13)与式(10)的另一处不同是, 当粒子位于流体域内部时, 其shifting的计算引入了系数 β_{ij} , 其取值规则为: 当 i 粒子与 j 粒子属于同一相时, $\beta_{ij}=1.0$, 否则 $\beta_{ij}=1.05$. 由于 β_{ij} 系数的不同, 异相粒子之间的shifting矢量的大小要比同相之间的大5%, 使得异相粒子之间的“排斥”略大一些. 这种处理方法不仅有助于保持异相界面的清晰, 同时也尽量减小界面附近由于粒子沿界面法向移动造成的非物理空隙, 有助于获得更加光顺的压力场. 系数 β_{ij} 的取值对计算结果的影响将在3.1节中详细讨论.

3 算例验证

3.1 瑞利-泰勒不稳定现象

本节首先通过对瑞利-泰勒不稳定现象^[11,12]的模拟, 研究改进的shifting算法中参数 β_{ij} 的取值对计算结果的影响. 计算模型如图1(a)所示, 在大小为1 m×2 m的矩形区域内, 初始密度为1800 kg/m³的重质流体位于初始密度为1000 kg/m³的轻质流体的上方, 交界面形状为 $y=-0.15 \sin(2\pi x)$, 流场四周施加的是固壁边界条件^[37]. 两种流体均采用泰特状态方程且 γ 均为7, 重质流体的初始声速取为14 m/s, 由式(4)可得轻质流体的初始声速为18.8 m/s. 本算例中, 重力大小设置为 $g=1 \text{ m/s}^2$, 方向竖直向下. 整个流场的初始粒子间距为

链表内同时计算出来, 所以这种shifting算法更加简单高效. 采用这种方法得到的shifting矢量为

0.01 m.

图1(b)给出了采用改进的shifting算法在不同的 β_{ij} 的取值下得到的 $t=4.55 \text{ s}$ 时刻的粒子分布, 在重力作用下, 两种流体均产生了较大变形. 当 β_{ij} 取1.0时, 异相粒子之间的shifting与同相之间的相同, 相当于不区分流体类型. 通过局部放大图可以发现, 两种流体的交界面附近异相粒子发生了明显的掺混. 而当 β_{ij} 取1.05或1.1时, 由于异相粒子之间的shifting略大于同相粒子之间的, 使得异相粒子之间的“排斥”略大一些, 因此得到的界面更加清晰.

图2(a)和(b)分别给出了不同的 β_{ij} 取值下得到的 $t=4.55 \text{ s}$ 时刻的粒子分布不均匀度场和压力场, 其中粒子分布不均匀度的定义^[38]为 $\zeta=H\|\nabla C\|$. Colagrossi等人^[38]指出, 当粒子分布完全均匀时, $\zeta=0$, 否则 $\zeta>0$, 且随着粒子不均匀度的提升, ζ 的值不断增大. 通过图2(a)可以发现, 当 β_{ij} 取1.0时, 整个流场的粒子不均匀度基本相同. 随着 β_{ij} 增大, 在异相交界面处的粒子分布不均匀度也在增大, 这是异相粒子之间shifting略大造成的. 进一步观察图2(b)压力云图可以发现, 当 β_{ij} 取1.0或1.05时, 压力场较为光顺, 而当 β_{ij} 取1.1时, 对应于两相交界面的位置出现了较为明显的压力噪点, 说明此时界面附近粒子的不均匀分布对压力场已经有了较大的影响. 综合来看, 当采用改进的shifting算法时, 参数 β_{ij} 取1.05既能维持异相界面的清晰, 抑制不同相粒子之间的掺混, 同时也能尽量降低shifting对压力场的影响, 因此本文中所有的算例均采用了这一取值.

