定常 Navier-Stokes 方程基于完全重叠型区域分解的并行稳定化有限元方法

郑波, 尚月强*

西南大学数学与统计学院, 重庆 400715

E-mail: 15985200049@163.com, yqshang@swu.edu.cn

收稿日期: 2018-07-16; 接受日期: 2018-11-15; 网络出版日期: 2019-05-27; * 通信作者

重庆市基础与前沿探索项目 (批准号: cstc2018jcyjAX0305) 和中央高校基本业务费专项资金 (批准号: XDJK2018B032) 资助项目

摘要 基于完全重叠型区域分解技巧, 针对低阶 P_1 - P_1 有限元, 本文提出求解二维定常不可压缩 Navier-Stokes 方程的并行稳定化有限元方法, 其稳定项是基于两局部 Gauss 积分的压力投影. 该方法的基本思想是, 使用一局部加密的多尺度网格计算给定子区域上的局部稳定化有限元解. 理论分析上借助有限元解的局部先验误差估计, 推导出并行稳定化方法所得速度和压力解的误差界. 选取适当的算法参数比例, 该方法能取得与标准稳定化有限元方法相同的收敛阶, 同时减少大量的计算时间. 最后给出两类数值算例验证并行稳定化方法的高效性.

关键词 Navier-Stokes 方程 两局部 Gauss 积分 有限元 并行算法 稳定化方法

MSC (2010) 主题分类 76D05, 65N55, 65N30

1 引言

Navier-Stokes 方程是描述黏性 Newton 流体流动的一类典型的非线性偏微分方程, 其高效数值算法的研究一直是计算流体力学领域的研究热点. 由于流体流动的复杂性, 使得大规模计算流体力学所需的计算资源往往需要借助高性能计算机或一簇工作站才能满足其内存及计算需求, 因而有必要探索 Navier-Stokes 方程的高效并行数值方法, 以实现流体流动的数值模拟.

局部和并行有限元算法最早源自 Xu 和 Zhou^[1,2], 随后, He 等^[3,4] 和 Shang 等^[5-10] 将此算法应用到 Stokes 方程和 Navier-Stokes 方程的研究, 并取得了良好的理论与数值结果. 算法的基本思想是, 对方程解的低频分量用粗网格逼近, 而高频分量用局部的细网格并行逼近. 总之, 该类并行有限元算法实现简单, 通信需求少, 同时具有良好的并行性能.

众所周知, 利用混合有限元求解 Navier-Stokes 方程, 其速度和压力的有限元空间必须满足离散的 LBB (Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi) 条件 (也称 inf-sup 条件). 上述研究均基于 inf-sup 稳定的有限元.

英文引用格式: Zheng B, Shang Y Q. A parallel stabilized finite element method based on fully overlapping domain decomposition for the steady Navier-Stokes equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1117~1130, doi: 10.1360/N012018-00180

据本文作者所知, 目前国内外还没有基于文献 [1, 2] 思想的低阶 P_1 - P_1 元并行有限元算法的研究. 在实际的科学计算中, 由于低阶有限元对计算机内存要求小且速度和压力拥有相同的自由度, 使得它们在并行计算和多重网格中有较大的优越性. 因此, 探索基于低阶 P_1 - P_1 元的高效并行算法在不可压缩流体流动中具有实际意义. 但核心问题是低阶 P_1 - P_1 元不满足离散的 LBB 条件.

为了克服此问题, 许多学者致力于研究稳定化技巧去弱化不可压缩条件. 例如, 基于 P_1 - P_0 或 Q_1 - Q_0 元的全局/局部稳定化方法^[11], 该方法是通过添加压力在元素边界上的跳跃项来克服 LBB 条件, 难点在于选取最优的稳定化参数. 对于低阶 P_1 - P_1 元, 文献 [12-14] 介绍了基于两局部 Gauss 积分技巧的压力投影稳定化方法. 相比基于压力投影稳定化方法, 基于两局部 Gauss 积分的稳定化方法具有无需额外存储、无需进行高阶导数或边界积分、而且稳定化项只在局部单元上进行等优点. 因此, 本文将文献 [3] 中的局部和并行有限元方法与文献 [14] 中的基于两局部 Gauss 积分技巧的稳定化方法相结合, 提出一种求解二维定常不可压缩 Navier-Stokes 方程的局部和并行稳定化有限元方法. 该方法结合了两者的特征, 一方面, 我们提出的并行稳定化方法可以改善计算效率和便利性; 另一方面, 相比标准的稳定化有限元方法^[12], 我们的算法能节约大量的计算时间. 其算法的基本思想是, 在给定感兴趣的子区域上使用局部加密的多尺度网格去计算局部稳定化有限元解. 最后给出两类数值算例验证算法的高效性.

本文余下内容的结构安排如下. 第 2 节介绍 Navier-Stokes 方程的一些预备知识和基本假设. 接下来, 第 3 节给出基于两局部 Gauss 积分技巧的压力投影稳定化方法. 第 4 节基于完全重叠型区域分解技巧, 提出并设计求解二维定常不可压缩 Navier-Stokes 方程的并行稳定化有限元方法. 第 5 节给出两类数值算例去验证并行稳定化方法的高效性. 最后, 第 6 节对本文进行总结.

2 预备知识

设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 上具有 Lipschitz 连续边界的有界区域. 给定非负整数 m , 本文使用标准的 Sobolev 空间记号 $W^{m,p}(\Omega)$ 和 $W^{m,p}(\Omega)^2$ 并赋予范数 $\|\cdot\|_{m,p}$ 和半范数 $|\cdot|_{m,p}$. 对 $p = 2$, 记 $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $H^m(\Omega)^2 = W^{m,2}(\Omega)^2$ 和 $H_0^1(\Omega)^2 = \{u \in H^1(\Omega)^2 : u|_{\partial\Omega} = 0\}$. 给定子区域 $\Omega_0 \subset \Omega$, 我们通过将 $H_0^1(\Omega_0)$ 中的函数延拓到 $H_0^1(\Omega)$, 使 Ω_0 的外部为 0, 且 $H_0^1(\Omega_0)$ 视为 $H_0^1(\Omega)$ 的子空间. 本文中的字母 c 表示一个大于 0 且与网格尺寸无关的正数, 而且在不同的地方可能代表不同的值.

