多目标优化问题的完全标量化

赵克全¹, 杨新民^{1*}, 夏远梅²

1. 重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331;

2. 上海大学数学系, 上海 200444

E-mail: kequanz@163.com, xmyang@cqnu.edu.cn, mathymxia@163.com

收稿日期: 2019-01-03; 接受日期: 2019-02-16; 网络出版日期: 2019-07-18; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11431004, 11671062 和 11771064) 和重庆市基础与前沿研究计划 (批准号: cstc2015jcyjA00027, cstc2017jcyj-yszxX0008 和 cstc2018jcyj-yszxX0009) 资助项目

摘要 本文首先利用松弛变量和广义 Tchebycheff 范数的推广形式提出一类新的标量化优化问题. 进一步, 通过调整几种参数范围获得一般多目标优化问题弱有效解、有效解和真有效解的一些完全标量化刻画. 此外, 本文提出例子对主要结果进行说明, 利用相应的标量化方法判定给定的多目标优化问题的可行解是否是弱有效解、有效解和真有效解.

关键词 多目标优化 广义 Tchebycheff 范数 完全标量化 有效解 弱有效解 真有效解

MSC (2010) 主题分类 90C26, 90C29, 90C30, 90C46

1 引言

众所周知, 多目标优化理论与方法在最优控制、石油勘探、工程设计、数据挖掘、交通网络规划与设计和管理等诸多实际领域均具有十分重要而广泛的应用, 参见文献 [1–3]. 多目标优化问题描述的是具有竞争性的多个目标函数在可行域上求“最优”的问题, 其理论与方法研究已受到很多学者的关注, 目前已获得一些基础而重要的研究成果, 参见文献 [4–10]. 一些学者通过给出一系列解概念描述决策者对多目标优化问题的最优决策方案, 常见的解概念包括有效解、弱有效解和各类真有效解等 (参见文献 [11, 12]). 由于直接求解多目标优化问题非常困难, 因此, 多目标优化问题的标量化方法与理论被广泛研究并应用于求解多目标优化问题.

由于多目标优化问题解定义的多样性, 一些学者先后提出了不同的标量化方法. Geoffrion^[13] 在可行集为凸的假设条件下, 利用加权和的方法寻找有效点. 然而, 对于可行集非凸的多目标优化问题, 加权和的方法产生的点不一定均是有效点. 因此, Bowman^[14] 利用广义 Tchebycheff 范数提出了一类新的标量化方法. 这类方法无需可行集为凸的假设条件便能找到所有有效点. 对非凸多目标优化问题, 特别是具有非连通的 Pareto 前沿面和非连通的可行域的多目标优化问题, Burachik 等^[15] 提出了一类

英文引用格式: Zhao K Q, Yang X M, Xia Y M. Complete scalarization of multi-objective optimization problems (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 411–424, doi: 10.1360/SCM-2019-0004

新的标量化方法生成 Pareto 前沿面. 此外, Ghane-Kanafi 和 Khorram^[16] 也提出了一类新的标量化方法求解非凸多目标优化问题的有效前沿面. 同时, 关于弱有效解的标量化方法研究也受到一些学者的关注. 例如, Ruíz-Canales 和 Rufián-Lizana^[17] 在拟凸条件下利用 k -目标 ε -约束法刻画了多目标优化问题的弱有效解. 此外, Geoffrion^[12] 首次提出了多目标优化问题的真有效性并在凸性条件下建立了这类真有效性与加权标量化问题最优解之间的关系. 之后, Benson 和 Morin^[18] 提出了其他的标量化方法并在凸性条件下建立了这类真有效解的标量化结果. 在 1983 年, Choo 和 Atkins^[19] 利用广义 Tchebycheff 范数的推广形式提出了多目标优化问题的一类新的标量化方法. 这类标量化方法能够等价刻画非凸多目标优化问题的真有效解. 此外, Huang 和 Yang^[20] 利用标量化优化问题的稳定性和标量化问题精确罚函数的存在性建立了非凸多目标优化问题真有效解的刻画. Zarepisheh 等^[21] 利用非线性加权和标量化方法产生多目标优化问题的真有效点.

最近, Ehrgott 和 Ruzika^[22] 利用松弛变量和剩余变量提出了改进的 ε -约束法, 并建立了多目标优化问题弱有效解、有效解和真有效解的一些充分或必要条件. Rastegar 和 Khorram^[23] 提出了求解多目标优化问题的一类新的标量化方法. 这类标量化方法可以退化为加权和方法^[12,24] 及 ε -约束法^[25] 等一些经典的标量化方法. 进一步, Rastegar 和 Khorram^[23] 也获得了多目标优化问题弱有效解、有效解和真有效解的一些充分或必要条件等. 此外, 目前还有许多刻画或求解多目标优化问题各类解的其他一些标量化方法, 包括有效解的标量化^[26-30]、弱有效解的标量化^[31-35] 和真有效解的标量化方法^[36] 以及刻画或求解多目标优化问题的近似有效解、近似弱有效解和近似真有效解的标量化方法^[37,38].