3.2 多相振荡液滴

多相振荡液滴是SPH方法中用来检验多相流模型的一个经典算例^[14,35], 其计算模型为两个同心圆, 半径分别为0.5和1.0 m. 其中, 内圆部分是初始密度为

图1 (网络版彩色)瑞利-泰勒不稳定现象. (a) 计算模型; (b) 采用改进的shifting算法在3个不同的 β_{ij} 取值下得到的 $t=4.55$ s时刻的粒子分布; (c1)~(d3) 局部的粒子分布图

Figure 1 (Color online) Rayleigh-Taylor instability. (a) The computational model; (b) the particle distributions at $t=4.55$ s, which are obtained by adopting the proposed improved shifting algorithm with three different β_{ij} values; (c1)~(d3) local particle distributions

1000 kg/m³的水, 内圆和外圆之间的部分填充的是初始密度为1 kg/m³的空气. 整个流场的初始粒子间距为0.005 m. 液滴始终受到一个外部的体力场^[14], 其表达式为

$$\begin{cases} f_x = -\phi^2 x, \\ f_y = -\phi^2 y, \end{cases} \quad (14)$$

其中, $\phi=1.0$. 在初始时刻, 液滴的速度场为^[14]

$$\begin{cases} u_0(x, y) = 0.5x, \\ v_0(x, y) = -0.5y. \end{cases} \quad (15)$$

为了验证改进的shifting技术的精度, 同时突出改进方法相对于已有的Mokos等人^[22]提出的shifting算法的优势, 图3展示了分别采用Mokos等人^[22]的shifting算法和改进的shifting算法得到的在 $t=1.56$ 和 3.75 s时刻的压力场和粒子分布. 可以看出, 这两种算法得到的压力场均十分光滑. 但从粒子分布图可以看到, Mokos等人^[22]的shifting算法得到的两相界面附近粒子呈线性分布, 外层的气体与内部的水并没有很好地贴合在一起, 有较大的非物理间隙, 这是由于位于交界面附近的水粒子只沿切向移动, 忽略了法向移动. 而本文提出的shifting算法允许界面附近的水粒子沿法向移动, 因此可以很好地消除这些间隙, 得到非常均匀的粒子分布.

为了定量地比较两种shifting算法的精度, 图4给出

图2 (网络版彩色)瑞利-泰勒不稳定现象. 采用改进的shifting算法在3个不同的 β_{ij} 取值下得到的 $t=4.55$ s时刻的粒子分布不均匀度场(a)和压力场(b)

Figure 2 (Color online) Rayleigh-Taylor instability. The particle distribution unevenness fields (a) and the pressure fields (b) at $t=4.55$ s, obtained by adopting the proposed improved shifting algorithm with three different β_{ij} values

了分别采用两种shifting算法得到的内圆半长轴长度 a 的时历曲线(将位于内圆的所有水粒子的 x 坐标的最大值取为 a), 并与通过文献[11]得到的解析解进行对比. 可以看到, 随着液滴的振荡, 内圆的半长轴长度也呈周

图3 (网络版彩色)多相振荡液滴. 分别采用Mokos等人^[22]的shifting算法和改进的shifting算法得到的在两个典型时刻的粒子分布(左列)和压力场分布(右列)

Figure 3 (Color online) Oscillation of a multiphase drop. The particle distributions (the left column) and pressure fields (the right column) at two typical time instants, obtained by respectively adopting Mokos et al's shifting algorithm^[22] and the proposed improved shifting algorithm

图4 (网络版彩色)多相振荡液滴. 分别采用Mokos等人^[22]的shifting算法和改进的shifting算法得到的内圆半长轴长度的时历曲线, 并与Monaghan和Rafiee^[11]的解析解进行对比

Figure 4 (Color online) Oscillation of a multiphase drop. Time histories of the horizontal semi-major axis, obtained by respectively adopting Mokos et al's shifting algorithm^[22] and the proposed improved shifting algorithm, in comparison with the analytical solution provided by Monaghan and Rafiee^[11]

期性变化. 由于两相界面粒子的不均匀分布, 采用Mokos等人^[22]的shifting算法得到的内圆半长轴长度相对于解析解明显偏低, 且误差有逐渐增大的趋势, 在模拟的中后期误差约为粒子直径的10倍. 得益于更加均匀

的粒子分布, 采用本文提出的shifting方法得到的结果与解析解几乎完全重合. 为了定量地比较两种算法的精度, 本文中定义数值结果相对于解析解在时域 $t \in [t_1, t_2]$ 的正则化均方根误差 ε 如下:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - g(t)]^2 dt}{\int_{t_1}^{t_2} [g(t)]^2 dt}}, \quad (16)$$

其中, $f(t)$ 和 $g(t)$ 分别为数值解和解析解. 通过式(16)可以求得, 在6 s内两种shifting算法的 ε 分别为0.0809和0.0078, 显然本文提出的改进的shifting算法在精度方面显著优于Mokos等人^[22]的shifting算法.

