基于偶应力理论涂层半平面的二维滑动摩擦接触分析

宋红霞¹, 柯燎亮^{1*}, 汪越胜²

1. 北京交通大学土木建筑工程学院力学系, 北京 100044;

2. 天津大学机械工程学院力学系, 天津 300350

* E-mail: llke@bjtu.edu.cn

收稿日期: 2019-02-26; 接受日期: 2019-03-27; 网络版发表日期: 2019-10-08

北京交通大学基本科研业务费(编号: C17JB00450)和国家自然科学基金(批准号: 11725207)资助项目

摘要 本文基于偶应力理论, 研究了平面应变状态下刚性压头与均匀涂层半平面之间的二维滑动摩擦接触问题. 该理论通过引入材料特征长度来描述微结构材料的尺寸效应. 采用傅里叶积分变换方法将此尺寸依赖的接触问题转化为第二类Cauchy奇异积分方程. 然后, 通过数值求解该类方程来确定涂层表面法向应力和面内应力的分布. 详细讨论了尺度参数、剪切模量比和摩擦系数对表面法向接触应力和面内应力的影响. 结果表明基于偶应力理论得到的接触应力明显偏离基于经典弹性理论预测的结果, 而且表现出对材料特征长度的强烈依赖性.

关键词 接触力学, 偶应力理论, 摩擦, 尺寸效应, 涂层

1 引言

偶应力理论假设当材料由非常小但不为零的体积元素组成时, 内面力偶的存在是可能的^[1,2]. 因此, 每个材料体积元素的表面不仅受到法向和切向力的作用, 而且受到弹性体内每单位面积的力偶矩的影响. 除了通常的经典弹性应力和应变之外, 还有可以表征偶应力理论中物体变形的旋转梯度, 它是决定偶应力分布的一个重要测量参数^[3]. 到目前为止, 偶应力理论已被广泛应用于许多研究微观结构尺寸依赖性的问题中, 如微结构物体中的应力集中^[2]、波传播^[4]、裂纹^[5]、振动^[6]、多物理场耦合^[7]等问题.

最近, 有些学者采用偶应力理论研究了弹性固体的尺寸依赖^[8]的接触问题. 基于偶应力理论, Zisis等人^[9]尝试研究了3种刚性压头作用于均匀弹性半平面上的无摩擦接触问题. 此外, Zisis和他的合作者将他们的研究延伸到热的平压头^[10]和带有尖角的倾斜平压头^[11]作用在均匀弹性半平面的无摩擦接触问题. 最近, Song等人^[12]分析了基于偶应力理论弹性半平面的二维滑动摩擦接触问题. 他们讨论了尺度参数和摩擦系数对接触应力和面内应力的影响. Song等人^[13]进一步考虑了基于偶应力理论的均匀涂层半平面的二维无摩擦接触问题, 分析了尺度参数、剪切模量比对接触应力和面内应力的影响. 除了偶应力理论之外, 许多其

引用格式: 宋红霞, 柯燎亮, 汪越胜. 基于偶应力理论涂层半平面的二维滑动摩擦接触分析. 中国科学: 技术科学, 2019, 49: 1197–1207
Song H X, Ke L L, Wang Y S. Two-dimensional sliding friction contact analysis of a coated half-plane with coupled stress (in Chinese). Sci Sin Tech, 2019, 49: 1197–1207, doi: 10.1360/SST-2019-0079

他非经典弹性理论也用来研究微结构材料尺寸依赖的接触问题, 如微极理论^[14]、应变梯度理论^[15]、非局部理论^[16]和表面弹性理论^[17].

为了改善材料在接触过程中的机械性能, 如抗接触损伤性能、耐磨性能和耐腐蚀性能等^[18~20], 涂层被广泛用于许多工程领域, 如船舶工程、汽车工程、航空航天工程、生物工程等^[21]. 然而, 当涂层厚度或压痕尺寸减小到微米/纳米尺度时其接触力学行为可能与经典弹性理论中预测的不同, 此时尺寸效应必须加以考虑. 到目前为止, 还没有学者利用偶应力理论研究关于涂层半平面结构的尺寸依赖的滑动摩擦接触问题. 本文基于偶应力理论分析刚性压头作用于均匀涂层半平面的二维滑动摩擦接触问题. 利用傅里叶积分变换方法, 得到滑动摩擦接触问题的第二类Cauchy奇异积分方程并进行数值求解, 获得未知的法向接触应力和面内应力的分布. 数值结果讨论了材料尺度参数、剪切模量比和摩擦系数对表面法向接触应力和面内应力分布的影响.

2 基于偶应力理论的涂层半平面接触模型

如图1所示, 考虑平面应变状态下刚性压头作用于均匀涂层半平面的滑动摩擦接触问题, 涂层厚度为 h , 法向线集中力 P 和切向线集中力 Q 作用在压头上. 接触表面存在摩擦且遵守Coulomb摩擦定律, 设摩擦系数为 f , 则有 $Q = fP$. 均匀涂层和半平面的剪切模量和泊松比分别为 (μ_1, μ_2) 和 (ν_1, ν_2) , 其中下标1和2分别表示涂层和半平面. 笛卡儿坐标系 xOy 设立在涂层表面的中心线上, $p(x)$ 和 $q(x)$ 分别是接触区域 $(-b, a)$ 内的法向接触

图1 基于偶应力理论的刚性压头与均匀涂层半平面之间滑动摩擦接触示意图

压力和切向力, 且满足Coulomb摩擦定律 $q(x)=fp(x)$. 假设整个接触表面不考虑力偶的作用.