尽管目前为止国际上关于多目标优化问题的有效解、弱有效解和真有效解, 甚至是各类近似解的标量化方法和结果已有很多, 但这些标量化方法和结果均是对多目标优化问题的某类解进行了刻画, 或者仅仅只是得到了各类解的一些充分条件或必要条件, 已有的标量化方法还不能对多目标优化问题的各类解同时进行等价刻画. 受文献 [19,22,23] 等研究工作的启发, 第 3 节利用松弛变量提出一类新的标量化问题. 进一步, 通过调整标量化问题中的系列参数的范围建立多目标优化问题弱有效解、有效解和真有效解的完全标量化结果. 第 4 节通过例子对本文所建立的主要结果进行说明.

2 预备知识

假定 $\mathbb{R}$ 表示所有实数构成的集合, $\mathbb{R}^p$ 表示 p -维 Euclid 空间, $\mathbf{0}$ 表示 p -维零向量. 对任意给定的 $x, y \in \mathbb{R}^p$, 定义如下序关系:

$$\begin{aligned} x < y &\Leftrightarrow x_i < y_i, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ x \leq y &\Leftrightarrow x_i \leq y_i, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ x \leq y &\Leftrightarrow x \leq y, \quad x \neq y. \end{aligned}$$

考虑如下多目标优化问题 (multi-objective optimization problem, MOP):

$$\begin{aligned} (\text{MOP}) \quad &\min f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \\ &\text{s.t. } g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ &\quad h_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, l, \end{aligned}$$

其中 $f_i, g_j, h_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 对任意的 $1 \leq i \leq p$, $f_i(x)$ 是有上界的函数, 即存在 $U_i \in \mathbb{R}$ 使得 $f_i(x) \leq U_i$. 将 (MOP) 的可行集表示为

$$X = \{x \in \Omega \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m; h_k(x) = 0, k = 1, \dots, l\}.$$

多目标优化问题解概念是由 Pareto 于 1906 年首次提出, 称之为 Pareto 最优. Pareto 最优表达的是“找不到比之更好就是最好”的思想. (MOP) 的 Pareto 有效和 Pareto 弱有效 (也称为有效解和弱有效解) 的定义如下:

定义 2.1^[11] 令 $\hat{x} \in X$.

(i) 称 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的有效解, 若不存在 $x \in X$ 使得 $f(x) \leq f(\hat{x})$;

(ii) 称 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解, 若不存在 $x \in X$ 使得 $f(x) < f(\hat{x})$.

定义 2.2^[12] 称 $\hat{x} \in X$ 是 (MOP) 的 Geoffrion 真有效解 (本文简称为真有效解), 若 $\hat{x}$ 是有效解且存在 $M > 0$ 使得对任意满足 $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ 的 i 和 $x \in X$, 至少存在一个 j 使得 $f_j(\hat{x}) < f_j(x)$ 且

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} \leq M.$$

注 2.1 有效解、弱有效解和真有效解具有如下关系:

$$\boxed{\text{真有效解}} \implies \boxed{\text{有效解}} \implies \boxed{\text{弱有效解}}.$$

注意到, 上述关系的逆关系不一定成立. 例如, 图 1 中所表示的 (MOP) 的弱有效解集、有效解集和真有效解集分别为 $[0, 2]$ 、 $[0, 1.5]$ 和 $[0, 1)$.

求解 (MOP) 常用的方法之一是, 将多目标优化问题转换为与之相关的单目标优化问题. 考虑如下单目标优化问题 (single-objective optimization problem, SOP):

$$(\text{SOP}) \min_{x \in X} g(x),$$

其中 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$. (SOP) 的最优解定义如下:

定义 2.3 称 $\hat{x} \in X$ 是 (SOP) 的最优解, 若对任意的 $x \in X$, 有 $g(x) \geq g(\hat{x})$.

定义 2.4^[19] 令 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^p$ 且 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) > \mathbf{0}$. $\mathbb{R}^p$ 上的实值函数 $\|\cdot\|_\beta^\alpha$ 定义为 $\|y\|_\beta^\alpha = \max_{1 \leq i \leq p} \beta_i |(I_\alpha^{-1}y)_i|$, 其中 I_α 是一个 $p \times p$ 的矩阵且满足

图 1 (网络版彩图) 一类 (MOP) 的目标函数图像

$$(I_\alpha)_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ \alpha, & i \neq j. \end{cases}$$

注 2.2 Choo 和 Atkins^[19] 指出, 若 $\alpha = 0$, 则 $\|y\|_\beta^\alpha$ 可写为

$$\|y\|_\beta^\alpha = \max_{1 \leq i \leq p} \beta_i |y_i|,$$

这与 Bowman^[14] 提出的广义 Tchebycheff 范数一致.

