逆卡诺循环与逆 p - V 循环性能分析

过增元*, 赵甜, 薛提微

清华大学工程力学系, 热科学与工程教育部重点实验室, 北京 100084

* E-mail: demgzy@tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2018-04-02; 接受日期: 2018-07-17; 网络版发表日期: 2018-09-04

国家自然科学基金创新研究群体项目(批准号: 51621062)资助

摘要 热力逆循环是消耗机械功, 并将热量从低温热源输送至高温热源的循环, 其性能以性能系数表征. 通常认为一定温限内逆卡诺循环具有最佳的性能, 即它具有最大的性能系数. 本文通过不同的分析方法及算例分析得到了一定温限内逆卡诺循环的COP并不是最大的结论. 此外, 类似于热力正循环中卡诺循环的构造方法, 本文构造了一个新的逆循环, 称为逆 p - V 循环. 在相同温限的条件下, 它的性能系数远远大于逆卡诺循环的性能系数. 借助于此循环可以说明机械功也具有品位, 其品位由功源的压力表征.

关键词 热力循环, 逆卡诺循环, 性能系数, 斯特林循环

1 引言

工程热力学是研究热能与机械能相互转换的基本规律和方法, 以及提高能量转换效率途径的学科^[1~3]. 热能与机械能间的相互转换需要通过热力循环来实现. 通常将从外界吸收热量, 对外界输出净功的循环称为正循环(热机循环), 而从外界吸取净功, 对外输出热量的循环称为逆循环(热泵/制冷循环). 正循环的性能判据一般是热效率 η , 其定义为循环输出的净功与吸收的热量之比, 而逆循环的性能判据则是性能系数(coefficient of performance, COP), 对于热泵循环, COP等于循环输出的热量与输入的净功之比, 对于制冷循环则等于循环吸收的热量与输入的净功之比^[4].

在分析比较不同循环的性能时, 应该注意两点. 第一点是, 只有在相同的前提条件下才能对不同热力循

环的性能进行比较. 例如热力学中有一条熟知的结论: 与其他各种可逆正向热力循环相比, 卡诺循环具有最高的热效率^[4]. 将卡诺循环与其他各种热力循环进行比较的相同前提是“两个温限”, 即: 参与比较的其他可逆循环中所有高温热源的温度均不高于卡诺循环的热源温度; 所有低温热源的温度均不低于卡诺循环的冷源温度. 由于可逆热力循环要求任何时刻体系处于平衡态, 所以工质的温度与吸热/放热热源的温度总是相等, 保证了所有参与比较的热力循环中温度不会超出给定温限的范围. 应该注意的第二点则是, 不同循环性能比较的方式有两种, 一种是相同形式的可逆与不可逆循环性能的比较, 另一种则是不同形式的可逆循环性能的比较. 由于相同形式的可逆循环性能显然高于不可逆循环, 所以本文只讨论不同形式的可逆循环之间的性能比较.

引用格式: 过增元, 赵甜, 薛提微. 逆卡诺循环与逆 p - V 循环性能分析. 中国科学: 技术科学, 2018, 48: 1190–1198

Guo Z Y, Zhao T, Xue T W. The performance analysis of reversed Carnot cycle and reversed p - V cycle (in Chinese). Sci Sin Tech, 2018, 48: 1190–1198, doi: 10.1360/N092018-00081

本文首先分析一定温限前提下逆卡诺循环的COP值, 讨论它与一般的逆循环COP值的大小关系. 在此基础上, 仿照热力循环中卡诺循环的构造思路, 提出新的逆循环, 称为逆 p - V 循环, 并导出其性能系数的计算式, 以及与逆卡诺循环进行比较.