2.1 均匀涂层和半平面的基本方程

在偶应力理论框架下, 根据文献^[2,9~11], 涂层和半平面在平面应变状态下的几何方程为

$$\omega_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{yi}}{\partial x} - \frac{\partial u_{xi}}{\partial y} \right), \quad (1)$$

$$k_{xzi} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x}, \quad k_{yzi} = \frac{\partial \omega_i}{\partial y},$$

$$\varepsilon_{xxi} = \frac{\partial u_{xi}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yyi} = \frac{\partial u_{yi}}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{xyi} = \varepsilon_{yxi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial y} + \frac{\partial u_{yi}}{\partial x} \right),$$

其中, $i=1, 2$, $\omega_i=\omega_{zi}$ 是旋转矢量分量, (k_{xzi}, k_{yzi}) 是曲率张量分量, (u_{xi}, u_{yi}) 是位移分量, $(\varepsilon_{xxi}, \varepsilon_{yyi}, \varepsilon_{xyi})$ 是应变分量. 涂层和半平面的平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_{xxi}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xyi}}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xyi}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yyi}}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_{xyi} - \sigma_{yxi} + \frac{\partial m_{xzi}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yzi}}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

其中, $(\sigma_{xxi}, \sigma_{xyi}, \sigma_{yyi}, \sigma_{yxi})$ 是应力分量, (m_{xzi}, m_{yzi}) 是偶应力分量. 另外本构关系为

$$\varepsilon_{xxi} = \frac{1}{2\mu_i} [\sigma_{xxi} - \nu_i (\sigma_{xxi} + \sigma_{yyi})], \quad (6)$$

$$\varepsilon_{yyi} = \frac{1}{2\mu_i} [\sigma_{yyi} - \nu_i (\sigma_{xxi} + \sigma_{yyi})], \quad (7)$$

$$\varepsilon_{xyi} = \varepsilon_{yxi} = \frac{1}{4\mu_i} (\sigma_{xyi} + \sigma_{yxi}), \quad (8)$$

$$k_{xzi} = \frac{1}{4\mu_i l^2} m_{xzi}, \quad k_{yzi} = \frac{1}{4\mu_i l^2} m_{yzi}, \quad (9)$$

其中, l 是表征微结构材料尺寸效应的材料特征长度.

2.2 均匀涂层半平面的基本解

由方程(1)~(9)可得相容方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \sigma_{xxi}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_{xyi} + \sigma_{yxi}) + \frac{\partial^2 \sigma_{yyi}}{\partial x^2} \\ & = \nu_i \nabla^2 (\sigma_{xxi} + \sigma_{yyi}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial m_{xzi}}{\partial y} = \frac{\partial m_{yzi}}{\partial x}, \quad (11)$$

$$m_{xzi} = -2l^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma_{xxi} - \nu_i (\sigma_{xxi} + \sigma_{yyi}) \right] + l^2 \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xyi} + \sigma_{yxi}), \quad (12)$$

$$m_{yzi} = -2l^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma_{yyi} - \nu_i (\sigma_{xxi} + \sigma_{yyi}) \right] - l^2 \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xyi} + \sigma_{yxi}). \quad (13)$$

注意到, 上述4个方程只有3个相互独立.

引入Mindlin应力函数^[2], 满足平衡方程的应力和偶应力分量的解可表示为

$$\sigma_{xxi} = \frac{\partial^2 \Xi_i}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial x \partial y}, \quad (14)$$

$$\sigma_{yyi} = \frac{\partial^2 \Xi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial x \partial y},$$

$$\sigma_{xyi} = -\frac{\partial^2 \Xi_i}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial y^2}, \quad (15)$$

$$\sigma_{yxi} = -\frac{\partial^2 \Xi_i}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial x^2},$$

$$m_{xzi} = \frac{\partial \Theta_i}{\partial x}, \quad m_{yzi} = \frac{\partial \Theta_i}{\partial y}, \quad (16)$$

其中, $\Xi_i = \Xi_i(x, y)$ 和 $\Theta_i = \Theta_i(x, y)$ ($i=1, 2$) 是两个任意但光滑的应力函数.

将方程(14)~(16)代入方程(12)和(13)中可得到两个耦合的控制方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Theta_i - l^2 \nabla^2 \Theta_i) = -2(1 - \nu_i) l^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial \Xi_i}{\partial y} \right), \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\Theta_i - l^2 \nabla^2 \Theta_i) = 2(1 - \nu_i) l^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial \Xi_i}{\partial x} \right). \quad (18)$$

解耦后可得

$$\begin{aligned} \nabla^4 \Xi_i &= 0, \\ \nabla^2 \Theta_i - l^2 \nabla^4 \Theta_i &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

对方程(19)做关于x的Fourier积分变换得

$$\frac{d^4 \Xi_i}{dy^4} - 2\zeta^2 \frac{d^2 \Xi_i}{dy^2} + \zeta^4 \Xi_i = 0, \quad (20)$$

$$l^2 \frac{d^4 \Theta_i}{dy^4} - (1 + 2l^2 \zeta^2) \frac{d^2 \Theta_i}{dy^2} + \zeta^2 (1 + l^2 \zeta^2) \Theta_i = 0, \quad (21)$$