引理 2.1^[19] 若 $-\frac{1}{2p} < \alpha \leq 0$, 则 I_α 非奇异且 I_α 的逆矩阵的所有元素均非负. 特别地, 若 $-\frac{1}{2p} < \alpha < 0$, 则 I_α 的逆矩阵的所有元素均大于 0.

3 (MOP) 的完全标量化

受 Choo 和 Atkins 在文献 [19] 中研究工作的启发, 本文首先通过引入松弛变量提出多目标优化问题一类新的标量化问题. 进一步, 通过调整标量化问题的系列参数范围获得 (MOP) 弱有效解、有效解和真有效解的完全标量化刻画.

考虑如下标量化问题:

$$\begin{aligned} (\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^- \quad & \min \left\{ \|f(x) - f^*\|_\beta^\alpha - \sum_{i=1}^p r_i s_i \right\} \\ \text{s.t.} \quad & f_i(x) + r_i s_i \leq \varepsilon_i, \\ & x \in X, \quad s_i \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, p, \end{aligned}$$

其中 $f^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_p^*)$, 对任意的 $i = 1, 2, \dots, p$, $f_i^* = \min_{x \in X} f_i(x) - \delta$, δ 是给定的充分小正数, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > \mathbf{0}$, 且 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p) \in \mathbb{R}^p$, $r = (r_1, r_2, \dots, r_p) \geq \mathbf{0}$.

定理 3.1 令 $\hat{x} \in X$ 且 $\varepsilon = (U_1, U_2, \dots, U_p)$, 则下面的结果等价:

- (i) $\hat{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解;
- (ii) 存在 $-\frac{1}{2p} < \alpha \leq 0$, $\beta > \mathbf{0}$, $r \geq \mathbf{0}$, $\hat{s} \geq \mathbf{0}$ 使得 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解;
- (iii) 存在 $\beta > \mathbf{0}$ 使得 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解, 其中 $r = 0$, $\alpha = 0$.

证明 首先证 (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

必要性 令 $\hat{x} \in X$ 是 (MOP) 的弱有效解, 则由文献 [11, 定理 4.24] 可知, 存在 $\beta > \mathbf{0}$ 使得 $\hat{x}$ 是如下标量化问题的最优解:

$$\min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq p} \beta_i (f_i(x) - f_i^*).$$

对任意的 $i = 1, 2, \dots, p$, 令

$$\alpha = 0, \quad r_i = \hat{s}_i = 0.$$

显然, $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解.

充分性 令 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解. 若 $\hat{x} \in X$ 不是 (MOP) 的弱有效解, 则存在 $\tilde{x} \in X$ 使得对任意的 $i = 1, 2, \dots, p$, 有 $f_i(\tilde{x}) < f_i(\hat{x})$. 因为 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是可行的, 所以,

$$f_i(\tilde{x}) + r_i \hat{s}_i < f_i(\hat{x}) + r_i \hat{s}_i \leq \varepsilon_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, p,$$

即 $(\tilde{x}, \tilde{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的可行解. 因为 $-\frac{1}{2p} < \alpha \leq 0$, 故由引理 2.1 得, 对任意的 $i = 1, 2, \dots, p$, 有

$$\sum_{j=1}^p (I_{\alpha}^{-1})_{ij} (f(\tilde{x}) - f^*)_j < \sum_{j=1}^p (I_{\alpha}^{-1})_{ij} (f(\hat{x}) - f^*)_j.$$

因此, 由 $\beta > 0$ 和 $f_i^* = \min_{x \in X} f_i(x) - \delta$, 有

$$\max_{1 \leq i \leq p} \beta_i |(I_{\alpha}^{-1}(f(\tilde{x}) - f^*))_i| < \max_{1 \leq i \leq p} \beta_i |(I_{\alpha}^{-1}(f(\hat{x}) - f^*))_i|.$$

故

$$\|f(\tilde{x}) - f^*\|_{\beta}^{\alpha} - \sum_{i=1}^p r_i \hat{s}_i < \|f(\hat{x}) - f^*\|_{\beta}^{\alpha} - \sum_{i=1}^p r_i \hat{s}_i.$$

这与 $(\hat{x}, \hat{s})$ 的最优性矛盾.

其次证 (i) $\Leftrightarrow$ (iii). 由 (i) 与 (ii) 等价的证明过程易知结论显然成立. $\square$

定理 3.2 令 $\hat{x} \in X$ 且 $\varepsilon = f(\hat{x})$, 则 $\hat{x} \in X$ 是 (MOP) 的有效解当且仅当存在 $-\frac{1}{2p} < \alpha \leq 0$, $\beta > 0$, $r > 0$, $\hat{s} \geq 0$ 使得 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解.