考虑如下二维定常不可压缩 Navier-Stokes 方程:

$$-\nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (2.2)$$

$$u = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (2.3)$$

其中 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是速度向量, $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 是压力, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是体积力, $\nu > 0$ 是黏性系数. 给定特征长度 L 和特征速度 U , 定义 Reynolds 数为 $Re = UL/\nu$.

为了介绍方程 (2.1)–(2.3) 的弱形式, 需介绍如下的 Hilbert 空间:

$$X = H_0^1(\Omega)^2, \quad Y = L^2(\Omega)^2, \quad M = L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0 \right\}, \quad D(A) = H^2(\Omega) \cap X.$$

并定义连续双线性算子 $a(\cdot, \cdot)$ 、 $d(\cdot, \cdot)$ 、 $B((\cdot, \cdot); (\cdot, \cdot))$ 和三线性算子 $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ 为

$$a(u, v) = \nu(\nabla u, \nabla v), \quad \forall u, v \in X,$$

$$\begin{aligned}
d(v, p) &= (\nabla \cdot v, p), \quad \forall v \in X, \quad p \in M, \\
B((u, p); (v, q)) &= a(u, v) - d(v, p) + d(u, q), \quad \forall (u, p), (v, q) \in X \times M, \\
b(u, v, w) &= ((u \cdot \nabla)v, w) + \frac{1}{2}((\nabla \cdot u)v, w) \\
&= \frac{1}{2}((u \cdot \nabla)v, w) - \frac{1}{2}((u \cdot \nabla)w, v), \quad \forall u, v, w \in X,
\end{aligned}$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)^2$ 或 $L^2(\Omega)$ 的标准内积. 而且三线性算子 $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ 有如下性质^[12, 14]:

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v), \quad \forall u, v, w \in X, \quad (2.4)$$

$$|b(u, v, w)| \leq N \|\nabla u\|_{0,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega} \|\nabla w\|_{0,\Omega}, \quad \forall u, v, w \in X, \quad (2.5)$$

其中

$$N = \sup_{u, v, w \in X, u, v, w \neq 0} \frac{|b(u, v, w)|}{\|\nabla u\|_{0,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega} \|\nabla w\|_{0,\Omega}}.$$

在上述记号下, 方程 (2.1)–(2.3) 的弱形式为: 求 $(u, p) \in X \times M$ 使得

$$B((u, p); (v, q)) + b(u, u, v) = (f, v), \quad \forall (v, q) \in X \times M. \quad (2.6)$$

关于变分问题 (2.6) 解的稳定性和正则性, 有如下定理 2.1.

定理 2.1^[15] 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中具有 C^2 型边界的有界区域或 $\mathbb{R}^2$ 中的凸多边形或凸多面体区域, 给定 $f \in X'$ (X' 表示 X 的对偶空间), 则变分问题 (2.6) 至少存在一对解 $(u, p) \in D(A) \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ 满足

$$\|\nabla u\|_{0,\Omega} \leq \nu^{-1} \|f\|_{-1,\Omega}, \quad \|f\|_{-1,\Omega} = \sup_{v \in X, v \neq 0} \frac{|(f, v)|}{\|\nabla v\|_{0,\Omega}}, \quad (2.7)$$

$$\|u\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega} \leq c \|f\|_{0,\Omega}. \quad (2.8)$$

如果 ν 和 f 满足下述唯一性条件:

$$\frac{N \|f\|_{-1}}{\nu^2} < 1, \quad (2.9)$$

则变分问题 (2.6) 的解 (u, p) 是唯一的.

设 $T^h(\Omega)$ 是 Ω 的一个尺寸函数为 $h(x) = h_K$ 的网格剖分, 其中 h_K 是包含 x 的单元 K 的直径, 满足

(A0) (三角剖分) 存在 $\gamma \geq 1$ 使得

$$h_\Omega^\gamma \leq ch(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.10)$$

其中 $h_\Omega = \max_{x \in \Omega} h(x)$ 是 $T^h(\Omega)$ 的最大网格尺寸. 有时为了书写方便, 我们省略 h_Ω 的下标直接使用 h 代替.

设 $X_h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)^2$ 和 $M_h(\Omega) \subset L_0^2(\Omega)$ 是对应网格 $T^h(\Omega)$ 的两个有限元空间. 定义为

$$X_h(\Omega) = \{v = (v_1, v_2)^T \in C^0(\Omega)^2 : v_i|_K \in P_1(K), i = 1, 2, \forall K \in T^h(\Omega)\},$$

$$M_h(\Omega) = \{q \in C^0(\Omega) : q|_K \in P_1(K), \forall K \in T^h(\Omega)\},$$

其中 $P_1(K)$ 表示单元 K 上的连续分片线性多项式. 令

$$X_h^0(\Omega) = X_h(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)^2, \quad M_h^0(\Omega) = M_h(\Omega) \cap L_0^2(\Omega).$$

给定子区域 $G \subset \subset \Omega_0 \subset \Omega$, 我们分别定义 $X_h(G)$ 、 $M_h(G)$ 和 $T_h(G)$ 是 $X_h(\Omega)$ 、 $M_h(\Omega)$ 和 $T_h(\Omega)$ 在 G 上的限制, 并设

$$X_h^h(G) = \{v \in X_h(\Omega) : \text{supp} v \subset \subset G\}, \quad M_h^h(G) = \{q \in M_h(\Omega) : \text{supp} q \subset \subset G\}.$$

下面给出混合有限元空间的一些基本假设 [2, 3]:

(A1) (逼近性) 对任意 $(u, p) \in H^2(G)^2 \times H^1(G)$, 存在 $(\pi_h u, \rho_h p) \in X_h(G) \times M_h(G)$ 使得

$$\begin{aligned} \|h^{-1}(u - \pi_h u)\|_{0,G} + \|u - \pi_h u\|_{1,G} &\leq ch_G \|u\|_{2,G}, \\ \|h^{-1}(p - \rho_h p)\|_{-1,G} + \|p - \rho_h p\|_{0,G} &\leq ch_G \|p\|_{1,G}. \end{aligned}$$

(A2) (逆不等式) 对任意 $(v, q) \in X_h(G) \times M_h(G)$, 有

$$\|v\|_{1,G} \leq c \|h^{-1}v\|_{0,G}, \quad \|q\|_{0,G} \leq c \|h^{-1}q\|_{-1,G}.$$

(A3) (超收敛) 给定 $G \subset \Omega$, 设 $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$, $\text{supp} \omega \subset \subset G$, 则对任意 $(u, p) \in X_h(G) \times M_h(G)$, 存在 $(v, q) \in X_h^h(G) \times M_h^h(G)$ 使得

$$\|h^{-1}(\omega u - v)\|_{1,G} \leq c \|u\|_{1,G}, \quad \|h^{-1}(\omega p - q)\|_{0,G} \leq c \|p\|_{0,G}.$$

注 2.1 本文使用的低阶 P_1 - P_1 有限元离散空间满足上述三条假设, 详细证明参见文献 [2, 4].

3 稳定化有限元方法

我们知道低阶 P_1 - P_1 有限元不满足离散的 inf-sup 条件, 其数值结果表明违背 inf-sup 条件通常会导致非物理的压力震荡. 为了弥补低阶有限元对 inf-sup 条件的不足, 本文使用基于两局部 Gauss 积分技巧的压力投影稳定化方法去弱化不可压缩条件. 稳定化项定义为

$$G(p_h, q_h) = \alpha \sum_{K \in T^h(\Omega)} \left(\int_{K,2} p_h \cdot q_h dx - \int_{K,1} p_h \cdot q_h dx \right), \quad \forall p_h, q_h \in M_h^0(\Omega), \quad (3.1)$$

其中 α 是稳定化参数满足 $0 < \alpha_0 \leq \alpha < 1$, α_0 与网格常数无关. $\int_{K,s}(\cdot)dx$ 表示单元 K 上的 s 阶局部 Gauss 积分, 该积分对于次数不超过 s ($s = 1, 2$) 的多项式准确成立.

设 $\Pi : L^2(\Omega) \rightarrow R_0$ 是局部压力投影, $R_0 \subset L^2(\Omega)$ 表示 $T^h(\Omega)$ 上的分片常数, 并且满足如下性质 [13]:

$$(p, q) = (\Pi p, q), \quad \forall p \in L^2(\Omega), \quad q \in R_0, \quad (3.2)$$

$$\|\Pi p\|_{0,\Omega} \leq c \|p\|_{0,\Omega}, \quad \forall p \in L^2(\Omega), \quad (3.3)$$

$$\|p - \Pi p\|_{0,\Omega} \leq ch \|p\|_{1,\Omega}, \quad \forall p \in H^1(\Omega), \quad (3.4)$$

则可重写稳定化项 (3.1) 为

$$G(p_h, q_h) = \alpha(p_h - \Pi p_h, q_h - \Pi q_h). \quad (3.5)$$

基于以上准备, 变分问题 (2.6) 的稳定化数值格式为: 求 $(u_h, p_h) \in X_h^0(\Omega) \times M_h^0(\Omega)$ 使得

$$B_h((u_h, p_h); (v, q)) + b(u_h, u_h, v) = (f, v), \quad \forall (v, q) \in X_h^0(\Omega) \times M_h^0(\Omega), \quad (3.6)$$

其中

$$B_h((u_h, p_h); (v, q)) = a(u_h, v) - d(v, p_h) + d(u_h, q) + G(p_h, q)$$

是离散的稳定化双线性形式.

仿照文献 [13, 16] 的证明思想和过程, 我们很容易得到下列定理 3.1.

定理 3.1 假设 (3.2)–(3.4) 成立, 则存在一个与网格尺寸无关的正数 β , 使得离散的稳定化双线性形式 B_h 满足

$$|B_h((u, p); (v, q))| \leq c(\|\nabla u\|_{0,\Omega} + \|p\|_{0,\Omega})(\|\nabla v\|_{0,\Omega} + \|q\|_{0,\Omega}), \quad \forall (u, p), (v, q) \in X \times M, \quad (3.7)$$

$$\beta(\|\nabla u_h\|_{0,\Omega} + \|p_h\|_{0,\Omega}) \leq \sup_{(v,q) \in X_h^0(\Omega) \times M_h^0(\Omega), (v,q) \neq (0,0)} \frac{|B_h((u_h, p_h); (v, q))|}{\|\nabla v\|_{0,\Omega} + \|q\|_{0,\Omega}}, \quad \forall (u_h, p_h) \in X_h^0(\Omega) \times M_h^0(\Omega). \quad (3.8)$$

在定理 2.1 和 3.1 的条件下, 我们有下述稳定性和误差估计.