2 逆卡诺循环的热力学分析

2.1 关于逆卡诺循环性能系数的现有论述

热力学教材或专著中关于逆卡诺循环的性能叙述通常为: “在两个相同温限条件下的所有热力逆循环(制冷或热泵循环)中, 逆卡诺循环的性能系数最大^[1,3,5~7]”. 理由之一是认为, 可以用证明卡诺循环是两个相同温限条件下的最优循环的方法证明逆卡诺循环是两个相同温限条件下的最优逆循环^[2,3]. 理由之二是通过图1所示的空气压缩制冷循环的比较的方法^[1,5,6]证明. 也有研究表明卡诺循环的性能并非最优^[8,9], 但它们所研究的内容与本文有所不同: 首先, 上述文献讨论的是外不可逆参数对内可逆循环性能的影响, 而本文讨论的是完全可逆的不同逆循环性能的比较; 其次, 以上文献讨论的是两温限外循环的性能比较, 而本文讨论的是两温限内的循环性能的比较.

图1(a)和(b)分别是空气压缩制冷循环的 p - V 图和 T - S 图. 空气压缩制冷循环的性能系数表达式为

$$\varepsilon = \frac{1}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}, \quad (1)$$

其中, γ 为空气的比热比, $\gamma = c_p/c_v$.

另一方面, 工作在温度为 T_3 (环境温度)的高温热源和温度为 T_1 (制冷需求温度)的低温热源之间的逆卡诺循环的制冷系数为

$$\varepsilon_{\text{re,car}} = \frac{T_1}{T_3 - T_1}, \quad (2)$$

其中, 下标re, car代表逆卡诺循环. 从图1中可以看到 $T_3 < T_2$, 故 $\varepsilon_{\text{re,car}} > \varepsilon$, 因此上述逆卡诺循环的性能系数更大.

2.2 逆卡诺循环的性能系数分析

由于热量与功量是两种不同类型的能量, 它们的数量可以相等, 但它们的品位, 即“质”是不同的. 因此,

图1 空气压缩制冷循环

功转热的循环所遵循的规律与热转换功的循环遵循的规律理应有所不同. 也就是说, 从热机循环的结论“两温限条件下卡诺循环的性能最优”不能直接推断出“两温限条件下逆卡诺循环的性能系数最大”. 此外, 上文比较空气压缩制冷循环与逆卡诺循环的性能系数, 得到“逆卡诺循环的性能系数大于空气压缩制冷循环性能系数”这一结论的原因是: 空气压缩制冷循环的热源温度不在逆卡诺循环两个温限之内, 而超出了两个温限之外, 比较的前提已经不同了. 因此, 有必要进一步分析在两个相同温限条件下逆卡诺循环的性能系数与其他逆循环性能系数之间的关系.

2.2.1 分析证明

如图2所示, 在温度为 T_1 的高温热源和温度为 T_2 的低温热源之间运行的卡诺循环的效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right). \quad (3)$$

从式(3)可得输出的净功与输出至低温热源的热量的比值为

$$\frac{W}{Q_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right), \quad (4)$$

 图2 运行在 T_1 和 T_2 之间的卡诺循环

其中, Q_1 和 Q_2 分别是从小高温热源输入和循环输出至低温热源的热量, W 是循环输出的净功。

通过充系数概念^[2]可以证明卡诺循环的效率总是高于两温限条件下任何可逆的非卡诺(多热源)循环的效率。即, 两温限之间运行的所有可逆正循环中, 卡诺循环的效率最高:

$$\eta_{\text{car}} > \eta_{\text{noncar}}, \quad (5)$$

其中, 下标car表示卡诺循环(Carnot), noncar表示非卡诺循环(non-Carnot)。结合式(4)可得到卡诺循环的输出功与吸收热量的比值以及输出功与输出热量的比值, 它们总是高于任何非卡诺循环的对应值:

$$\left(\frac{W}{Q_1}\right)_{\text{car}} > \left(\frac{W}{Q_1}\right)_{\text{noncar}}, \quad (6)$$

$$\left(\frac{W}{Q_2}\right)_{\text{car}} > \left(\frac{W}{Q_2}\right)_{\text{noncar}}. \quad (7)$$

对于在相同的两个热源间运行的逆卡诺循环, 它的供热系数为

$$(\text{COP})_{\text{h}} = \frac{Q_1}{W} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (8)$$

它的制冷系数则为

$$(\text{COP})_{\text{r}} = \frac{Q_2}{W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \quad (9)$$