证明 必要性 令 $\hat{x} \in X$ 是 (MOP) 的有效解. 对任意的 $i = 1, 2, \dots, p$, 令

$$\alpha = 0, \quad \beta_i = r_i = \frac{1}{f_i(\hat{x}) - f_i^*} > 0, \quad \hat{s}_i = 0.$$

显然, $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的可行解. 下面仅需证明 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解. 反之, 假定存在 $(\tilde{x}, \tilde{s})$ 使得对任意的 $i = 1, 2, \dots, p$, 有

$$f_i(\tilde{x}) + r_i \tilde{s}_i \leq \varepsilon_i = f_i(\hat{x}), \quad \tilde{s}_i \geq 0, \quad \tilde{x} \in X \quad (3.1)$$

且

$$\|f(\tilde{x}) - f^*\|_{\beta}^{\alpha} - \sum_{i=1}^p r_i \tilde{s}_i < \|f(\hat{x}) - f^*\|_{\beta}^{\alpha}, \quad (3.2)$$

则由 (3.1) 和 $r_i > 0$ 可得 $f_i(\tilde{x}) \leq f_i(\hat{x})$, $\forall i = 1, 2, \dots, p$. 因此, 从 $\hat{x}$ 的有效性可知,

$$f_i(\tilde{x}) = f_i(\hat{x}), \quad \forall i = 1, 2, \dots, p.$$

由 (3.1) 可得, 对任意的 $i = 1, 2, \dots, p$, 有 $r_i \tilde{s}_i = 0$. 因此,

$$\|f(\tilde{x}) - f^*\|_{\beta}^{\alpha} - \sum_{i=1}^p r_i \tilde{s}_i = \|f(\hat{x}) - f^*\|_{\beta}^{\alpha},$$

这与 (3.2) 矛盾. 故 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解.

充分性 令 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解. 假设 $\hat{x} \in X$ 不是 (MOP) 的有效解, 则存在 $\tilde{x} \in X$ 使得对任意的 $i = 1, 2, \dots, p$, $f_i(\tilde{x}) \leq f_i(\hat{x})$ 且存在 j 使得 $f_j(\tilde{x}) < f_j(\hat{x})$. 因为 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的可行解, 所以,

$$\begin{aligned} f_i(\tilde{x}) + r_i \hat{s}_i &\leq f_i(\hat{x}) + r_i \hat{s}_i \leq \varepsilon_i, \quad \forall i \neq j, \\ f_j(\tilde{x}) + r_j \hat{s}_j &< f_j(\hat{x}) + r_j \hat{s}_j \leq \varepsilon_j. \end{aligned}$$

因此, 存在 $v > 0$ 使得

$$f_j(\tilde{x}) + r_j \hat{s}_j + r_j v \leq \varepsilon_j.$$

令

$$\tilde{s}_i = \begin{cases} \hat{s}_i + v, & i = j, \\ \hat{s}_i, & i \neq j. \end{cases}$$

显然, $\tilde{s}_j > \hat{s}_j \geq 0$, 则 $(\tilde{x}, \tilde{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的可行解. 因为 $-\frac{1}{2p} < \alpha \leq 0$ 且 $\beta > \mathbf{0}$, 所以, 根据引理 2.1, 可得

$$\max_{1 \leq i \leq p} \beta_i |(I_\alpha^{-1}(f(\tilde{x}) - f^*))_i| \leq \max_{1 \leq i \leq p} \beta_i |(I_\alpha^{-1}(f(\hat{x}) - f^*))_i|.$$

因此, 由 $r > \mathbf{0}$ 可得

$$\|f(\tilde{x}) - f^*\|_\beta^\alpha - \sum_{i=1}^p r_i \tilde{s}_i < \|f(\tilde{x}) - f^*\|_\beta^\alpha - \sum_{i=1}^p r_i \hat{s}_i \leq \|f(\hat{x}) - f^*\|_\beta^\alpha - \sum_{i=1}^p r_i \hat{s}_i.$$

这与假设条件矛盾. 故 $\hat{x} \in X$ 是 (MOP) 的有效解. □

注 3.1 在定理 3.2 中, 参数 r 的范围不能放松至 $r \geq \mathbf{0}$.

例 3.1 考虑如下多目标优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (x_1, x_2) \\ \text{s.t.} \quad & x \in X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2, x_2 \geq -(x_1 - 1)\}. \end{aligned}$$

令 $\delta = 0.1$, $\hat{x} = (2, 0)$, $\varepsilon = f(\hat{x}) = (2, 0)$ 且

$$\alpha = 0, \quad \beta_1 = \frac{1}{2+\delta}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\delta}, \quad r_1 = r_2 = 0, \quad \hat{s}_1 = \hat{s}_2 = 0,$$

则 $f_1^* = f_2^* = -0.1$ 且可将 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 写为

$$\min_{(x,s) \in X_1} \|f(x) - f^*\|_\beta^\alpha = \min_{(x,s) \in X_1} \left\{ \max \left(\frac{1}{2+\delta}(x_1 + \delta), \frac{1}{\delta}(x_2 + \delta) \right) \right\},$$

其中 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的可行集可描述为

$$X_1 = \{(x, s) \mid 1 \leq x_1 \leq 2, x_2 = 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0\}.$$

因为 $(\hat{x}, \hat{s}) \in X_1$, $\|f(\hat{x}) - f^*\|_\beta^\alpha = 1$ 且对所有的 $(x, s) \in X_1$, 有

$$\|f(x) - f^*\|_\beta^\alpha \geq \|f(\hat{x}) - f^*\|_\beta^\alpha = 1,$$

所以, $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解. 然而, $\hat{x}$ 不是上述多目标优化问题的有效解.