其中, “-”表示Fourier积分变换, ζ 为积分变量. 则均匀

涂层上应力函数的通解为

$$\Xi_i(\zeta, y) = (d_1 + yd_2)e^{k_1 y} + (d_3 + yd_4)e^{-k_1 y}, \quad (22)$$

$$\Theta_i(\zeta, y) = d_5 e^{k_1 y} + d_6 e^{-k_1 y} + d_7 e^{\gamma y} + d_8 e^{-\gamma y}. \quad (23)$$

均匀半平面上应力函数的通解为

$$\begin{aligned} \Xi_2(\zeta, y) &= (d_9 + yd_{10})e^{k_1 y}, \\ \Theta_2(\zeta, y) &= d_{11}e^{k_1 y} + d_{12}e^{\gamma y}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中, $\gamma = \gamma(\zeta) = \sqrt{1/l^2 + \zeta^2}$, $d_j = d_j(\zeta)$ ($j=1, 2, \dots, 12$) 是12个由边界条件决定的未知系数. 那么位移、应力以及偶应力分量在积分变换域内可表示为

$$\bar{\sigma}_{xxi} = \frac{d^2 \Xi_i}{dy^2} + i\zeta \frac{d \Theta_i}{dy}, \quad (25)$$

$$\bar{\sigma}_{yyi} = -\zeta^2 \Xi_i - i\zeta \frac{d \Theta_i}{dy},$$

$$\bar{\sigma}_{xyi} = i\zeta \frac{d \Xi_i}{dy} - \frac{d^2 \Theta_i}{dy^2}, \quad (26)$$

$$\bar{\sigma}_{yxi} = i\zeta \frac{d \Xi_i}{dy} - \zeta^2 \Theta_i,$$

$$\bar{m}_{xzi} = -i\zeta \Theta_i, \quad \bar{m}_{yzi} = \frac{d \Theta_i}{dy}, \quad (27)$$

$$\bar{u}_{xi} = \frac{1}{2\mu_i \zeta} \left[i(1 - \nu_i) \frac{d^2 \Xi_i}{dy^2} - \zeta \frac{d \Theta_i}{dy} + i\nu_i \zeta^2 \Xi_i \right], \quad (28)$$

$$\bar{u}_{yi} = \frac{1}{2\mu_i \zeta^2} \left[(1 - \nu_i) \frac{d^3 \Xi_i}{dy^3} - (2 - \nu_i) \zeta^2 \frac{d \Xi_i}{dy} - i\zeta^3 \Theta_i \right]. \quad (29)$$

2.3 边界条件

在涂层与半平面交界面处, 满足位移、应力和旋转梯度连续:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy1}(x, -h) &= \sigma_{yy2}(x, -h), \\ \sigma_{yx1}(x, -h) &= \sigma_{yx2}(x, -h), \\ m_{yz1}(x, -h) &= m_{yz2}(x, -h), \\ \omega_1(x, -h) &= \omega_2(x, -h), \\ u_{y1}(x, -h) &= u_{y2}(x, -h), \\ u_{x1}(x, -h) &= u_{x2}(x, -h). \end{aligned} \quad (30)$$

涂层表面满足

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) &= -p(x), \\ \sigma_{yx}(x, 0) &= -q(x), \\ m_{yz}(x, 0) &= 0, \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned} \quad (31)$$

以上有9个边界条件, 但本文要求有12个未知系数, 因此我们需要增加3个额外的方程. 将方程(22)~(24)代入到方程(17)和(18)可得3个额外的方程:

$$\begin{aligned} d_5 &= -4il^2\zeta(1-\nu_1)d_2, \\ d_6 &= -4il^2\zeta(1-\nu_1)d_4, \\ d_{11} &= -4il^2\zeta(1-\nu_2)d_{10}. \end{aligned} \quad (32)$$

2.4 涂层表面位移解

为了求解涂层表面法向接触应力和面内应力的分布情况, 在偶应力理论框架下, 参考文献[13], 方程(22)~(24)包含的12个未知系数 d_j ($j=1, 2, \dots, 12$)可通过方程(30)~(32)进行求解:

$$\{d\}^T = [M(\zeta)]^{-1}\{-\bar{p}(\zeta), -q(\zeta), \dots, 0\}^T, \quad (33)$$

其中, $\{d\} = \{d_1, d_2, \dots, d_{12}\}^T$, $\bar{p}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{ix\zeta} dx$, $[M(\zeta)]$ 是一个 12×12 的方阵:

$$\begin{aligned} [M_{1j}(\zeta)]\{d_j\}^T &= \bar{\sigma}_{yx1}(\zeta, 0), \\ [M_{2j}(\zeta)]\{d_j\}^T &= \bar{\sigma}_{yx2}(\zeta, 0), \\ [M_{3j}(\zeta)]\{d_j\}^T &= \bar{m}_{yz1}(\zeta, 0), \\ [M_{4j}(\zeta)]\{d_j\}^T &= \bar{\sigma}_{yx1}(\zeta, -h) - \bar{\sigma}_{yx2}(\zeta, -h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [M(\zeta, 0)] &= [u_{x1}(x, 0), u_{y1}(x, 0)]^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{i\zeta}{2\mu_1} & \frac{i\zeta(1-\nu_1)}{\mu_1\zeta} & \frac{i\zeta}{2\mu_1} & -\frac{i\zeta(1-\nu_1)}{\mu_1\zeta} & -\frac{|\zeta|}{2\mu_1} & \frac{|\zeta|}{2\mu_1} & -\frac{\gamma}{2\mu_1} & \frac{\gamma}{2\mu_1} \\ -\frac{|\zeta|}{2\mu_1} & \frac{1-2\nu_1}{2\mu_1} & \frac{|\zeta|}{2\mu_1} & \frac{1-2\nu_1}{2\mu_1} & -\frac{i\zeta}{2\mu_1} & -\frac{i\zeta}{2\mu_1} & -\frac{i\zeta}{2\mu_1} & -\frac{i\zeta}{2\mu_1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (37)$$