其中, 下标h代表供热(heating), 下标r代表制冷(refrigeration)。根据能量守恒定律, 这两个COP满足 $(\text{COP})_{\text{h}} = (\text{COP})_{\text{r}} + 1$, 因此下文只需要讨论供热系数的情形。

在相同热源条件下, 系统进行可逆的正循环后再进行可逆的逆循环, 系统和外界热源都将完全恢复到

原有状态。因而正循环和逆循环中功与热量的关系是完全对应的, 即: 正循环吸收 Q_1 的热量, 向低温热源排出 Q_2 热量, 做出 W 的净功; 逆循环则将从低温热源吸收 Q_2 热量, 消耗 W 的净功, 并向高温热源排出 Q_1 热量, 最终系统和外界热源回到初始状态。因此, 卡诺循环中热量、功和温度之间的关系也适用于逆卡诺循环。从正循环的式(6)和(7)可以得到逆循环满足以下关系:

$$\left(\frac{Q_1}{W}\right)_{\text{re,car}} < \left(\frac{Q_1}{W}\right)_{\text{re,noncar}}, \quad (10)$$

$$\left(\frac{Q_2}{W}\right)_{\text{re,car}} < \left(\frac{Q_2}{W}\right)_{\text{re,noncar}}, \quad (11)$$

其中, 下标re表示逆循环(reverse cycle)。注意到式(10)和(11)就是供热和制冷的性能系数表达式。由此可见逆卡诺循环的供热系数 $(\text{COP})_{\text{h, re, car}}$ 总是小于两温限条件下任何可逆非卡诺(多热源)逆循环的供热系数 $(\text{COP})_{\text{h, re, noncar}}$ 。同样地, 逆卡诺循环的制冷系数 $(\text{COP})_{\text{r, re, car}}$ 总是小于两温限条件下任何可逆的非卡诺(多热源逆循环)循环的制冷系数 $(\text{COP})_{\text{r, re, noncar}}$, 即逆卡诺循环性能系数不是最大, 反而是最小。

2.2.2 数学证明

图3给出了 T - S 图上两温限 T_1 与 T_2 下的一个任意可逆的非卡诺逆循环和恰好包围它的逆卡诺循环(虚线)。需要注意的是图中给出的非卡诺逆循环中系统与无穷多环境热源接触, 在任意时刻它们与工质维持等温热传递, 以维持可逆循环。

根据几何关系可以得到逆卡诺循环的供热系数为

图3 给定温限内任意逆循环与恰好包围它的逆卡诺循环

$$(\text{COP})_{\text{h,recar}} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}, \quad (12)$$

其中, Q_2 和 Q_1 分别为逆卡诺循环的吸热量和放热量. 从 T - S 图可见, 与逆卡诺循环相比, 非逆卡诺循环的吸热量大于逆卡诺循环的吸热量, 放热量则小于逆卡诺循环的放热量. 记 Q_{out} 为非逆卡诺循环的放热量, Q_{in} 为非逆卡诺循环的吸热量, 有以下两式:

$$Q_{\text{out}} = \alpha Q_1 = \alpha T_1 \Delta S, \quad \alpha \leq 1, \quad (13)$$

$$Q_{\text{in}} = \beta Q_2 = \beta T_2 \Delta S, \quad \beta \geq 1. \quad (14)$$

图3中的非卡诺逆循环的供热系数由下式给出:

$$(\text{COP})_{\text{h,recar}} = \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{out}} - Q_{\text{in}}} = \frac{\alpha T_1}{\alpha T_1 - \beta T_2}. \quad (15)$$

比较逆卡诺循环和非卡诺逆循环的供热系数, 其差值为

$$\begin{aligned} & (\text{COP})_{\text{h,recar}} - (\text{COP})_{\text{h,recar}} \\ &= - \left[\frac{(\beta - \alpha) T_1 T_2}{(\alpha T_1 - \beta T_2)(T_1 - T_2)} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

由于 $\beta \geq 1$, $\alpha \leq 1$, 故 $\beta - \alpha > 0$. 又因为 $T_1 > T_2$, 最后一项的符号由下式确定:

$$\begin{aligned} (\alpha T_1 - \beta T_2) &= \frac{\alpha T_1 \Delta S - \beta T_2 \Delta S}{\Delta S} \\ &= \frac{Q_{\text{out}} - Q_{\text{in}}}{\Delta S} = \frac{W_{\text{net}}}{\Delta S} > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