例 3.2 考虑例 3.1 中的多目标优化问题. 令

$$\delta = 0.1, \quad \hat{x} = (2, 0), \quad \varepsilon = f(\hat{x}) = (2, 0)$$

且

$$\alpha = 0, \quad \beta_1 = \frac{1}{2+\delta}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\delta}, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 1, \quad \hat{s}_1 = \hat{s}_2 = 0.$$

因此, 可以将 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 表示为如下形式:

$$\min_{(x,s) \in X_2} \{\|f(x) - f^*\|_\beta^\alpha - s_2\} = \min_{(x,s) \in X_2} \left\{ \max \left(\frac{1}{2+\delta}(x_1 + \delta), \frac{1}{\delta}(x_2 + \delta) \right) - s_2 \right\},$$

其中, $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的可行集为

$$X_2 = \{(x, s) \mid 1 \leq x_1 \leq 2, x_2 = 0, s_1 \geq 0, s_2 = 0\}.$$

可以验证, $(\hat{x}, \hat{s}) \in X_2$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解且 $\hat{x}$ 不是上述多目标优化问题的有效解.

定理 3.3 令 $\hat{x} \in X$ 且 $\varepsilon = f(\hat{x})$, 则 $\hat{x} \in X$ 是 (MOP) 的有效解当且仅当存在 $-\frac{1}{2p} < \alpha < 0$, $\beta > 0$, $r \geq 0$, $\hat{s} \geq 0$ 使得 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解.

证明 必要性 设 $\hat{x} \in X$ 是 (MOP) 的有效解. 对任意的 $i = 1, 2, \dots, p$, 令

$$\alpha = -\frac{1}{4p}, \quad \beta_i = \frac{1}{f_i(\hat{x}) - f_i^*} > 0, \quad r_i = \hat{s}_i = 0.$$

显然, $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的可行解. 下面仅需证明 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解. 若 $(\hat{x}, \hat{s})$ 不是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解, 则存在 $(\tilde{x}, \tilde{s})$ 使得对任意的 $i = 1, 2, \dots, p$, $f_i(\tilde{x}) \leq \varepsilon_i = f_i(\hat{x})$ 且

$$\|f(\tilde{x}) - f^*\|_\beta^\alpha < \|f(\hat{x}) - f^*\|_\beta^\alpha. \quad (3.3)$$

由 $\hat{x}$ 的有效性可得 $f(\tilde{x}) = f(\hat{x})$. 因此,

$$\|f(\tilde{x}) - f^*\|_\beta^\alpha = \|f(\hat{x}) - f^*\|_\beta^\alpha.$$

这与 (3.3) 矛盾. 因此, $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解.

充分性 设 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解. 若 $\hat{x}$ 不是 (MOP) 的有效解, 则存在 $\tilde{x} \in X$ 使得对任意的 $i = 1, 2, \dots, p$, $f_i(\tilde{x}) \leq f_i(\hat{x})$ 且存在 j 使得 $f_j(\tilde{x}) < f_j(\hat{x})$. 因此, $(\tilde{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的可行解. 由 f^* 的定义和引理 2.1 可得

$$\begin{aligned} \|f(\tilde{x}) - f^*\|_\beta^\alpha &= \max_{1 \leq i \leq p} \beta_i |(I_\alpha^{-1}(f(\tilde{x}) - f^*))_i| = \max_{1 \leq i \leq p} \beta_i (I_\alpha^{-1}(f(\tilde{x}) - f^*))_i, \\ \|f(\hat{x}) - f^*\|_\beta^\alpha &= \max_{1 \leq i \leq p} \beta_i |(I_\alpha^{-1}(f(\hat{x}) - f^*))_i| = \max_{1 \leq i \leq p} \beta_i (I_\alpha^{-1}(f(\hat{x}) - f^*))_i. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \beta_k (I_\alpha^{-1}(f(\tilde{x}) - f^*))_k &= \max_{1 \leq i \leq p} \beta_i (I_\alpha^{-1}(f(\tilde{x}) - f^*))_i, \\ \beta_l (I_\alpha^{-1}(f(\hat{x}) - f^*))_l &= \max_{1 \leq i \leq p} \beta_i (I_\alpha^{-1}(f(\hat{x}) - f^*))_i. \end{aligned}$$

此外, 由 f^* 的定义和引理 2.1 可得, 对任意的 i , 有

$$\begin{aligned} (I_\alpha^{-1})_{ki} (f_i(\tilde{x}) - f_i^*) &\leq (I_\alpha^{-1})_{ki} (f_i(\hat{x}) - f_i^*), \quad \forall i \neq j, \\ (I_\alpha^{-1})_{kj} (f_j(\tilde{x}) - f_j^*) &< (I_\alpha^{-1})_{kj} (f_j(\hat{x}) - f_j^*). \end{aligned}$$