考虑 $\zeta m_{11}(\zeta, 0)$, $\zeta m_{12}(\zeta, 0)$, $\zeta m_{21}(\zeta, 0)$, $\zeta m_{22}(\zeta, 0)$ 的渐近性质, 不难证明^[12]

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} m_{11}(\zeta, 0) & m_{12}(\zeta, 0) \\ m_{21}(\zeta, 0) & m_{22}(\zeta, 0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -im_{11\infty} & m_{21\infty} \\ m_{21\infty} & im_{11\infty} \end{bmatrix}^T, \quad (38)$$

其中,

$$\begin{aligned} m_{11\infty} &= \frac{1}{\mu_1(6-4\nu_1)}, \\ m_{21\infty} &= \frac{1-\nu_1}{\mu_1(3-2\nu_1)}. \end{aligned} \quad (39)$$

考虑经典弹性接触理论, 即 $l=0$ 时, 以上渐近分析

$$\begin{aligned} [M_{5j}(\zeta)]\{d_j\}^T &= \bar{\sigma}_{yx1}(\zeta, -h) - \bar{\sigma}_{yx2}(\zeta, -h), \\ [M_{6j}(\zeta)]\{d_j\}^T &= \bar{m}_{yz1}(\zeta, -h) - \bar{m}_{yz2}(\zeta, -h), \\ [M_{7j}(\zeta)]\{d_j\}^T &= \bar{u}_{y1}(\zeta, -h) - \bar{u}_{y2}(\zeta, -h), \\ [M_{8j}(\zeta)]\{d_j\}^T &= \bar{u}_{x1}(\zeta, -h) - \bar{u}_{x2}(\zeta, -h), \\ [M_{9j}(\zeta)]\{d_j\}^T &= \bar{\omega}_1(\zeta, -h) - \bar{\omega}_2(\zeta, -h), \\ [M_{10j}(\zeta)]\{d_j\}^T &= -4il^2\zeta(1-\nu_1)d_2 - d_5, \\ [M_{11j}(\zeta)]\{d_j\}^T &= -4il^2\zeta(1-\nu_1)d_4 - d_6, \\ [M_{12j}(\zeta)]\{d_j\}^T &= -4il^2\zeta(1-\nu_2)d_{10} - d_{11}. \end{aligned} \quad (34)$$

为了计算涂层表面位移, 取前8个未知系数 $\{d_k\}^T$ ($k=1, 2, \dots, 8$):

$$\{d_k\}^T = [A][M(\zeta)]^{-1}\{-\bar{p}(\zeta), -q(\zeta), \dots, 0\}^T, \quad (35)$$

其中, $[A]$ 是一个 8×12 的矩阵, 且满足 $A_{kk}=1$ 和 $A_{kj}=0$ ($k \neq j$). 将方程(35)代入方程(30)和(31)中且作Fourier逆变换可得

$$\begin{aligned} [u_{x1}, u_{y1}]^T &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^a \int_{-\infty}^{\infty} [m(\zeta, 0)] \\ &\quad \times \{p(t), q(t), \dots, 0\}^T e^{-i\zeta(x-t)} d\zeta dt, \end{aligned} \quad (36)$$

其中, $[m(\zeta, 0)] = [M(\zeta, 0)][A][M(\zeta)]$, 这里

值可写为^[22]

$$m_{11\infty} = -\frac{1-2\nu_1}{2\mu_1}, \quad m_{21\infty} = \frac{1-\nu_1}{\mu_1}. \quad (40)$$

对比方程(39)和(40), 可以看出偶应力理论的值 $m_{11\infty}$ 是正值, 和经典弹性理论的值正好相反, 这会导致基于偶应力理论得到的面内应力分布和基于经典弹性理论得到的结果有很大的区别, 这一点在数值结果部分可以体现出来.

结合方程(36)内核的奇偶性, 我们得到涂层表面位移分量:

$$\begin{aligned}
u_{y1}(x) = & -\frac{m_{21\infty}}{\pi} \int_{-b}^a p(t) \int_0^\infty \frac{\cos[\zeta(x-t)]}{\zeta} d\zeta dt - \frac{m_{11\infty}}{\pi} \int_{-b}^a q(t) \int_0^\infty \frac{\sin[\zeta(x-t)]}{\zeta} d\zeta dt \\
& - \frac{1}{\pi} \int_{-b}^a p(t) \int_0^\infty (\zeta m_{21}(\zeta, 0) - m_{21\infty}) \frac{\cos[\zeta(x-t)]}{\zeta} d\zeta dt \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^a q(t) \int_0^\infty (i\zeta m_{22}(\zeta, 0) + m_{11\infty}) \frac{\sin[\zeta(x-t)]}{\zeta} d\zeta dt, \quad (41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{x1}(x) = & \frac{m_{11\infty}}{\pi} \int_{-b}^a p(t) \int_0^\infty \frac{\sin[\zeta(x-t)]}{\zeta} d\zeta dt - \frac{m_{21\infty}}{\pi} \int_{-b}^a q(t) \int_0^\infty \frac{\cos[\zeta(x-t)]}{\zeta} d\zeta dt \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^a p(t) \int_0^\infty (i\zeta m_{11}(\zeta, 0) - m_{11\infty}) \frac{\sin[\zeta(x-t)]}{\zeta} d\zeta dt \\
& - \frac{1}{\pi} \int_{-b}^a q(t) \int_0^\infty (\zeta m_{12}(\zeta, 0) - m_{21\infty}) \frac{\cos[\zeta(x-t)]}{\zeta} d\zeta dt. \quad (42)
\end{aligned}$$