3.3 多相旋转水滴

第3个算例是关于多相旋转水滴的模拟, 这也是SPH方法中一个常用的基准算例^[14,35]. 计算模型为两个同心正方形, 边长分别为0.5和1.0 m. 小正方形填充的是密度为10 kg/m³的轻质流体, 而大正方形与小正方形之间的区域填充的是密度为1000 kg/m³的重质流体. 整

个流场的初始压力为0, 初始速度分布为^[14]

$$\begin{cases} u_0(x,y)=\omega y, \\ v_0(x,y)=-\omega x, \end{cases} \quad (17)$$

其中, 转动速度 $\omega=1$ rad/s. 整个流场的初始粒子间距为0.005 m. 随着液滴的旋转, 水域中心部分出现负压, 这在SPH方法中会引发张力不稳定的发生. 为了解决这个问题, shifting方法是常用且有效的一个手段^[24].

图5中给出了分别采用Mokos等人^[22]的shifting算法和本文提出的改进的shifting算法得到的在 $t=2.0$ s时刻的压力场和粒子分布. 可以看到, 当采用Mokos等人^[22]的shifting的算法时, 两相界面虽然较为清晰, 但出现了非物理的间隙, 在轻质流体的4个角附近尤为明显. 而当采用本文提出的改进的shifting技术时, 这些间隙都被消除, 同时也得到了光顺的两相界面. 从右侧的压力云图可以看出, 由于界面附近粒子分布不均, 采用Mokos等人^[22]的shifting算法得到的压力场在交界面处有明显的噪点. 相比之下, 采用改进的shifting算法得到的压力场更加光顺.

由于shifting算法仅仅是对粒子位置的人工修正, 它的施加会破坏系统的能量守恒特性, Khayyer等人^[23]的结果表明, 优化的shifting算法不仅能得到更加均匀的粒子分布, 而且往往能降低shifting造成的能量误差. 为了比较Mokos等人^[22]的shifting算法和本文提出的改进的shifting算法的能量守恒特性, 本算例中给出了分别采用两种shifting方法得到的总动能 E_k 与初始时刻总动能 E_{k0} 之比的时历曲线, 如图6所示. 可以看出, 两种方法得到的流场总动能都呈衰减趋势, 但在所研究时间内总的衰减比例都较小, 均在5%以内. 得益于更加均匀的粒子分布, 采用本文提出的改进的shifting算法得到的总动能衰减小于Mokos等人^[22]的shifting算法引起的衰减, 证明改进的shifting算法在能量守恒性方面也具有一定优势.

3.4 多相驻波模拟

第4个算例是关于多相驻波的模拟, 它也常被用来检验多相shifting算法的精度(如参考文献[14,35]). 计算模型如图7所示. 流体域的大小为 $1\text{ m}\times 1\text{ m}$, 包括上方初始密度为 1 kg/m^3 的空气和下方初始密度为 1000 kg/m^3 的水. 本算例中流场的最大速度估计为 2 m/s , 根据式(3)中的弱可压假设, 水的初始声速取为 20 m/s , 又由式(4)可得空气的初始声速为 250 m/s . 初始时刻水面的形状为

图5 (网络版彩色)多相旋转水滴. 分别采用Mokos等人^[22]的shifting算法和改进的shifting算法得到的在 $t=2.0$ s时刻的粒子分布(左侧图)和压力场分布(右侧图)

Figure 5 (Color online) Rotation of a multiphase fluid patch. The particle distributions (the left column) and pressure fields (the right column) at $t=2.0$ s, obtained by respectively adopting Mokos et al's shifting algorithm^[22] and the proposed improved shifting algorithm

图6 (网络版彩色)多相旋转水滴. 分别采用Mokos等人^[22]的shifting算法和改进的shifting算法得到的动能时历曲线

Figure 6 (Color online) Rotation of a multiphase fluid patch. Time histories of the kinetic energy, obtained by respectively adopting Mokos et al's shifting algorithm^[22] and the proposed improved shifting algorithm

$$h_0(x) = S \cos(kx), \quad (18)$$

其中, h_0 为初始水面高度; S 为波高, 设置为 0.05 m ; k 代表波数, 其与波长 λ 的关系为 $k=2\pi/\lambda$, 本算例中波长为 1.0 m . 在流体域的左右两边施加周期性边界^[39], 而上下两边施加固壁边界^[37]. 重力大小为 $g=9.8\text{ m/s}^2$, 方向竖直向下. 整个流场的初始粒子间距为 0.005 m .