综合以上各项的符号可见 $(\text{COP})_{\text{h,recar}} - (\text{COP})_{\text{h,recar}} < 0$. 也就是说, 任意非卡诺逆循环的供热系数 $(\text{COP})_{\text{h,recar}}$ 总是大于恰好包围它的逆卡诺循环的供热系数 $(\text{COP})_{\text{h,recar}}$. 由于逆循环的供热系数与制冷系数之间的差是1, 因此这一结论对制冷系数同样成立.

综上所述, 在两热源温限下所有可逆的逆循环中, 逆卡诺循环的性能系数不是最大, 反而是最小的.

2.2.3 充满系数法证明

以上得到的逆卡诺循环的性能系数最小的结论还可以应用充满系数方法加以证明. 任意可逆正循环的充满系数的定义为^[2]: T - S 图上表示循环的闭合曲线包围的面积(图3中实线包围面积)与恰好包围此循环的卡诺循环包围的面积(图3中虚线框包围的面积)之比, 也即循环输出的净功之比.

$$f = \frac{W_{\text{noncar}}}{W_{\text{car}}} < 1, \quad (18)$$

其中, W_{noncar} 表示任意非卡诺循环的净功量, W_{car} 表示包围它的卡诺循环的净功量. 根据前一小节的叙述, 逆循环与正循环的热量、功及温度的关系恰好相反, 因而逆卡诺循环的耗功 $W_{\text{re,car}}$ 即与正卡诺循环的做功量 W_{car} 相等, 非卡诺逆循环的耗功 $W_{\text{re,noncar}}$ 与正向非卡诺循环的做功量 W_{noncar} 相等. 记逆卡诺循环的放热量为 $Q_{\text{out,recar}}$, 非卡诺逆循环的放热量为 $Q_{\text{out,re}}$, 则两个循环的供热系数分别为

$$\text{COP}_{\text{re,noncar}} = \frac{Q_{\text{out,re}}}{W_{\text{re,noncar}}}, \quad (19)$$

$$\text{COP}_{\text{re,car}} = \frac{Q_{\text{out,recar}}}{W_{\text{re,car}}}. \quad (20)$$

它们COP的差值为

$$\text{COP}_{\text{re,noncar}} - \text{COP}_{\text{re,car}} = \frac{Q_{\text{out,re}} - f Q_{\text{out,recar}}}{f W_{\text{re,car}}} > 0. \quad (21)$$

此式表明逆卡诺循环的供热系数 $(\text{COP})_{\text{h,recar}}$ 小于任意非卡诺逆循环的供热系数 $(\text{COP})_{\text{h,recar}}$, 再次证明了两热源温限下逆卡诺循环的性能系数不是最大, 反而是最小的.

下面再以无回热的斯特林制冷循环为例与逆卡诺逆循环的供热系数进行比较. 如图4所示, 斯特林逆循环由以下4个环节构成^[10]: 1-2为等温压缩过程; 2-3为等容放热过程; 3-4为等温膨胀过程; 4-1为等容吸热过程. 无回热情形下, 整个循环中的放热过程包含1-2和2-3两个环节, 吸热环节则包含3-4和4-1两部分. 因此, 此循环的供热系数为

图4 无回热的斯特林循环

$$\text{COP}_{\text{re, str}} = \frac{Q_{\text{rel}}}{W_{\text{net}}} = \frac{A_{1233'1'1}}{A_{1234}}, \quad (22)$$

其中, $\text{COP}_{\text{re, str}}$ 代表逆斯特林循环的供热系数, $A_{1233'1'1}$ 为1-2-3-3'-1'-1点包围的多边形之面积, A_{1234} 则是1234点包围的多边形的面积. 根据斯特林循环的性质, 图中两条曲线2-3和4-1下方覆盖的面积相等, 即:

$$A_{233'2'2} = A_{144'1'1}. \quad (23)$$

因此, 此循环的供热系数可展开为两项:

$$\begin{aligned} \text{COP}_{\text{rev, str}} &= \frac{Q_{\text{rel}}}{W_{\text{net}}} = \frac{A_{1233'1'1}}{A_{1234}} = \frac{A_{122'1'1} + A_{233'2'2}}{A_{1234}} \\ &= \frac{T_h(S_2 - S_1)}{(T_h - T_0)(S_2 - S_1)} + \frac{A_{233'2'2}}{A_{1234}}. \end{aligned} \quad (24)$$