3 基于偶应力理论接触问题的奇异积分方程

为了求解涂层表面法向接触应力 $\sigma_{y1}(x, 0)$ 和面内应力 $\sigma_{x1}(x, 0)$ 的分布, 我们利用方程(41)和(42)以及广义函数的Fourier变换关系式^[23-25]:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sin[\zeta(x-t)] d\zeta &= \frac{1}{x-t}, \\
\int_0^\infty \cos[\zeta(x-t)] d\zeta &= \pi \delta(x-t). \quad (43)
\end{aligned}$$

然后分别针对方程(41)和(42)对 x 求偏导可得到第二类Cauchy奇异积分方程组:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{y1}(x)}{\partial x} = & -m_{11\infty} f p(x) + \frac{m_{21\infty}}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(t)}{x-t} dt \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^a p(t) (N_1(x, t) + f N_2(x, t)) dt, \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{x1}(x)}{\partial x} = & m_{11\infty} p(x) + \frac{m_{21\infty}}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(t)}{x-t} dt \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^a p(t) (N_4(x, t) + f N_3(x, t)) dt, \quad (45)
\end{aligned}$$

其中,

$$N_1(x, t) = \int_0^\infty (\zeta m_{21}(\zeta, 0) - m_{21\infty}) \sin[\zeta(x-t)] d\zeta, \quad (46)$$

$$N_2(x, t) = \int_0^\infty (i\zeta m_{22}(\zeta, 0) - m_{11\infty}) \cos[\zeta(x-t)] d\zeta, \quad (47)$$

$$N_3(x, t) = \int_0^\infty (\zeta m_{12}(\zeta, 0) - m_{21\infty}) \sin[\zeta(x-t)] d\zeta, \quad (48)$$

$$N_4(x, t) = \int_0^\infty (i\zeta m_{11}(\zeta, 0) - m_{11\infty}) \cos[\zeta(x-t)] d\zeta. \quad (49)$$

同时, 当我们考虑具有恒定摩擦系数且满足库仑摩擦定律的滑动摩擦接触问题时, 法向荷载 P 和切向荷载 Q

分别与接触压力 $p(x)$ 和切向分布力 $q(x)$ 满足

$$\begin{aligned}
\int_{-b}^a p(x) dx &= P, \\
\int_{-b}^a q(x) dx &= Q = fP. \quad (50)
\end{aligned}$$

引入无量纲量 $c = a+b$, $x = \frac{a+b}{2}\eta + \frac{a-b}{2}$, $t = \frac{a+b}{2}\varsigma + \frac{a-b}{2}$, $\zeta = h\zeta$, $s = l/h$, $\alpha = (a+b)/h/2$, $-1 \leq (\eta, \varsigma) \leq 1$,

方程(44)和(50)可重新写为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_y}{\partial x} = & \frac{\partial u_y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{2}{a+b} \frac{\partial u_y}{\partial \eta} \\
\Rightarrow & \frac{2}{a+b} \frac{\partial u_y}{\partial \eta} = -m_{11\infty} f p(\eta) \\
& + \frac{m_{21\infty}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\varsigma)}{\eta - \varsigma} d\varsigma \\
& + \frac{\alpha}{\pi} \int_{-1}^1 p(\varsigma) (N_1(\eta, \varsigma) + f N_2(\eta, \varsigma)) d\varsigma, \quad (51)
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 p(\eta) d\eta = \frac{2P}{a+b}, \quad (52)$$

其中,

$$\begin{aligned}
N_1(\eta, \varsigma) = & \int_0^\infty \left(\frac{\zeta}{h} m_{21}(\zeta, 0) - m_{21\infty} \right) \\
& \times \sin[\zeta \alpha (\eta - \varsigma)] d\zeta, \quad (53a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2(\eta, \varsigma) = & \int_0^\infty \left(i \frac{\zeta}{h} m_{22}(\zeta, 0) - m_{11\infty} \right) \\
& \times \cos[\zeta \alpha (\eta - \varsigma)] d\zeta. \quad (53b)
\end{aligned}$$

通过应用数值求解方法^[26]求解方程(51)和(52), 即可得到法向接触应力的数值解. 这里当无量纲材料特征长度 $s=0$ 时, 方程(51)和(52)可退化为经典弹性理论

中均匀涂层半平面的滑动摩擦接触问题^[27]。如果涂层和半平面的材料组成成分相同, 该问题可以退化为基于偶应力理论均匀半平面在刚性压头作用下的滑动摩擦接触问题^[12]。

特别地, 很多学者都关注到了滑动摩擦接触问题中面内应力 $\sigma_{xx1}(\eta, 0)$ 的求解^[28], 因为这种应力与裂纹萌生和接触损伤密切相关。本文在获得表面接触压力 $p(\eta)$ 之后, 可以通过以下积分方程计算涂层表面的面内应力 $\sigma_{xx1}(\eta, 0)$:

$$\sigma_{xx1}(\eta, 0) = \frac{1-2\nu_1}{3-2\nu_1} p(\eta) + \frac{2f}{\pi(3-2\nu_1)} \int_{-1}^1 \frac{p(\zeta)}{\eta-\zeta} d\zeta + \frac{2\mu_1\alpha}{\pi(1-\nu_1)} \int_{-1}^1 p(\zeta) (N_4(\eta, \zeta) + fN_3(\eta, \zeta)) d\zeta, \quad (54)$$