定理 3.2 ^[11–13] 设 (u, p) 是方程 (2.6) 的准确解, 则数值格式 (3.6) 的解 (u_h, p_h) 满足下述稳定性和误差估计:

$$\|\nabla u_h\|_{0,\Omega} \leq \nu^{-1} \|f\|_{-1,\Omega}, \quad (3.9)$$

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq ch. \quad (3.10)$$

为了进一步估计 $\|u - u_h\|_{0,\Omega} + \|p - p_h\|_{-1,\Omega}$, 需借助 Aubin-Nitsche 对偶理论. 对 $(\varphi, \phi) \in L^2(\Omega) \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$, 考虑线性化的对偶 Navier-Stokes 问题为: 求 $(\Phi, \Psi) \in (H^2(\Omega)^2 \cap H_0^1(\Omega)^2) \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ 使得

$$B_h((v, q); (\Phi, \Psi)) + b(u_h, v, \Phi) + b(v, u_h, \Phi) = (\varphi, v) + (\phi, q), \quad \forall (v, q) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega). \quad (3.11)$$

对于 $h \in (0, h_0]$, 上述对偶问题 (3.11) 存在唯一解 (Φ, Ψ) 满足 (参见文献 [17])

$$\|\Phi\|_{2,\Omega} + \|\Psi\|_{1,\Omega} \leq c(\|\varphi\|_{0,\Omega} + \|\phi\|_{1,\Omega}). \quad (3.12)$$

问题 (3.11) 的有限元解 $(\Phi_h, \Psi_h) \in X_h^0(\Omega) \times M_h^0(\Omega)$ 满足

$$B_h((v, q); (\Phi_h, \Psi_h)) + b(u_h, v, \Phi_h) + b(v, u_h, \Phi_h) = (\varphi, v) + (\phi, q), \quad \forall (v, q) \in X_h^0(\Omega) \times M_h^0(\Omega), \quad (3.13)$$

并且有如下估计:

$$\|\nabla(\Phi - \Phi_h)\|_{0,\Omega} + \|\Psi - \Psi_h\|_{0,\Omega} \leq ch(\|\varphi\|_{0,\Omega} + \|\phi\|_{1,\Omega}), \quad (3.14)$$

$$\|\nabla\Phi_h\|_{0,\Omega} + \|\Psi_h\|_{0,\Omega} \leq c(\|\varphi\|_{0,\Omega} + \|\phi\|_{1,\Omega}). \quad (3.15)$$

定理 3.3 在定理 3.2 的条件下, 数值格式 (3.6) 的解 (u_h, p_h) 满足

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} + \|p - p_h\|_{-1,\Omega} \leq ch^2. \quad (3.16)$$

证明 (2.6) 与 (3.6) 相减并取 $(v, q) = (\Phi_h, \Psi_h)$ 可得

$$\begin{aligned} & B_h((u - u_h, p - p_h); (\Phi_h, \Psi_h)) + b(u - u_h, u_h, \Phi_h) + b(u_h, u - u_h, \Phi_h) + b(u - u_h, u - u_h, \Phi_h) \\ & = G(p, \Psi_h). \end{aligned} \quad (3.17)$$

另外, 在 (3.11) 中令 $(v, q) = (u - u_h, p - p_h)$ 并与 (3.17) 相结合得

$$\begin{aligned} (\varphi, u - u_h) + (\phi, p - p_h) &= B_h((u - u_h, p - p_h); (\Phi - \Phi_h, \Psi - \Psi_h)) + b(u_h, u - u_h, \Phi - \Phi_h) \\ &+ b(u - u_h, u_h, \Phi - \Phi_h) + b(u - u_h, u - u_h, -\Phi_h) + G(p, \Psi_h). \end{aligned} \quad (3.18)$$

运用定理 3.2、(3.7)、(2.5)、(3.3)、(3.4)、(3.12)、(3.14)、(3.15) 和三角不等式, 我们有

$$\begin{aligned} & B_h((u - u_h, p - p_h); (\Phi - \Phi_h, \Psi - \Psi_h)) \\ & \leq c(\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega})(\|\nabla(\Phi - \Phi_h)\|_{0,\Omega} + \|\Psi - \Psi_h\|_{0,\Omega}) \\ & \leq ch^2(\|\varphi\|_{0,\Omega} + \|\phi\|_{1,\Omega}), \\ & b(u_h, u - u_h, \Phi - \Phi_h) + b(u - u_h, u_h, \Phi - \Phi_h) \\ & \leq ch\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\Omega}(\|\varphi\|_{0,\Omega} + \|\phi\|_{1,\Omega}) \\ & \leq ch^2(\|\varphi\|_{0,\Omega} + \|\phi\|_{1,\Omega}), \\ & b(u - u_h, u - u_h, -\Phi_h) \leq N\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\Omega}^2\|\nabla\Phi_h\|_{0,\Omega} \leq ch^2(\|\varphi\|_{0,\Omega} + \|\phi\|_{1,\Omega}), \\ & G(p, \Psi_h) = G(p, \Psi) - G(p, \Psi - \Psi_h) \\ & \leq c\alpha h^2\|p\|_{1,\Omega}\|\Psi\|_{1,\Omega} + \alpha((I - \Pi)p, (I - \Pi)(\Psi - \Psi_h)) \\ & \leq c\alpha h^2\|p\|_{1,\Omega}\|\Psi\|_{1,\Omega} + c\alpha\|(I - \Pi)p\|_{0,\Omega}\|(I - \Pi)(\Psi - \Psi_h)\|_{0,\Omega} \\ & \leq c\alpha h^2\|p\|_{1,\Omega}\|\Psi\|_{1,\Omega} + c\alpha h\|p\|_{1,\Omega}\|\Psi - \Psi_h\|_{0,\Omega} \\ & \leq c\alpha h^2\|p\|_{1,\Omega}\|\Psi\|_{1,\Omega} + c\alpha h^2\|p\|_{1,\Omega}(\|\varphi\|_{0,\Omega} + \|\phi\|_{1,\Omega}) \\ & \leq ch^2(\|\varphi\|_{0,\Omega} + \|\phi\|_{1,\Omega}). \end{aligned}$$

最后将上述不等式代入 (3.18), 可得

$$(\varphi, u - u_h) + (\phi, p - p_h) \leq ch^2(\|\varphi\|_{0,\Omega} + \|\phi\|_{1,\Omega}).$$

进一步, 我们有

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{0,\Omega} + \|p - p_h\|_{-1,\Omega} &= \sup_{(\varphi, \phi) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega), (\varphi, \phi) \neq (0,0)} \frac{|(\varphi, u - u_h) + (\phi, p - p_h)|}{\|\varphi\|_{0,\Omega} + \|\phi\|_{1,\Omega}} \\ &\leq \sup_{(\varphi, \phi) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega), (\varphi, \phi) \neq (0,0)} \frac{ch^2(\|\varphi\|_{0,\Omega} + \|\phi\|_{1,\Omega})}{\|\varphi\|_{0,\Omega} + \|\phi\|_{1,\Omega}} \\ &\leq ch^2. \end{aligned}$$

证明完成. □

4 并行稳定化有限元算法

本节首先研究基于两局部 Gauss 积分技巧的局部稳定化有限元算法. 然后结合完全重叠型区域分解方法, 提出数值求解二维定常 Navier-Stokes 方程的并行稳定化有限元算法.