因此,

$$\beta_l (I_\alpha^{-1}(f(\hat{x}) - f^*))_l \geq \beta_k (I_\alpha^{-1}(f(\hat{x}) - f^*))_k = \beta_k \sum_{i=1}^p (I_\alpha^{-1})_{ki} (f_i(\hat{x}) - f_i^*)$$

$$> \beta_k \sum_{i=1}^p (I_\alpha^{-1})_{ki} (f_i(\tilde{x}) - f_i^*) = \beta_k (I_\alpha^{-1} (f(\tilde{x}) - f^*))_k.$$

故 $\|f(\tilde{x}) - f^*\|_\beta^\alpha < \|f(\hat{x}) - f^*\|_\beta^\alpha$. 从而,

$$\|f(\tilde{x}) - f^*\|_\beta^\alpha - \sum_{i=1}^p r_i \hat{s}_i < \|f(\hat{x}) - f^*\|_\beta^\alpha - \sum_{i=1}^p r_i \hat{s}_i.$$

这与假设条件矛盾. $\square$

注 3.2 例 3.1 表明定理 3.3 中 α 的范围不能放松为 $-\frac{1}{2p} < \alpha \leq 0$; 例 3.2 说明即使将 r 的范围缩小至 $r \geq 0$, 定理 3.3 中 α 的范围也不能放宽为 $-\frac{1}{2p} < \alpha \leq 0$.

定理 3.4 令 $\hat{x} \in X$ 且 $\varepsilon = (U_1, U_2, \dots, U_p)$, 则 $\hat{x} \in X$ 是 (MOP) 的真有效解当且仅当存在 $-\frac{1}{2p} < \alpha < 0, \beta > 0, r \geq 0, \hat{s} \geq 0$ 满足 $r_i \hat{s}_i = 0$ 使得 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解.

证明 必要性 设 $\hat{x} \in X$ 是 (MOP) 的真有效解且对任意的 $i = 1, 2, \dots, p$, 令 $r_i = \hat{s}_i = 0$, 则可将 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 写为

$$\min_{x \in X} \|f(x) - f^*\|_\beta^\alpha. \quad (3.4)$$

因为 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的真有效解, 所以, 由文献 [19, 定理 3.1] 可知, 存在 $-\frac{1}{2p} < \alpha < 0$ 和 $\beta > 0$ 使得 $\hat{x}$ 是 (3.4) 的最优解. 因此, $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解.

充分性 与定理 3.3 的充分性的证明相似, 易知 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的有效解. 下证存在 $M > 0$ 使得对任意满足 $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ 的 i 和 $x \in X$, 至少存在一个 j 使得 $f_j(\hat{x}) < f_j(x)$ 且

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} \leq M.$$

假定 $f_k(\bar{x}) < f_k(\hat{x})$. 令

$$\hat{\theta}_j - \bar{\theta}_j = \min_{1 \leq i \leq p} (\hat{\theta}_i - \bar{\theta}_i),$$

其中 $\hat{\theta}_i = (I_\alpha^{-1}(f(\hat{x}) - f^*))_i, \bar{\theta}_i = (I_\alpha^{-1}(f(\bar{x}) - f^*))_i, i = 1, 2, \dots, p$, 则 $\hat{\theta}_j - \bar{\theta}_j \leq 0$. 若不然, 对任意的 $i = 1, 2, \dots, p$, 有 $\hat{\theta}_i - \bar{\theta}_i > 0$, 则

$$\|f(\hat{x}) - f^*\|_\alpha^\beta = \max_{1 \leq i \leq p} \beta_i \hat{\theta}_i > \max_{1 \leq i \leq p} \beta_i \bar{\theta}_i = \|f(\bar{x}) - f^*\|_\alpha^\beta.$$

从而,

$$\|f(\hat{x}) - f^*\|_\alpha^\beta - \sum_{i=1}^p r_i \hat{s}_i > \|f(\bar{x}) - f^*\|_\alpha^\beta.$$

这与 $(\hat{x}, \hat{s})$ 的最优性矛盾. 故 $\hat{\theta}_j - \bar{\theta}_j \leq 0$ 且 $f_j(\bar{x}) > f_j(\hat{x})$. 后续证明与文献 [19, 定理 3.1] 相似. $\square$

定理 3.5 令 $\hat{x} \in X$ 且 $\varepsilon = f(\hat{x})$. 若 $\hat{x} \in X$ 是 (MOP) 的真有效解, 则存在 $-\frac{1}{2p} < \alpha < 0, \beta > 0, r > 0, \hat{s} \geq 0$ 使得 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解.