其中,

$$N_3(\eta, \zeta) = \int_0^\infty \left(\frac{\zeta}{h} m_{12}(\zeta, 0) - m_{21\infty} \right) \times \sin[\zeta\alpha(\eta - \zeta)] d\zeta, \quad (55a)$$

$$N_4(\eta, \zeta) = \int_0^\infty \left(i \frac{\zeta}{h} m_{11}(\zeta, 0) - m_{11\infty} \right) \times \cos[\zeta\alpha(\eta - \zeta)] d\zeta. \quad (55b)$$

4 刚性平压头和圆柱形压头

4.1 平压头

如图2(a)所示平压头作用于涂层半平面上, 接触区域 $-b \leq x \leq a$ 内涂层表面法向位移分量 $u_{y1}(\eta, 0)$ 根据压头外形可写为^[22]

$$u_{y1}(\eta, 0) = \text{constant}, \quad b = a, \quad \frac{\partial u_{y1}(\eta, 0)}{\partial \eta} = 0, \quad -1 \leq \eta \leq 1. \quad (56)$$

对于平压头, 法向接触应力 $\sigma_{xx1}(\eta, 0)$ 在接触区两端

图2 滑动摩擦接触问题示意图。(a) 平压头; (b) 圆压头

$\eta = \pm 1$ 存在可积的奇异性^[9]。另外, 接触区宽度在加载过程中保持为常数。

4.2 圆柱形压头

如图2(b)所示圆柱形压头作用于涂层半平面上, 接触区域 $-b \leq x \leq a$ 内涂层表面法向位移分量 $u_{y1}(\eta, 0)$ 根据压头外形可写为^[22]

$$u_{y1}(\eta, 0) = -\delta + \frac{1}{2R} \left(\frac{a+b}{2} \eta + \frac{a-b}{2} \right)^2, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad (57)$$

这里 δ 是一个正的常数, 进而有

$$\frac{\partial u_{y1}(\eta, 0)}{\partial \eta} = \frac{a+b}{2R} \left(\frac{a+b}{2} \eta - \frac{a-b}{2} \right). \quad (58)$$

对于圆柱形压头的接触问题, 方程(51)和(52)必须满足一致性条件^[12]。法向接触应力 $\sigma_{yy1}(\eta, 0)$ 在接触区两端 $\eta = \pm 1$ 没有可积的奇异性^[9], 而且当压头上作用法向载荷 P 和切向载荷 Q 后, 接触区宽度 a 和 b 是未知的。

5 数值结果和讨论

基于偶应力理论, 我们研究均匀涂层半平面和刚性压头之间的二维滑动摩擦接触问题, 考虑了各类参数对法向接触应力和面内应力分布的影响。均匀涂层和半平面的剪切模量比 μ_1/μ_2 分别取为1/3, 1和3, 假设涂层和半平面的泊松比相同 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ 。这里无量纲尺度参数定义为 $s = l/h$ 。无特别说明时, 我们假设平压头的接触区总宽度 $2a/h = 0.3$, 圆柱形压头的半径 $R/h = 10$, 并且法向载荷 $P/\mu_2 h = 0.002$ 。Zisis等人^[9]研究了基于偶应力理论均匀半平面与刚性压头之间的二维无摩擦接触问题。当摩擦系数 $f = 0$ 和剪切模量比值 $\mu_1/\mu_2 = 1$ 时, 本文模型可以退化为Zisis等人^[9]的模型。图3(a)和(b)给出了本文模型与Zisis等人^[9]的模型所得到的无量纲接触应力分布结果。从图中可以看出本文模型结果和Zisis等人模型的结果非常接近, 从而证明了本文模型结果的有效性。

5.1 尺度参数对涂层表面法向接触应力和面内应力分布的影响

图4分析了当 $f = 0.2$ 和 $\mu_1/\mu_2 = 3$ 时, 尺度参数 s 对平压头无量纲法向接触应力和面内应力分布的影响。对于

图3 本文计算结果与Zisis等人^[9]的结果对比图. (a) 平压头; (b) 圆压头

图4 尺度参数 s 对平压头接触应力分布的影响. (a) $\sigma_{yy}(x, 0)/\mu_2$; (b) $\sigma_{xx}(x, 0)/\mu_2$

平压头, 法向接触应力和面内应力在接触区的两端都具有奇异性. 随着 s 的增加, 法向接触应力的分布首先偏离经典弹性预测值, 然后又趋近于经典弹性的结果. 有趣的是, 当 $s=0$ 时面内应力在接触区域内是压应力, 但当 s 增大且无论 s 取多小值时, 面内应力分布结果将完全与经典弹性预测值相反并在接触区两端变成拉应力. 这主要是由于方程(39)和(40)中, 偶应力理论中的 $m_{11\infty}$ 与经典弹性理论中的 $m_{11\infty}$ 的符号正好相反. 对于涂层表面法向接触应力和面内应力两者而言, 在接触区两端附近的相对狭窄区域处的结果值与经典弹性预测值有显著偏差, 而这是由边界层效应引起^[9,10].