上式最后一项是两个面积之比, 它总是大于零. 因此有

$$\text{COP}_{\text{rev, str}} = \frac{T_h}{(T_h - T_0)} + \frac{A_{233'2'2}}{A_{1234}} > \frac{T_h}{(T_h - T_0)}. \quad (25)$$

此式即说明无回热时斯特林逆循环的供热系数大于同温限下逆卡诺循环的供热系数. 这是因为斯特林逆循环通过2-3过程增加了放热量, 从而前面得到结论的一个例证.

现有文献中介绍的斯特林正循环通常都是含有完全回热的理想循环, 完全回热的正循环的热效率等于相同温限下卡诺循环的热效率, 说明回热能够提高热效率. 完全回热的斯特林逆循环的供热系数等于相同温限下逆卡诺循环的供热系数. 而上面的分析表明, 斯特林逆循环进行回热后它的性能系数不是增加而是降低的. 这正说明了功转化为热量与热量转化为机械功的规律有所不同.

如前所述, 现有工程热力学文献中通常认为在给定两热源温限下逆卡诺循环的性能系数最大, 究其原因有两个: 其一是认为逆循环中功转化为热量的规律与正循环中热量转换为功量的规律相同; 其二是空气压缩制冷循环的制冷系数与逆卡诺循环制冷系数的比较. 但这两个性能系数的比较中并没有应用相同的温限条件. 事实上, 如图1所示, 空气压缩制冷循环中可到达的最高温度为 T_2 , 最低温度为 T_4 , 按照温限的定义, 相同温限下的逆卡诺循环应当运行在温度分别为 T_2 和 T_4 的两个热源之间, 这一逆卡诺循环的制冷系数应是

$$\varepsilon_{\text{recar}} = \frac{T_4}{T_4 - T_2}. \quad (26)$$

可见此时逆卡诺循环的制冷系数小于空气压缩制冷循环的制冷系数:

$$\varepsilon_{\text{recar}} = \frac{T_4}{T_4 - T_2} < \varepsilon = \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (27)$$

在两热源温限下所有可逆的逆循环中, 逆卡诺循环的性能系数不是最大而是最小的事实表明, 逆循环中功量转化为热量的规律不同于正循环中热量转化为功量的规律.

3 逆 p - V 循环及其性能系数

3.1 逆 p - V 循环的概念

回顾热机循环, 两个相同温限条件下的所有可逆循环中卡诺循环效率最大的原因是循环中热量都是从品位最高(卡诺循环的高温热源温度)处输入, 而输出的热量都是从品位最低(卡诺循环的低温热源温度)处输出, 系统中只含有两个热源. 受此启发, 并注意到功量同样可以有品位, 可以设想对于机械功(限于体积功)转化为热的可逆逆循环, 若输入功量都是从压力最高(品位最高)的功源处输入, 而输出的功量都是在压力最低(品位最低)的功源处输出时, 循环应当具有最高的性能系数. 由于此循环中仅包含两个功源, 剩余的过程应当是等容过程才可保证循环的可逆, 可以将这种循环称为逆 p - V 循环. 图5给出了逆 p - V 循环在 p - V 图和 T - S 图上的示意图, 它由两个等容过程与等压过程组成, 且系统含有无穷多不同温度的热源与工质进行可逆的热交换.