证明 设 $\hat{x} \in X$ 是 (MOP) 的真有效解且对任意的 $i = 1, 2, \dots, p$, 令

$$-\frac{1}{2p} < \alpha < 0, \quad \beta_i = \frac{1}{f_i(\hat{x}) - f_i^*} > 0, \quad r_i = 1, \quad \hat{s}_i = 0.$$

因为 $\hat{x} \in X$ 是 (MOP) 真有效解, 所以, $\hat{x} \in X$ 必是 (MOP) 的有效解. 显然, $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的可行解. 下面仅需证明 $(\hat{x}, \hat{s})$ 的最优性. 反证法. 假定存在 $(\tilde{x}, \tilde{s})$ 使得对所有的 $i = 1, 2, \dots, p$, 有

$$f_i(\tilde{x}) + \tilde{s}_i \leq \varepsilon_i = f_i(\hat{x}), \quad \tilde{s}_i \geq 0, \quad \tilde{x} \in X$$

且

$$\|f(\tilde{x}) - f^*\|_\beta^\alpha - \sum_{i=1}^p \tilde{s}_i < \|f(\hat{x}) - f^*\|_\beta^\alpha. \quad (3.5)$$

从而, 由 $\tilde{s}_i \geq 0$ 可得 $f_i(\tilde{x}) \leq f_i(\hat{x}), \forall i = 1, 2, \dots, p$. 因此, 利用 $\hat{x}$ 的有效性, 有

$$f_i(\tilde{x}) = f_i(\hat{x}), \quad \forall i = 1, 2, \dots, p.$$

故 $\tilde{s}_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, p$). 因而,

$$\|f(\tilde{x}) - f^*\|_\beta^\alpha - \sum_{i=1}^p \tilde{s}_i = \|f(\hat{x}) - f^*\|_\beta^\alpha.$$

这与 (3.5) 矛盾. 因此, $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的最优解. $\square$

注 3.3 定理 3.5 的逆不一定成立.

例 3.3 考虑如下多目标优化问题:

$$\begin{aligned} (\text{MOP}) \quad & \min f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \\ \text{s.t.} \quad & x \in X = [-3, 4], \end{aligned}$$

其中

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & x \in [-3, 1], \\ 1, & x \in (1, 2), \\ x-1, & x \in [2, 3], \\ 2, & x \in (3, 4], \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} (1-x)^2, & x \in [-3, 1] \cup (3, 4], \\ 0, & x \in [1, 3]. \end{cases}$$

由图 2 和解定义可知, (MOP) 的弱有效解集、有效解集和真有效解集分别为 $[-3, 3]$ 、 $[-3, 2]$ 和 $[-3, 1)$. 此外, $U_1 = 2, U_2 = 16, f_1^* = -3 - \delta, f_2^* = -\delta$. 令

$$\hat{x} = 2, \quad \varepsilon_i = f_i(\hat{x}), \quad \hat{s}_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad \alpha = 0$$

且

$$\beta_1 = r_1 = \frac{1}{f_1(\hat{x}) - f_1^*} = \frac{1}{4 + \delta}, \quad \beta_2 = r_2 = \frac{1}{f_2(\hat{x}) - f_2^*} = \frac{1}{\delta},$$

则标量化问题可表示为

$$\begin{aligned} (\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon} \quad & \min \|f(x) - f^*\|_\beta^\alpha - \frac{1}{4 + \delta}s_1 - \frac{1}{\delta}s_2 \\ \text{s.t.} \quad & f_1(x) + \frac{1}{4 + \delta}s_1 \leq f_1(\hat{x}) = 1, \\ & f_2(x) + \frac{1}{\delta}s_2 \leq f_2(\hat{x}) = 0, \end{aligned}$$

图 2 (网络版彩图) (MOP) 的目标函数图像

$$x \in X, \quad s_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

由 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的定义可得 $s_1 = s_2 = 0$, $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}$ 中 x 的可行域是 $[1, 2]$ 且 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}$ 可等价地写成

$$\begin{aligned} (\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon} \quad & \min \|f(x) - f^*\|_\beta^\alpha \\ \text{s.t.} \quad & f_1(x) \leq f_1(\hat{x}) = 1, \\ & f_2(x) \leq f_2(\hat{x}) = 0, \\ & x \in X, \quad s_i = 0 \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 2. \end{aligned}$$

下面验证 $(2, 0, 0)$ 是上述标量化问题的最优解. 因为 $\beta_1(f_1(\hat{x}) - f_1^*) = \beta_2(f_2(\hat{x}) - f_2^*) = 1$, 所以, $\|f(\hat{x}) - f^*\|_\beta^\alpha = 1$. 此外, 对任意的 $x \in [1, 2]$, 有 $f_1(x) = f_1(\hat{x}) = 1$ 且 $f_2(x) = f_2(\hat{x}) = 0$, 则

$$\|f(x) - f^*\|_\beta^\alpha = \|f(\hat{x}) - f^*\|_\beta^\alpha = 1, \quad \forall x \in [1, 2].$$

故 $(\hat{x}, \hat{s}) = (2, 0, 0)$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}$ 的最优解, 但 $\hat{x}$ 不是 (MOP) 的真有效解.