图5讨论了当 $f=0.2$, $\mu_1/\mu_2=3$ 和 $R/h=10$ 时, 尺度参数 s 对圆柱形压头无量纲法向接触应力和面内应力分布的影响. 随着尺寸参数从0增加到0.2, 出现在接触区中心附近的最大应力值迅速增加, 但接触区宽度随 s 的增加而减小. 该结果表明尺寸效应增加了涂层半结构的刚度, 进而增加了接触应力的大小. 另外, 当 $s \rightarrow 0$ 时, 非经典结果趋于经典结果. 对于面内应力, 当 s 从零增加

时, 面内应力明显偏离经典解. 我们观察到, 当考虑偶应力时, 尺度参数越小, 尺寸效应越明显. 此外, 经典解的最大拉应力发生在接触区中心的右侧, 与平压头不同, 在圆压头接触区域内法向接触应力和面内应力的分布没有观察到边界层效应.

5.2 剪切模量比值对涂层表面法向接触应力和面内应力分布的影响

图6和7给出了当 $f=0.2$, $s=0.2$ 和 $R/h=10$ 时, 剪切模量比值 μ_1/μ_2 对无量纲法向接触应力和面内应力分布的影响. 对于法向接触应力, 剪切模量比值对平压头的影响不大, 但对圆柱形压头的影响非常大. 随着 μ_1/μ_2 的增加, 平压头在接触区中心处的应力减小; 圆柱形压头的最大接触应力出现在接触区中心位置且随着 μ_1/μ_2 的增加而增加. 对于面内应力, μ_1/μ_2 对平压头和圆柱形压头的影响都非常大. 平压头最大拉应力发生在接触区的两端, 对于圆柱形压头的最大拉应力出现在接触区中心右侧. 值得注意的是, 对于这两种压头, 最大拉应力随着

图 5 尺度参数 s 对圆柱形压头接触应力分布的影响. (a) $\sigma_{yy1}(x, 0)/\mu_2$; (b) $\sigma_{xx1}(x, 0)/\mu_2$

图 6 剪切模量比值对平压头接触应力分布的影响. (a) $\sigma_{yy1}(x, 0)/\mu_2$; (b) $\sigma_{xx1}(x, 0)/\mu_2$

图 7 剪切模量比值对圆柱形压头接触应力分布的影响. (a) $\sigma_{yy1}(x, 0)/\mu_2$; (b) $\sigma_{xx1}(x, 0)/\mu_2$

μ_1/μ_2 的增加而减小. 因此我们可以通过调整涂层的剪切模量值来改善由于拉应力而导致的表面接触损伤.

5.3 摩擦系数对涂层表面法向接触应力和面内应力分布的影响

图8和9给出了当 $s=0.2$, $\mu_1/\mu_2=3$ 和 $R/h=10$ 时, 摩擦

系数 f 对无量纲法向接触应力和面内应力分布的影响. 对于平压头和圆柱形压头, 法向接触应力对摩擦系数的变化不敏感, 但是面内应力对摩擦系数的变化非常敏感. 由图8(b)和9(b)可以看出, 当 $f=0$ 时 $\sigma_{xx1}(x, 0)/\mu_2$ 在接触区内对称分布, 当 $f>0$ 时 $\sigma_{xx1}(x, 0)/\mu_2$ 在接触区内非对称分布. 对于平压头, 面内应力在接触区两端的拉应

图 8 摩擦系数对平压头接触应力分布的影响. (a) $\sigma_{yy1}(x, 0)/\mu_2$; (b) $\sigma_{xx1}(x, 0)/\mu_2$

图 9 摩擦系数对圆柱形压头接触应力分布的影响. (a) $\sigma_{yy1}(x, 0)/\mu_2$; (b) $\sigma_{xx1}(x, 0)/\mu_2$

力随着摩擦系数的增加而增加. 对于圆柱形压头, 随着摩擦系数的增加, 在接触区中心右侧出现的最大拉应力增加. 结果表明, 减小摩擦系数可以降低表面拉应力进而抑制表面的接触损伤. 同时观察到, 当考虑偶应力的影响时, 则即使摩擦系数为零, 也可能在接触表面处产生很大的拉应力值.

6 结论

基于偶应力理论, 本文讨论了平压头和圆柱形压头作用于涂层半平面的二维滑动摩擦接触问题, 分析

了尺度参数、剪切模量比值以及摩擦系数对表面法向接触应力和面内应力分布的影响. 结果发现当考虑偶应力的影响时, 法向接触应力和面内应力值明显偏离经典解, 都表现出很强的尺寸效应. 对于平压头和圆柱形压头, 法向接触应力对摩擦系数的变化不敏感, 但是面内应力对摩擦系数的变化非常敏感. 另外, 出现在接触区末端的拉应力随着模量比值的增加而减小, 说明适当调整涂层剪切模量值可以改善接触损伤. 对于无摩擦和滑动摩擦接触, 一旦考虑偶应力时, 无论多小的尺寸参数, 平压头在接触区尾端和圆柱形压头在接触区中心右侧都会出现很大的拉应力.