图8给出了分别采用Mokos等人^[22]的shifting算法

图7 (网络版彩色)多相驻波模拟计算模型

Figure 7 (Color online) Computational model of the multiphase standing wave simulation

图8 (网络版彩色)多相驻波模拟。分别采用Mokos等人^[22]的shifting算法和改进的shifting算法得到的在$t=0.35 \text{ s}$时刻的压力场及局部的粒子分布

Figure 8 (Color online) Multiphase standing wave simulation. Pressure fields and local particle distributions at $t=0.35 \text{ s}$, obtained by respectively adopting Mokos et al's shifting algorithm^[22] and the proposed improved shifting algorithm

和本文提出的改进的shifting算法得到的在$t=0.35 \text{ s}$时刻的压力场和局部的粒子分布图。其中，压力云图中的虚线代表水气界面，粒子分布图中的下层和上层粒子分别代表水和空气。可以发现，在重力的作用下，水气界面在垂向上做周期性的起伏运动，采用两种shifting算法得到的压力场都较为光滑，在水气界面没有明显的噪点。通过局部粒子分布图可以看到，采用本文的shift-

ing算法能够得到清晰、光滑且对称的交界面；而采用Mokos等人^[22]的shifting算法得到的界面虽然没有明显的非物理的间隙，但在波峰附近并不光滑。这再次证明了本文提出的改进的shifting算法在异相界面附近具有较高的精度。

图9给出了采用两种不同的shifting算法得到的水域中心处水面高度h_w的时历曲线(将位于水面上且距水域中心轴最近的水粒子的y坐标作为h_w)，并与文献[40]提供的解析解进行对比。从大体上来看，数值结果与解析解吻合良好，但在峰值、谷值以及相位上都有稍许偏差，这可能是由于解析解是通过认为水不可压缩求得，而本文的SPH数值解是基于水弱可压假设得到的。通过局部放大图可以看出，在后两个峰值附近，采用Mokos等人^[22]的shifting算法与解析解的差别约为2~3个粒子直径大小。相比之下，采用本文提出的shifting算法得到的曲线更加接近于解析解，尤其是在峰值和谷值更加明显。进一步地，通过式(16)求得在3 s内两种shifting算法相对于解析解的正则化均方根误差分别为0.251和0.195，说明本文提出的改进的shifting算法具有更高的精度。此外可以看到，采用Mokos等人^[22]的shifting算法得到的曲线在一些峰值和谷值附近并不光滑，这是由图8中呈现的不光滑的水气界面造成的。

如前所述，由于改进的shifting算法仅需一次而不是两次链表搜索就能计算出所有粒子的位移修正矢量，且它的实施不需要探测异相界面，因此理论上它要比Mokos等人^[22]的shifting算法更加高效。本节中通过多

图9 (网络版彩色)多相驻波模拟。分别采用Mokos等人^[22]的shifting算法和改进的shifting算法得到的水域中心处水面高度h_w的时历曲线，及其与文献[40]中的解析解的对比

Figure 9 (Color online) Multiphase standing wave simulation. Time histories of the water surface elevation h_w at the center of the water domain, obtained by respectively adopting Mokos et al's shifting algorithm^[22] and the proposed improved shifting algorithm, in comparison with the analytical solution provided in Ref. [40]

相驻波算例具体给出两种算法的效率比较。表1列出了在3种粒子间距下分别采用两种shifting算法计算500次位移修正矢量所需的总时间。可以发现,随着粒子间距减小即粒子总数增多,两种shifting算法耗时都呈增加趋势。但在不同的粒子间距下,本文提出的改进的shifting算法的耗时均明显低于Mokos等人^[22]的shifting算法,约为其一半,证明改进的shifting算法在计算效率方面也具有显著优势。