4.1 局部稳定化有限元算法

设 $D \subset \subset \Omega_0 \subset \Omega$, $T^H(\Omega)$ 为网格尺寸为 $H \gg h$ 的正则网格; $T^h(\Omega_0)$ 为网格尺寸为 h 的正则网格; $T_H^h(\Omega)$ 是通过局部加密 $T^H(\Omega)$ 得到的多尺度网格, 在子区域 D 内的尺度为 h , 在远离子区域 D 的尺度为 H . 记 $T_H^h(\Omega)$ 对应的有限元空间为 $X_{H,h}^0(\Omega) \subset X$, $M_{H,h}^0(\Omega) \subset M$. 在本文分析中, 我们使用辅助网格 $T^h(\Omega)$, 它与 $T^H(\Omega)$ 嵌套并且在 Ω_0 与 $T_H^h(\Omega)$ 一致. 基于区域分解技巧的局部稳定化有限元算法为如下的算法 1.

算法 1 局部稳定化有限元算法

求解 $(u_H^h, p_H^h) \in X_{H,h}^0(\Omega) \times M_{H,h}^0(\Omega)$ 使得

$$B_h((u_H^h, p_H^h); (v, q)) + b(u_H^h, u_H^h, v) = (f, v), \quad \forall (v, q) \in X_{H,h}^0(\Omega) \times M_{H,h}^0(\Omega). \quad (4.1)$$

为了估计算法 1 的局部误差, 需介绍如下引理.

引理 4.1 设 $f \in X'$, $D \subset \subset \Omega_0 \subset \Omega$, 假设 (A0)–(A3) 和定理 3.1 成立. 若 $\alpha = \mathcal{O}(h)$ 和 $(w, r) \in X_h(\Omega) \times M_h(\Omega)$ 满足

$$B_h((w, r); (v, q)) + b(u_h, w, v) + b(w, u_h, v) = (f, v), \quad \forall (v, q) \in X_0^h(\Omega_0) \times M_0^h(\Omega_0),$$

则有如下局部误差估计:

$$\|\nabla w\|_{0,D} + \|r\|_{0,D} \leq c(\|w\|_{0,\Omega_0} + \|r\|_{-1,\Omega_0} + \|f\|_{-1,\Omega_0}). \quad (4.2)$$

证明 证明思路和过程与文献 [4] 类似. 对稳定化项, 有如下估计:

$$G(r, q) \leq ch\|r\|_{0,\Omega_0}\|q\|_{0,\Omega_0},$$

然后结合 (3.8) 即可完成证明, 详细过程参见文献 [3]. □

定理 4.1 假设定理 3.2、3.3 和引理 4.1 的条件成立, (u_H^h, p_H^h) 是算法 1 得到的局部稳定化有限元解, 则对 $D \subset \subset \Omega_0 \subset \Omega$, 有

$$\|\nabla(u - u_H^h)\|_{0,D} + \|p - p_H^h\|_{0,D} \leq c(h + H^2). \quad (4.3)$$

证明 由于辅助网格 $T^h(\Omega)$ 与 $T^H(\Omega)$ 嵌套并且在 Ω_0 与 $T_H^h(\Omega)$ 一致, (3.6) 与 (4.1) 相减可得

$$B_h((u_h - u_H^h, p_h - p_H^h); (v, q)) + b(u_h - u_H^h, u_h, v) + b(u_h, u_h - u_H^h, v) = b(u_h - u_H^h, u_h - u_H^h, v).$$

应用引理 4.1、定理 3.2、3.3 和 (2.5) 及三角不等式, 有

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_h - u_H^h)\|_{0,D} + \|p_h - p_H^h\|_{0,D} &\leq c(\|u_h - u_H^h\|_{0,\Omega_0} + \|p_h - p_H^h\|_{-1,\Omega_0} + N\|\nabla(u_h - u_H^h)\|_{0,\Omega_0}^2) \\ &\leq c(\|u - u_h\|_{0,\Omega_0} + \|u - u_H^h\|_{0,\Omega_0} + \|p - p_h\|_{-1,\Omega_0} + \|p - p_H^h\|_{-1,\Omega_0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + c(N\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\Omega_0}^2 + N\|\nabla(u - u_H^h)\|_{0,\Omega_0}^2) \\
 & \leq c(h^2 + H^2) \leq cH^2.
 \end{aligned}$$

最后, 结合上式与 (3.10), 我们得到 (4.3). 证明完成. $\square$

4.2 并行稳定化有限元算法

基于上述的局部稳定化有限元算法, 我们可以顺理成章地发展并行稳定化有限元算法. 首先, 给定初始粗网格 $T^H(\Omega)$, 将区域 Ω 分解为一些不相交的子区域 $D_1, \dots, D_J$, 然后将每个子区域向外拓展一定尺寸得到 Ω_j 使得 $D_j \subset \subset \Omega_j \subset \Omega$. 对每个 Ω_j 使用局部加密和自适应过程得到网格尺寸为 h 的正则局部加密的多尺度网格 $T_j^{H,h}(\Omega)$. 这些局部加密的多尺度网格 $T_j^{H,h}(\Omega)$ 构成了 Ω 的完全区域分解.