3.2 两温限下逆 p - V 循环的性能系数算例

考虑含有1 kg理想气体的热力系统, 取这种理想气体的气体常数为 $R_g = 8.314 \text{ J/(kg K)}$, 比热比为1.4. 可算得其定压比热和定容比热分别为 $c_p = \gamma R_g / (\gamma - 1) = 29.09 \text{ J/(kg K)}$, $c_v = R_g / (\gamma - 1) = 20.785 \text{ J/(kg K)}$. 首先考虑高温热源温度为300 K, 低温热源温度为200 K的逆卡诺循环, 其 T - S 图如图6(a)所示, P - V 图如图6(b)所示. 循环中各点的参数如表1所示, 由于熵取值具有相对性, 故表1中计算各点熵值时选择1点的熵为 $S_1 = 10 \text{ J K}^{-1}$ 为基准.

由各点参数可求得此循环的熵变为

$$\Delta S = R_g \ln \frac{V_4}{V_1} = 8.314 \times \ln \frac{6}{5} = 1.5822 \text{ J K}^{-1}. \quad (28)$$

图5 (网络版彩图)逆 p - V 循环在 p - V 图(a)和 T - S 图(b)上的表示

由此可得工质从低温热源吸收的热量为 $Q_2=316.4475$ J, 向高温热源放热 $Q_1=474.6713$ J, 净耗功量为 $W=Q_1-Q_2=158.22$ J, 循环的供热系数为

$$\text{COP}_{\text{re,car}} = \frac{T_h}{T_h - T_c} = 3. \quad (29)$$

下面构造一个与逆卡诺循环在相同温限内运行的逆 p - V 循环. 设循环中温度最高的4点为两个循环的共同状态点, 且温度最低的2点温度为200 K, 可计算得到逆 p - V 循环的各点参数如表2所示.

同样将此循环绘制在 T - S 图和 p - V 图上, 如图7所示.

此循环的耗功量为

$$W_{\text{net}} = \Delta p \Delta V = 35.6314 \text{ J}. \quad (30)$$

放热量则为

$$Q_{\text{out}} = c_p(T_4 - T_1) + c_v(T_1 - T_2) = 2197.3 \text{ J}. \quad (31)$$

因此其供热系数为

图6 (网络版彩图)逆卡诺循环的 T - S 图(a)和 p - V 图(b)

表1 逆卡诺循环中各点的状态参数

点	压力 (kPa)	体积 (m^3)	温度 (K)
1	5.0	0.50	300
2	1.2	1.37	200
3	1.0	1.67	200
4	4.13	0.60	300

$$\text{COP}_{\text{re,car}} = \frac{Q_{\text{out}}}{W_{\text{net}}} = \frac{2197.3}{35.6314} = 61.64. \quad (32)$$

可见这一逆 p - V 循环的供热系数远高于同温限下的逆卡诺循环. 从 T - S 图上可以看到, 两温限下逆 p - V 循环可被近似看作为由无穷多个小逆卡诺循环所组成, 这些小逆卡诺循环的两个热源的温度之差近似相等, 且这些温差(或整个循环的平均温差)均远小于两温限的温度之差. 由于当高温热源温度给定时, 逆卡诺循环的供热系数与两热源的温度差成反比, 所以两个相同温限下的逆 p - V 循环的供热系数将远大于逆卡诺循环.

表 2 逆 p - V 循环的各点状态参数

点	压力 (kPa)	体积 (m^3)	温度 (K)
1	5.0	0.4751	285.7
2	3.5	0.4751	200
3	3.5	0.4988	210
4	5.0	0.4988	300

3.3 逆 p - V 循环的性能系数表达式

首先建立逆 p - V 循环中热量与功量的关系式. 应用图5中给出的循环各点记号, 从能量守恒可得

$$Q_{\text{out}} = W_{\text{net}} + Q_{\text{in}}, \quad (33)$$

其中, Q_{out} 是循环输送至各个高温热源的热量, Q_{in} 是循环从各个低温热源吸收的热量, W_{net} 为循环消耗的净功. 从逆循环的 p - V 图可见净功与输入功 W_{in} 的关系为

$$W_{\text{net}} = W_{\text{in}} \left(1 - \frac{p_l}{p_h} \right). \quad (34)$$

循环在等压过程2-3和等容过程3-4过程中吸热, 吸热量为

$$Q_{\text{in}} = c_p(T_3 - T_2) + c_v(T_4 - T_3). \quad (35)$$

由此可将式(33)改写为

$$Q_{\text{out}} = W_{\text{in}} \left(1 - \frac{p_l}{p_h} \right) + c_p(T_3 - T_2) + c_v(T_4 - T_3). \quad (36)$$