4 结论

本文针对SPH方法中已有的多相流shifting算法存在的实施复杂、在异相交界面附近精度较差等问题,提出了一种改进的多相流shifting算法。它对重质流体和轻质流体采用统一的处理方法而非分别单独处理,且无需侦测异相界面。该算法更加简单高效,还可消除

表 1 分别采用两种shifting算法计算500次位移修正矢量所需的总时间

Table 1 The total time required for 500 times calculation of the displacement correction vector using two shifting algorithms

粒子间距(m)	Mokos等人 ^[22] 的 shifting耗时 t_1 (s)	改进的shifting 耗时 t_2 (s)	t_1/t_2
$\Delta x=0.02$	6.55	3.27	2.00
$\Delta x=0.01$	23.43	11.35	2.06
$\Delta x=0.005$	80.83	41.92	1.92

不同相界面附近的非物理间隙。同时,通过略微增大异相粒子之间的shifting大小,保证了异相界面的清晰。通过对多相振荡液滴、多相旋转水滴和多相驻波等几个经典算例的模拟,证明了采用改进的多相流shifting算法得到的结果更加接近于解析解,且具有更好的能量守恒特性。

参考文献

- Ming F R, Zhang A M, Yang W S. Three-dimensional simulation on explosive load characteristics of underwater explosion near free surface (in Chinese). *Expl Shock Wave*, 2012, 32: 508–514 [明付仁, 张阿漫, 杨文山. 近自由面水下爆炸冲击载荷特性三维数值模拟. *爆炸与冲击*, 2012, 32: 508–514]
- Liu M B, Liu G R, Lam K Y, et al. Smoothed particle hydrodynamics for numerical simulation of underwater explosion. *Comput Mech*, 2003, 30: 106–118
- Wang P, Zhang A M, Ming F, et al. A novel non-reflecting boundary condition for fluid dynamics solved by smoothed particle hydrodynamics. *J Fluid Mech*, 2019, 860: 81–114
- Meng Z F, Cao X Y, Ming F R, et al. Study on the pressure characteristics of shock wave propagating across multilayer structures during underwater explosion. *Shock Vib*, 2019, (2): 1–19
- Sun P N, Li Y B, Ming F R. Numerical simulation on the motion characteristics of freely rising bubbles using smoothed particle hydrodynamics method (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2015, 64: 174701 [孙鹏楠, 李云波, 明付仁. 自由上浮气泡运动特性的光滑粒子流体动力学模拟. *物理学报*, 2015, 64: 174701]
- Zhang A, Sun P, Ming F, et al. Smoothed particle hydrodynamics and its applications in fluid-structure interactions. *J Hydrodyn*, 2017, 29: 187–216
- Cao X Y, Ming F R, Zhang A M, et al. Multi-phase SPH modelling of air effect on the dynamic flooding of a damaged cabin. *Comput Fluids*, 2018, 163: 7–19
- Colagrossi A, Landrini M. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *J Comput Phys*, 2003, 191: 448–475
- Hu X Y, Adams N A. An incompressible multi-phase SPH method. *J Comput Phys*, 2007, 227: 264–278
- Grenier N, Antuono M, Colagrossi A, et al. An Hamiltonian interface SPH formulation for multi-fluid and free surface flows. *J Comput Phys*, 2009, 228: 8380–8393
- Monaghan J J, Rafiee A. A simple SPH algorithm for multi-fluid flow with high density ratios. *Int J Numer Meth Fluids*, 2013, 71: 537–561
- Chen Z, Zong Z, Liu M B, et al. An SPH model for multiphase flows with complex interfaces and large density differences. *J Comput Phys*, 2015, 283: 169–188
- Lind S J, Stansby P K, Rogers B D, et al. Numerical predictions of water-air wave slam using incompressible-compressible smoothed particle hydrodynamics. *Appl Ocean Res*, 2015, 49: 57–71
- Lind S J, Stansby P K, Rogers B D. Incompressible-compressible flows with a transient discontinuous interface using smoothed particle hydrodynamics (SPH). *J Comput Phys*, 2016, 309: 129–147
- Yang Q Z, Xu F, Wang L, et al. An improved SPH algorithm for large density ratios multiphase flows based on Riemann solution (in Chinese). *Chin J Theor Appl Mech*, 2019, 51: 730–742 [杨秋足, 徐绯, 王璐, 等. 一种基于黎曼解处理大密度比多相流 SPH 的改进算法. *力学学报*, 2019, 51: 730–742]