设 $X_{H,h,j}^0(\Omega) \subset X$ 和 $M_{H,h,j}^0(\Omega) \subset M$ 是对应于网格 $T_j^{H,h}(\Omega)$ 的两个有限元空间. 基于完全重叠型区域分解技巧, 我们提出的并行稳定化有限元算法设计见如下的算法 2.

算法 2 并行稳定化有限元算法

(1) 并行求解 $(u_{H,j}^h, p_{H,j}^h) \in X_{H,h,j}^0(\Omega) \times M_{H,h,j}^0(\Omega)$ ($j = 1, 2, \dots, J$) 使得

$$B_h((u_{H,j}^h, p_{H,j}^h); (v, q)) + b(u_{H,j}^h, u_{H,j}^h, v) = (f, v), \quad \forall (v, q) \in X_{H,h,j}^0(\Omega) \times M_{H,h,j}^0(\Omega). \quad (4.4)$$

(2) 在子区域 D_j 上取 $(u^h, p^h) = (u_{H,j}^h, p_{H,j}^h)$ ($j = 1, 2, \dots, J$).

定义分片范数为

$$\|\nabla(u - u^h)\|_{0,\Omega} = \left(\sum_{j=1}^J \|\nabla(u - u^h)\|_{0,D_j}^2 \right)^{1/2}, \quad \|p - p^h\|_{0,\Omega} = \left(\sum_{j=1}^J \|p - p^h\|_{0,D_j}^2 \right)^{1/2}.$$

应用定理 4.1, 我们有如下误差界.

定理 4.2 设定理 3.2 的条件成立, 则算法 2 得到的近似解 (u^h, p^h) 满足

$$\|\nabla(u - u^h)\|_{0,\Omega} + \|p - p^h\|_{0,\Omega} \leq c(h + H^2). \quad (4.5)$$

证明 由定理 4.1 得

$$\|\nabla(u - u^h)\|_{0,D_j} + \|p - p^h\|_{0,D_j} \leq c(h + H^2), \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

集合所有子区域 D_j ($j = 1, 2, \dots, J$) 即可得到 (4.5). $\square$

注 4.1 定理 4.2 表明, 若取粗网格和细网格比例为 $H = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}})$, 我们的并行稳定化算法可获得与标准稳定化有限元方法^[12] 相同的收敛阶. 由于算法 2 是在局部细网格上并行求解非线性 Navier-Stokes 问题, 相比标准稳定化有限元方法, 我们算法可以节约计算时间.

5 数值实验

本节以有限元软件 FreeFem++^[18] 为平台, 主要通过两类数值算例来验证理论预测的准确性和并行稳定化算法的高效性. 在实验中, 有限元离散化使用低阶 P_1 - P_1 元. 非线性迭代的迭代限差为 10^{-6} ,

稳定化的非线性 Navier-Stokes 方程使用经典的 Oseen 迭代法求解, 即已知 $u_{H,j}^{h,n-1} \in X_{H,h,j}^0(\Omega)$, 求解 $(u_{H,j}^{h,n}, p_{H,j}^{h,n}) \in X_{H,h,j}^0(\Omega) \times M_{H,h,j}^0(\Omega)$ 使得

$$B_h((u_{H,j}^{h,n}, p_{H,j}^{h,n}); (v, q)) + b(u_{H,j}^{h,n-1}, u_{H,j}^{h,n}, v) = (f, v), \quad \forall (v, q) \in X_{H,h,j}^0(\Omega) \times M_{H,h,j}^0(\Omega), \quad j = 1, \dots, J,$$

其中基于两局部 Gauss 积分技巧的稳定化项定义为

$$G(p_{H,j}^{h,n}, q) = \alpha \sum_{K \in T_j^{H,h}(\Omega)} \left(\int_{K,2} p_{H,j}^{h,n} \cdot q dx - \int_{K,1} p_{H,j}^{h,n} \cdot q dx \right), \quad \forall q \in M_{H,h,j}^0(\Omega), \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

5.1 解析解

本节数值算例中, 求解区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, 其准确解为

$$\begin{aligned} u_1 &= 10x^2(x-1)^2y(y-1)(2y-1), \\ u_2 &= -10y^2(y-1)^2x(x-1)(2x-1), \\ p &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

在计算过程中参数取值为 $\nu = 0.01$ 和 $\alpha = h$. 定理 4.2 推导的误差估计在理论上预测了能量范数意义下 $u - u^h$ 的 H^1 范数与 $p - p^h$ 的 L^2 范数有 $\mathcal{O}(h)$ 的收敛阶.

首先, 为了检验并行稳定化算法的渐近误差, 我们将求解区域 Ω 分解为如下 4 个互不相交的子区域:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad D_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ D_3 &= \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad D_4 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right), \end{aligned}$$

然后将每个子区域 D_j ($j = 1, 2, 3, 4$) 向外扩展尺寸为 h 得到区域 Ω_j ($j = 1, 2, 3, 4$). 我们在局部加密的多尺度网格 $T_j^{H,h}(\Omega)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) 上独立使用算法 2 求解每个子区域上的稳定化有限元解, 选取细网格尺寸 $h = n^{-2}$ ($n = 4, 6, 8, 10, 12$) 和粗网格尺寸 $H = 0.5h^{\frac{1}{2}}$. 表 1 中, 数值结果列出速度和压力的相对误差、能量范数意义下的收敛速度以及 CPU 时间. 其中 CPU 时间是算法 2 在每个子区域上所花的最大时间, 包括网格生成和计算求解时间. 收敛速度由公式 $\frac{\log(E_i/E_{i+1})}{\log(h_i/h_{i+1})}$ 计算得到, E_i 和 E_{i+1} 分别表示 h_i 和 h_{i+1} 所对应的相对误差. 从表 1 可以观察到我们提出的并行稳定化有限元算法在能量范数意义下是一阶收敛的, 达到了我们预想的结果. 这充分验证了理论预测的准确性和算法的有效性.