应用定压比热容与定容比热容的关系 $c_p = c_v + R$ 以及单位质量理想气体的状态方程 $pV = RT$ 可得

$$\begin{aligned} c_p(T_3 - T_2) &= c_v(T_3 - T_2) + R(T_3 - T_2) \\ &= c_v(T_3 - T_2) + p_3 V_3 - p_2 V_2 \\ &= c_v(T_3 - T_2) + p_l(V_3 - V_2). \end{aligned} \quad (37)$$

系统在等容过程中不对外做功, 只在等压过程对外做功, 因此输出功即为

$$W_{\text{out}} = p_l(V_3 - V_2). \quad (38)$$

结合以上各式可以得到

$$\begin{aligned} Q_{\text{out}} &= W_{\text{net}} + Q_{\text{in}} \\ &= W_{\text{net}} + c_p(T_3 - T_2) + c_v(T_4 - T_3) \\ &= W_{\text{net}} + W_{\text{out}} + c_v(T_4 - T_2) \\ &= W_{\text{in}} + c_v(T_4 - T_2). \end{aligned} \quad (39)$$

再次应用理想气体状态方程可得

图 7 (网络版彩图)逆 p - V 循环在 T - S 图(a)上的表示和 p - V 图(b)上的表示

$$\begin{aligned} c_v(T_4 - T_2) &= \frac{c_v}{R}(p_4 V_4 - p_2 V_2) \\ &= \frac{c_v}{R}(p_4 V_4 - p_4 V_2) + \frac{c_v}{R}(p_4 V_2 - p_2 V_2) \\ &= \frac{c_v}{R}W_{\text{in}} + \frac{c_v}{R}V_2(p_h - p_l). \end{aligned} \quad (40)$$

从而可将式(39)改写为由压差表示的关系

$$\begin{aligned} Q_{\text{out}} &= W_{\text{net}} + c_v(T_4 - T_2) \\ &= \left(1 + \frac{c_v}{R} \right) W_{\text{in}} + \frac{c_v}{R}V_2(p_h - p_l) \\ &= \frac{c_p}{R}W_{\text{in}} + \frac{RT_2(p_h - p_l)}{(\gamma - 1)p_l}. \end{aligned} \quad (41)$$

根据COP的定义, 其计算式为

$$\text{COP} = \frac{Q_{\text{out}}}{W_{\text{net}}} = \frac{c_p W_{\text{in}} / R + RT_2(p_h - p_l) / ((\gamma - 1)p_l)}{W_{\text{in}}(1 - p_l / p_h)}. \quad (42)$$

最后应用 $W_{\text{in}} = p_h(V_4 - V_2)$, $c_p = R/(\gamma - 1)$, 可以得到逆 p - V 循环的性能(供热)系数表达式为

$$\text{COP} = \frac{Q_{\text{out}}}{W_{\text{net}}} = \frac{p_h \gamma}{(p_h - p_l)(\gamma - 1)} + \frac{V_2}{(V_4 - V_2)(\gamma - 1)}. \quad (43)$$

从状态点2(T_2)到状态点4(T_4)是吸热和输出功的

过程, 当吸热过程是等压膨胀和等容压缩过程的组合时, 输出功最小, 从而吸热量最大. 因此在输入相同净功条件下, 吸热量最大, 输出的热流 Q_{out} 也达最大, 所以逆 p - V 循环是两个热源温限条件下性能系数最大的逆循环. 此外从性能系数COP的表达式中也可看到, 功也是有品位的, 压力就是它的品位, 高压功源压力越高, 低压功源压力越低, 相同的功量输入就能够从低温热源吸收更多的热量, 同时向高温热源输出更多热量.

4 结论与讨论

本文研究分析了一定温限内的逆卡诺循环, 以及提出了一种称为逆 p - V 循环的逆循环, 得到以下结论.