- 16 Ye T, Pan D, Huang C, et al. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) for complex fluid flows: Recent developments in methodology and applications. *Phys Fluids*, 2019, 31: 011301
- 17 Chen J K, Beraun J E. A generalized smoothed particle hydrodynamics method for nonlinear dynamic problems. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2000, 190: 225–239
- 18 Liu M B, Liu G R. Restoring particle consistency in smoothed particle hydrodynamics. *Appl Numer Math*, 2006, 56: 19–36
- 19 Yan R, Xu F, Zhang Y Q. Validation of DSPH method and its application to physical problems (in Chinese). *Expl Shock Wave*, 2013, (2): 133–139 [闫蕊, 徐绯, 张岳青. DSPH 方法的有效性验证及应用. *爆炸与冲击*, 2013, (2): 133–139]
- 20 Xu R, Stansby P, Laurence D. Accuracy and stability in incompressible SPH (ISPH) based on the projection method and a new approach. *J Comput Phys*, 2009, 228: 6703–6725
- 21 Lind S J, Xu R, Stansby P K, et al. Incompressible smoothed particle hydrodynamics for free-surface flows: A generalised diffusion-based algorithm for stability and validations for impulsive flows and propagating waves. *J Comput Phys*, 2012, 231: 1499–1523
- 22 Mokos A, Rogers B D, Stansby P K. A multi-phase particle shifting algorithm for SPH simulations of violent hydrodynamics with a large number of particles. *J Hydraulic Res*, 2017, 55: 143–162
- 23 Khayyer A, Gotoh H, Shimizu Y. Comparative study on accuracy and conservation properties of two particle regularization schemes and proposal of an optimized particle shifting scheme in ISPH context. *J Comput Phys*, 2017, 332: 236–256
- 24 Sun P N, Colagrossi A, Marrone S, et al. The δ plus-SPH model: Simple procedures for a further improvement of the SPH scheme. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2017, 315: 25–49
- 25 Huang C, Long T, Li S M, et al. A kernel gradient-free SPH method with iterative particle shifting technology for modeling low-Reynolds flows around airfoils. *Eng Anal Bound Elem*, 2019, 106: 571–587
- 26 Wang Z C, Li D M, Li Y Y, et al. Numerical studies on droplet impact to wettable solid boundary based on SPH method (in Chinese). *Chin Sci Bull*, 2017, 62: 2788–2795 [王志超, 李大鸣, 李杨杨, 等. 基于SPH方法的液滴撞击可湿润固壁模拟. *科学通报*, 2017, 62: 2788–2795]
- 27 Wen H J, Zhang X, Ren B, et al. Numerical simulation of wave transformation over platform reef using SPH method (in Chinese). *Chin Sci Bull*, 2018, 63: 865–874 [温鸿杰, 张向, 任冰, 等. 规则波在岛礁地形上传播的SPH模拟. *科学通报*, 2018, 63: 865–874]
- 28 Antuono M, Colagrossi A, Marrone S, et al. Free-surface flows solved by means of SPH schemes with numerical diffusive terms. *Comput Phys Commun*, 2010, 181: 532–549
- 29 Liu G R, Liu M B. *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method*. Singapore: World Scientific, 2003
- 30 Monaghan J J, Gingold R A. Shock simulation by the particle method SPH. *J Comput Phys*, 1983, 52: 374–389
- 31 Wang P P, Meng Z F, Zhang A M, et al. Improved particle shifting technology and optimized free-surface detection method for free-surface flows in smoothed particle hydrodynamics. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2019, 357: 112580
- 32 Liu M, Zhang Z. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) for modeling fluid-structure interactions. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2019, 62: 984701
- 33 Monaghan J J. SPH without a tensile instability. *J Comput Phys*, 2000, 159: 290–311
- 34 Sun P N, Colagrossi A, Zhang A M. Numerical simulation of the self-propulsive motion of a fishlike swimming foil using the δ^+ -SPH model. *Theor Appl Mech Lett*, 2018, 8: 115–125
- 35 Khayyer A, Gotoh H, Shimizu Y. A projection-based particle method with optimized particle shifting for multiphase flows with large density ratios and discontinuous density fields. *Comput Fluids*, 2019, 179: 356–371
- 36 Skillen A, Lind S, Stansby P K, et al. Incompressible smoothed particle hydrodynamics (SPH) with reduced temporal noise and generalised Fickian smoothing applied to body-water slam and efficient wave-body interaction. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2013, 265: 163–173
- 37 Adami S, Hu X Y, Adams N A. A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics. *J Comput Phys*, 2012, 231: 7057–7075
- 38 Colagrossi A, Bouscasse B, Antuono M, et al. Particle packing algorithm for SPH schemes. *Comput Phys Commun*, 2012, 183: 1641–1653
- 39 Zainali A, Tofighi N, Shadloo M S, et al. Numerical investigation of Newtonian and non-Newtonian multiphase flows using ISPH method. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2013, 254: 99–113
- 40 Wu G X, Taylor R E. Finite element analysis of two-dimensional non-linear transient water waves. *Appl Ocean Res*, 1994, 16: 363–372