其次, 为了对比并行稳定化有限元方法的优越性, 我们取相同的网格尺寸和黏性系数然后与标准稳定化有限元方法^[12]进行比较, 数值结果如表 2 所示. 比较表 1 和 2 发现, 我们提出的并行稳定化

表 1 并行稳定化方法计算的近似解误差及其收敛率, $\nu = 0.01$, $\alpha = h$, 稳定化的 P_1 - P_1 元

h	H	CPU	$\frac{\ \nabla(u-u^h)\ _{0,\Omega}}{\ \nabla u\ _{0,\Omega}}$	$\frac{\ p-p^h\ _{0,\Omega}}{\ p\ _{0,\Omega}}$	uH^1 -收敛率	pL^2 -收敛率
1/16	1/8	0.609	0.2153560	0.008130810		
1/36	1/12	2.356	0.0853884	0.002393270	1.14077	1.50814
1/64	1/16	6.209	0.0430006	0.000929842	1.19228	1.64314
1/100	1/20	13.275	0.0270973	0.000509592	1.03472	1.34757
1/144	1/24	27.441	0.0181086	0.000294606	1.10532	1.50276

有限元算法所得解的收敛阶与标准稳定化有限元方法^[12]得到的收敛阶几乎保持一致. 鉴于我们的算法是在子区域上并行求解非线性 Navier-Stokes 方程, 计算时间比标准稳定化方法减少几乎一半. 但是当细网格尺寸为 $h = 1/144$ 时, 标准稳定化有限元方法^[12]将会导致计算机内存不足而无法计算.

接下来, 为了进一步比较并行稳定化有限元算法与标准稳定化有限元方法^[12]对不同黏性系数的影响, 我们取粗细网格尺寸分别为 $H = 1/20$ 和 $h = 1/100$, 然后计算黏性系数 ν 为 1、0.1、0.01、0.005 和 0.001 时的近似解, 数值结果展示在表 3 中, 其中 it 表示非线性迭代次数. 从表 3 可以发现, 两种稳定化方法所计算的近似解对速度的精度来说, 并行稳定化算法略好. 当 $\nu \geq 0.01$ 时, 并行稳定化算法对压力近似解的精度略次于标准稳定化有限元方法^[12]; 然而当 $\nu < 0.01$ 时, 本文提出的算法不但对压力近似解的精度略有改善, 而且还节约几乎一半的 CPU 时间.

再者, 为了比较不同子区域对有限元近似解的影响. 我们将解区域分为 2×2 、 2×4 和 4×4 个不同子区域, 然后分别在不同子区域上应用算法 2 计算速度和压力的有限元近似解. 数值结果如图 1 所示, 从图 1 可以观察到, 速度与压力近似解之间无太大差异, 收敛阶都与理论保持一致. 这验证了我们并行稳定化算法对子区域数量的鲁棒性.

最后, 为了比较稳定化参数对我们提出的算法的影响, 我们设网格尺寸为 $H = 1/24$, $h = 1/144$, 然后使用算法 2 计算稳定化参数 α 取值为 $0.1h$ 、 $0.1H$ 、 h 和 H 时的有限元近似解, 数值结果如图 2 所示. 从图 2 可以观察到, 并行稳定化算法在不同的稳定化参数下计算的近似解精度之间差距很小. 这说明了稳定化参数对我们的算法影响不大.

表 2 标准稳定化方法计算的近似解误差及其收敛率, $\nu = 0.01$, 稳定化的 P_1 - P_1 元

h	CPU	$\frac{\ \nabla(u-u^h)\ _{0,\Omega}}{\ \nabla u\ _{0,\Omega}}$	$\frac{\ p-p^h\ _{0,\Omega}}{\ p\ _{0,\Omega}}$	uH^1 - 收敛率	pL^2 - 收敛率
1/16	0.921	0.1827740	0.006557270		
1/36	4.602	0.0793620	0.001655630	1.02874	1.69730
1/64	10.966	0.0442222	0.000656990	1.01639	1.60641
1/100	30.076	0.0281568	0.000331921	1.01154	1.52989
1/144	—	—	—	—	—

表 3 两种算法的近似解误差, $h = 1/100$, $H = 1/20$, 稳定化的 P_1 - P_1 元

算法	ν	it	CPU	$\frac{\ \nabla(u-u^h)\ _{0,\Omega}}{\ \nabla u\ _{0,\Omega}}$	$\frac{\ p-p^h\ _{0,\Omega}}{\ p\ _{0,\Omega}}$
算法 2	1.000	3	7.716	0.0249643	0.015680400
	0.100	2	9.812	0.0258880	0.031646300
	0.010	4	13.275	0.0270973	0.000509592
	0.005	5	17.909	0.0271840	0.000276544
	0.001	10	34.294	0.0294760	0.000131723
标准有限元方法	1.000	2	20.389	0.0279118	0.001366520
	0.100	3	23.790	0.0279695	0.000601175
	0.010	4	30.076	0.0281568	0.000331921
	0.005	5	34.445	0.0282690	0.000280482
	0.001	8	58.188	0.0286790	0.000203416

图 1 并行稳定化算法对不同子区域的收敛率. (a) 速度; (b) 压力

图 2 近似解对不同稳定化参数的影响. (a) 速度; (b) 压力

5.2 方腔驱动流

众所周知, 方腔驱动流是测试 Navier-Stokes 方程数值求解方法有效性的经典物理算例之一. 因此, 我们使用方腔驱动流来测试本文提出的并行稳定化有限元算法的有效性. 设外部体积力 $f = 0$, 考虑定义单位正方形上的二维不可压缩方腔驱动流问题. 边界条件和几何图形绘制如图 3 所示.