算例表明在给定两个热源温限条件下, 多热源的可逆循环的性能系数(COP)可大于逆卡诺循环的性能系数. 并通过推理分析和数学分析方法证明了与各种多热源可逆的逆循环相比, 逆卡诺循环的性能系数不是最大而是最小的.

提出了由两个等容过程与两个等压过程组成的新的逆循环, 称为逆 p - V 循环. 给出的算例表明在同样的两个热源温限条件下, 逆 p - V 循环的性能系数远大于逆

卡诺循环的性能系数.

初步分析表明在两个热源温限和相同净功输入条件下, 与其他各种多热源可逆的逆循环相比, 可逆的逆 p - V 循环的性能系数最大.

在热转功的循环中, 不需要考虑输出功的品位. 但在功转热的循环中需考虑功的品位, 压力就是它的品位. 高压功源压力高, 低压功源压力低时相同的功量能够从低温热源得到更多热量, 这就是为什么在相同前提下可逆的逆 p - V 循环的性能系数最大.

实际工程中供热或制冷用户的要求是所提供的热量或制冷量需要具有给定的供热温度或制冷温度, 由于逆 p - V 循环提供的热量或冷量不处于同一个温度(供热时低于供热温度, 制冷时高于制冷温度). 因此, 尽管逆 p - V 循环的COP很大, 但它对于单一供热温度或制冷温度的用户没有应用价值, 但是有望可用于含有两个或多个供热热源或用户的实际热力循环的性能分析和优化. 这也表明以性能系数(COP)作为单一供热温度或制冷温度逆循环的性能判据是有缺陷的. 事实上, 性能系数的定义中没有考虑热量或冷量的品位, 所以需要性能判据做出一定的改进. 此外, 还需研究逆 p - V 循环在多个供热温度或制冷温度时的应用价值.

参考文献

- 1 王补宣. 工程热力学. 北京: 高等教育出版社, 2011. 178
- 2 沈维道, 郑佩之. 工程热力学. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 1983. 162, 440
- 3 曾丹苓, 敖越, 张新铭, 等. 工程热力学. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2002. 74, 320
- 4 朱明善. 工程热力学. 北京: 清华大学出版社, 2011
- 5 Moran M J, Shapiro H N, Boettner D D, et al. Fundamentals of Engineering Thermodynamics. Hoboken: John Wiley & Sons, 2010, 534
- 6 Wark K. Advanced Thermodynamics for Engineers. New York: McGraw-Hill, 1995. 991
- 7 陈光明, 陈国邦. 制冷与低温原理. 北京: 机械工业出版社, 2000
- 8 Wu C, Chen L, Sun F. Optimisation of steady flow refrigeration cycles. *Int J Ambient Energy*, 1996, 17: 199–206
- 9 Wu C, Chen L, Sun F. Optimization of steady flow heat pumps. *Energy Convers Manage*, 1998, 39: 445–453
- 10 Zemansky M W, Dittman R H. Heat and Thermodynamics: An Intermediate Textbook. New York: McGraw-Hill, 1968

The performance analysis of reversed Carnot cycle and reversed p - V cycle

GUO ZengYuan, ZHAO Tian & XUE TiWei

Key Laboratory for Thermal Science and Power Engineering of Ministry of Education, Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China

A reversed thermodynamic cycle is a cycle which consumes mechanical work and moves heat energy from a source with lower temperature to a source with higher temperature, and the coefficient of performance (COP) is generally applied to describe its performance. It has been widely accepted that within a certain temperature range, the reversed Carnot cycle has the best performance, i.e., it has the biggest COP. However, in this article it has been concluded that the COP of the reversed Carnot cycle is not the biggest within a certain temperature range from three different methods. Besides, a new reversed cycle is constructed in this article, which is called the reversed p - V cycle inspired by the derivation of Carnot cycle. The analysis presents that within the same temperature the COP of reversed p - V cycle is far larger than the COP of the reversed Carnot cycle. From this cycle it can be seen that the mechanical work also has the concept of quality, which is reflected by the pressure of the work source in the cycle.

thermodynamic cycle, reversed Carnot cycle, coefficient of performance, Stirling cycle

doi: [10.1360/N092018-00081](https://doi.org/10.1360/N092018-00081)