参考文献

- 1 Cosserat E, Cosserat F. *Theorie des Corps Deformables*. Paris: Herman et Fils, 1909
- 2 Mindlin R D. Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Exp Mech*, 1963, 3: 1-7
- 3 Shaat M. Physical and mathematical representations of couple stress effects on micro/nanosolids. *Int J Appl Mech*, 2015, 7: 1550012
- 4 Georgiadis H G, Velgaki E G. High-frequency Rayleigh waves in materials with micro-structure and couple-stress effects. *Int J Solids Struct*,

- 2003, 40: 2501–2520
- 5 Gourgiotis P A, Georgiadis H G. An approach based on distributed dislocations and disclinations for crack problems in couple-stress elasticity. [Int J Solids Struct](#), 2008, 45: 5521–5539
 - 6 Ansari R, Gholami R. Size-dependent nonlinear vibrations of first-order shear deformable magneto-electro-thermo elastic nanoplates based on the nonlocal elasticity theory. [Int J Appl Mech](#), 2016, 08: 1650053
 - 7 Fathalilou M, Rezazadeh G. Effects of the length scale parameter on the thermoelastic damping of a microbeam considering the couple stress theory. [Int J Appl Mech](#), 2016, 08: 1650083
 - 8 Wang G H, Zheng W, Jiang H, et al. Experiment research on size effect of micro upsetting of pure copper. *J Mech Eng*, 2012, 48: 32–37
 - 9 Zisis T, Gourgiotis P A, Baxevanakis K P, et al. Some basic contact problems in couple stress elasticity. [Int J Solids Struct](#), 2014, 51: 2084–2095
 - 10 Zisis T, Gourgiotis P A, Dal Corso F. A contact problem in couple stress thermoelasticity: The indentation by a hot flat punch. [Int J Solids Struct](#), 2015, 63: 226–239
 - 11 Gourgiotis P A, Zisis T, Baxevanakis K P. Analysis of the tilted flat punch in couple-stress elasticity. [Int J Solids Struct](#), 2016, 85–86: 34–43
 - 12 Song H X, Ke L L, Wang Y S. Sliding frictional contact analysis of an elastic solid with couple stresses. [Int J Mech Sci](#), 2017, 133: 804–816
 - 13 Song H X, Ke L L, Wang Y S, et al. Two-dimensional frictionless contact of a coated half-plane based on couple stress theory. [Int J Appl Mech](#), 2018, 10: 1850049
 - 14 Gwinner J. Frictional unilateral contact for hemitropic solids in micropolar elasticity and boundary element approximation. *AIP Conf Proc*, 2016, 1789: 040030
 - 15 Li S J. Contact problems in a simple strain gradient theory of elasticity and application to nano-indentation. Dissertation for Doctoral Degree. Michigan: Michigan Technological University, 2004
 - 16 Artan R, Altan B S. Propagation of SV waves in a periodically layered media in nonlocal elasticity. [Int J Solids Struct](#), 2002, 39: 5927–5944
 - 17 Wang G F, Feng X Q. Effects of surface stresses on contact problems at nanoscale. *J Appl Phys*, 2007, 101: 013510
 - 18 Chen P J, Chen S H. Partial slip contact between a rigid punch with an arbitrary tip-shape and an elastic graded solid with a finite thickness. [Mech Mater](#), 2013, 59: 24–35
 - 19 Chen P J, Chen S H, Peng J. Sliding contact between a cylindrical punch and a graded half-plane with an arbitrary gradient direction. [J Appl Mech](#), 2015, 82: 041008
 - 20 Peng J, Wang Z J, Chen P J, et al. Surface contact behavior of an arbitrarily oriented graded substrate with a spatially varying friction coefficient. [Int J Mech Sci](#), 2019, 151: 410–423
 - 21 Jäger M, Becherer T, Bruns J, et al. Antifouling coatings on SOI microring resonators for bio sensing applications. [Sens Actuat B-Chem](#), 2016, 223: 400–405
 - 22 Johnson K L. *Contact Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
 - 23 Erdogan F. Mixed boundary-value problems in mechanics. In: Nemat-Nasser S, ed. *Mechanics Today*. New York: Pergamon Press, 1978. 1–86
 - 24 Gradshteyn I S, Ryzhik I M. *Table of Integrals, Series, and Products*. New York: Academic, 2000
 - 25 Komatsu H. Fourier's hyperfunctions and heaviside's pseudodifferential operators. In: *Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis*. London: World Scientific, 2002. 200–214
 - 26 Krenk S. On quadrature formulas for singular integral equations of the first and the second kind. [Quart Appl Math](#), 1975, 33: 225–232
 - 27 Ma L F, Korsunsky A M. Fundamental formulation for frictional contact problems of coated systems. [Int J Solids Struct](#), 2004, 41: 2837–2854
 - 28 Guler M A, Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. [Int J Mech Sci](#), 2007, 49: 161–182

Two-dimensional sliding friction contact analysis of a coated half-plane with coupled stress

SONG HongXia¹, KE LiaoLiang¹ & WANG YueSheng²

¹ Department of Mechanics, School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

² School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China

Based on the couple stress theory, we study the two-dimensional sliding friction contact between a rigid punch and a homogeneous coated half plane. This theory describes the size effect of microstructure materials by introducing characteristic material length. Using the Fourier integral transform method, the size-dependent contact problem is reduced into a Cauchy singular integral equation of the second kind. Then, it is numerically solved to determine the distribution of the normal contact stress and in-plane stress on the contact surface. The effect of the length scale parameter, the ratio of the shear modulus and the friction coefficient on the normal contact stress and in-plane stress are discussed in detail. The results indicate that the contact stress considering the couple stress departs significantly from the prediction of the classical elastic theory, and shows a strong dependence on the characteristic material length.

contact mechanics, couple stress theory, friction, size effect, coating

doi: [10.1360/SST-2019-0079](https://doi.org/10.1360/SST-2019-0079)