接下来, 设网格尺寸为 $h = 1/256$, $H = 1/128$, 然后使用算法 2 和标准稳定化有限元方法^[12]来计算 Reynolds 数 $Re = 100$ 的近似解. 图 4 分别绘制了并行稳定化算法在 4 个子区域和 16 个子区域时垂直中心线上的速度分量 u_1 和水平中心线上速度分量 u_2 , 并与 Ghia 等^[19]的基准数据进行了对比. 从图 4 发现, 并行稳定化算法计算的近似解精度与 Ghia 等^[19]的结果相媲美, 但 Ghia 等^[19]使用的网格是 257×257 , 而本文使用的网格尺寸是 $h = 1/256$ 和 $H = 1/128$ 的 4 个和 16 个子区域, 较前者, 本文提出的算法大大减少了存储空间和计算时间. 图 5 分别绘制了并行稳定化有限元算法在 4 个子

图 3 方腔驱动流的几何图形和边界条件

图 4 方腔驱动流当 $Re = 100$ 时垂直中线上的速度分量 u_1 (a) 和水平中线上的速度分量 u_2 (b)

图 5 方腔驱动流当 $Re = 100$ 时 4 个子区域 (a)、16 个子区域 (b) 和标准稳定化有限元方法 (c) 计算所得到的流线

区域、16 个子区域和标准稳定化有限元方法^[12]的流线. 从图 5 可以观察到它们之间所绘制的流线是一致的. 因此, 方腔驱动流问题验证了算法的有效性.

6 结束语

本文将基于两局部 Gauss 积分技巧的压力投影稳定化有限元方法与完全重叠型区域分解方法相结合, 提出了一种求解二维定常不可压缩 Navier-Stokes 方程基于低阶 P_1 - P_1 有限元的并行稳定化有限元方法. 该方法结合了两者的优点. 选取合适的网格尺寸比例, 我们提出的并行稳定化方法能取得与标准稳定化方法相同的收敛阶, 同时节约大量的 CPU 时间. 最后, 已知解析解和方腔驱动流的数值实验验证了并行稳定化有限元算法的高效性.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参考文献

- 1 Xu J C, Zhou A H. Local and parallel finite element algorithms based on two-grid discretizations for nonlinear problem. *Adv Comput Math*, 2001, 14: 293–327
- 2 Xu J C, Zhou A H. Local and parallel finite element algorithms based on two-grid discretizations. *Math Comp*, 2000, 69: 881–909
- 3 He Y N, Xu J C, Zhou A H, et al. Local and parallel finite element algorithms for the Stokes problem. *Numer Math*, 2008, 109: 415–434
- 4 He Y N, Xu J C, Zhou A H. Local and parallel finite element algorithms for the Navier-Stokes problem. *J Comput Math*, 2006, 24: 227–238
- 5 Shang Y Q, He Y N, Kim D W, et al. A new parallel finite element algorithm for the stationary Navier-Stokes equations. *Finite Elem Anal Des*, 2011, 47: 1262–1279
- 6 Shang Y Q, He Y N. Parallel finite element algorithm based on full domain partition for stationary Stokes equations. *Appl Math Mech (English Ed)*, 2010, 31: 643–650
- 7 Shang Y Q, Wang K. Local and parallel finite element algorithms based on two-grid discretizations for the transient Stokes equations. *Numer Algorithms*, 2010, 54: 195–218
- 8 Shang Y Q, Qin J. Parallel finite element variational multiscale algorithms for incompressible flow at high Reynolds numbers. *Appl Numer Math*, 2017, 117: 1–21
- 9 Shang Y Q. A parallel subgrid stabilized finite element method based on fully overlapping domain decomposition for the Navier-Stokes equations. *J Math Anal Appl*, 2013, 403: 667–679
- 10 Shang Y Q. A parallel finite element variational multiscale method based on fully overlapping domain decomposition for incompressible flows. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 2015, 31: 856–875
- 11 He Y N, Wang A W, Mei L Q. Stabilized finite-element method for the stationary Navier-Stokes equations. *J Engrg Math*, 2005, 51: 367–380
- 12 He Y N, Li J. A stabilized finite element method based on local polynomial pressure projection for the stationary Navier-Stokes equations. *Appl Numer Math*, 2008, 58: 1503–1514
- 13 Li J, He Y N. A stabilized finite element method based on two local Gauss integrations for the Stokes equations. *J Comput Appl Math*, 2008, 214: 58–65
- 14 Li J. Investigations on two kinds of two-level stabilized finite element methods for the stationary Navier-Stokes equations. *Appl Math Comput*, 2006, 182: 1470–1481
- 15 Shang Y Q, He Y N. Parallel iterative finite element algorithms based on full domain partition for the stationary Navier-Stokes equations. *Appl Numer Math*, 2010, 60: 719–737
- 16 Kechkar N, Silvester D. Analysis of locally stabilized mixed finite element methods for the Stokes problem. *Math Comp*, 1992, 58: 1–10
- 17 Girault V, Raviart P A. *Finite Element Method for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1987
- 18 Hecht F. New development in FreeFem++. *J Numer Math*, 2012, 20: 251–265
- 19 Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J Comput Phys*, 1982, 48: 387–411

A parallel stabilized finite element method based on fully overlapping domain decomposition for the steady Navier-Stokes equations

Bo Zheng & Yueqiang Shang

Abstract Based on a fully overlapping domain decomposition technique, a parallel stabilized finite element method is presented to solve the two-dimensional steady incompressible Navier-Stokes equations by using the lowest equal-order P_1 - P_1 finite elements, where the stabilization term is the pressure projection stabilization based on two local Gauss integrations. The basic idea of this method is to use a locally refined multiscale mesh to compute a local stabilized finite element solution in the given subregion of interest. The local a priori error estimate of the finite element solutions is used in theoretical analysis. Error bounds for the velocity and the pressure solutions obtained by the parallel stabilized method are estimated. By choosing appropriate algorithmic parameter scalings, the method can yield a convergence rate of the same order as the standard stabilized finite element method with a massive reduction in computational time. Two kinds of numerical experiments are given to verify the high efficiency of the parallel stabilized algorithm.

Keywords Navier-Stokes equation, two local Gauss integrations, finite element, parallel algorithm, stabilization method

MSC(2010) 76D05, 65N55, 65N30

doi: 10.1360/N012018-00180