Summary for “一种改进的适用于多相流SPH模拟的粒子位移修正算法”

An improved particle shifting algorithm for multiphase flows in SPH method

Ping-Ping Wang, A-Man Zhang* & Zi-Fei Meng

College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China

* Corresponding author, E-mail: zhangaman@hrbeu.edu.cn

Multiphase flows, such as underwater explosions, rising bubbles, flooding of damaged cabins, etc., are widespread in nature and engineering. When conventional Eulerian mesh-based methods are adopted in the simulation of multiphase flows, some challenges are always encountered, including the large deformation and fragmentation of fluid, the capture of the multiphase interface, and so on. Therefore, many scholars turned their attention to meshless particle methods. As an important member of meshfree methods, smoothed particle hydrodynamics (SPH) was invented to solve astrophysical problems, and then it was applied to the simulation of hydrodynamics. In the SPH method, the computational domain is represented by a collection of particles whose properties, including density, velocity, internal energy, etc, are updated by the interaction between particles. Since the SPH method is free from the restriction of the mesh, it is good at handling large deformations of fluid. More importantly, the free-surface or multiphase interface does not need to be detected because the interface of the particles of different phases is also the interface of fluid. For these reasons, the SPH method has been widely used in the simulation of multiphase flows.

Due to the natural Lagrangian characteristic of the SPH method, particles move strictly along streamlines, which may lead to uneven particle distributions and thus reducing the numerical accuracy in some cases. To solve this problem, some particle regularization schemes have been developed in the SPH method, in which the particle shifting algorithm is the most widely used one. The core idea of the shifting algorithm is to artificially move particles from a region with a high concentration of particles to a region with a low concentration of particles in each time step, thereby obtaining uniform particle distributions throughout simulations. In the published literature, there have been several multiphase models in the SPH method, and some of them adopt the particle shifting algorithm to make the discontinuous multiphase interface more stable and accurate. At present, the most commonly used shifting algorithm for multiphase flows is proposed by Mokos et al. When it is adopted, the moving material interface should be firstly detected. Then particles belonging to different phases are shifted by applying different treatments, aiming to avoid mutual mixing of different phase materials. These treatments are generally complicated and time-consuming, and sometimes they may result in unphysical gaps near the multiphase interface, reducing the numerical accuracy and stability.

To tackle the problems mentioned above, a simpler and more accurate shifting algorithm is proposed in this paper. In this algorithm, the treatments applied to different fluids are consistent. Meanwhile, to ensure the clarity of the multiphase interface, the shifting magnitude of the particles near the interface is slightly increased. Compared with the shifting algorithm proposed by Mokos et al., the improved shifting algorithm is simpler and more efficient. More importantly, through the simulations of several classical multiphase problems in the SPH method, the proposed improved shifting algorithm is proved to be able to maintain perfectly uniform particle distributions near the interface even for long-term simulations, and thus the numerical accuracy and energy conservation are enhanced.

computational fluid dynamics, smoothed particle hydrodynamics, multiphase flows, particle shifting algorithm, particle distribution

doi: [10.1360/TB-2019-0540](https://doi.org/10.1360/TB-2019-0540)