注 3.4 (i) 注意到定理 3.1 中参数 ε 的范围可以放松为 $\varepsilon \geq f(\hat{x})$. 一方面, 若 $\varepsilon \geq f(\hat{x})$, 则充分性显然成立. 另一方面, 由必要性的证明过程可知, 在其他参数不变的情形下, ε 的不同取值确定了 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的不同可行域.

(ii) 为了保证定理 3.2–3.4 中 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 的可行解, ε 的范围至少可以放宽至 $\varepsilon \geq f(\hat{x})$. 但保证定理 3.2–3.4 成立的更精确的 ε 范围仍有待研究.

4 算例

利用第 3 节建立的主要结果, 能够判定给定的 (MOP) 的可行解是否是弱有效解、有效解或真有效解. 下面给出一个具体的算例.

例 4.1 考虑例 3.3 中的多目标优化问题.

(i) 令

$$\hat{x} = 3, \quad \alpha = 0, \quad \beta_1 = \frac{\delta}{2(5 + \delta)}, \quad \beta_2 = 1, \quad \varepsilon_i = U_i, \quad r_i = \hat{s}_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

则可将 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}^-$ 表示为

$$\begin{aligned} (\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon} \quad & \min \|f(x) - f^*\|_\beta^\alpha \\ \text{s.t.} \quad & f_i(x) \leq U_i, \\ & x \in X, \quad s_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 2. \end{aligned}$$

显然, x 的可行域为 $[-3, 4]$. 下面验证 $(3, 0, 0)$ 是上述优化问题的最优解. 因为 $\beta_1(f_1(\hat{x}) - f_1^*) = \frac{\delta}{2}$, $\beta_2(f_2(\hat{x}) - f_2^*) = \delta$, 所以, $\|f(\hat{x}) - f^*\|_\beta^\alpha = \delta$. 此外, 因为

$$\begin{aligned} \beta_1(f_1(x) - f_1^*) &= \begin{cases} \frac{\delta}{2(5+\delta)}(x+3+\delta), & x \in [-3, 1], \\ \frac{\delta}{2(5+\delta)}(1+3+\delta), & x \in (1, 2), \\ \frac{\delta}{2(5+\delta)}(x+2+\delta), & x \in [2, 3], \\ \frac{\delta}{2}, & x \in (3, 4], \end{cases} \\ \beta_2(f_2(x) - f_2^*) &= \begin{cases} (1-x)^2 + \delta, & x \in [-3, 1) \cup (3, 4], \\ \delta, & x \in [1, 3], \end{cases} \end{aligned}$$

所以, 对任意的 $x \in [-3, 4]$, 有 $\beta_1(f_1(x) - f_1^*) \leq \frac{\delta}{2} < \delta \leq \beta_2(f_2(x) - f_2^*)$ 且

$$\|f(x) - f^*\|_\beta^\alpha \geq \delta, \quad x \in [-3, 4].$$

因此, $(\hat{x}, \hat{s}) = (3, 0, 0)$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}$ 的最优解且 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的弱有效解.

(ii) 令 $\hat{x} = 1.5$, $\varepsilon_i = f_i(\hat{x})$, $\hat{s}_i = 0$, $i = 1, 2$, $\alpha = 0$ 且

$$\beta_1 = r_1 = \frac{1}{f_1(\hat{x}) - f_1^*} = \frac{1}{4+\delta}, \quad \beta_2 = r_2 = \frac{1}{f_2(\hat{x}) - f_2^*} = \frac{1}{\delta},$$

则标量化问题可表示为

$$\begin{aligned} (\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon} \quad & \min \|f(x) - f^*\|_\beta^\alpha - \frac{1}{4+\delta}s_1 - \frac{1}{\delta}s_2 \\ \text{s.t.} \quad & f_1(x) + \frac{1}{4+\delta}s_1 \leq f_1(\hat{x}) = 1, \\ & f_2(x) + \frac{1}{\delta}s_2 \leq f_2(\hat{x}) = 0, \\ & x \in X, \quad s_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 2. \end{aligned}$$

类似于例 3.3 的计算过程可知, $(\hat{x}, \hat{s}) = (1.5, 0, 0)$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}$ 的最优解且 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的有效解.

(iii) 令 $\hat{x} = -3$, $\varepsilon_i = U_i$, $r_i = \hat{s}_i = 0$, $i = 1, 2$ 且

$$\alpha = -\frac{1}{8}, \quad \beta_1 = \frac{63}{8(9\delta+16)}, \quad \beta_2 = \frac{63}{8(9\delta+128)},$$

则

$$(I_\alpha^{-1})_{11} = (I_\alpha^{-1})_{22} = \frac{64}{63}, \quad (I_\alpha^{-1})_{12} = (I_\alpha^{-1})_{21} = \frac{8}{63}.$$

此外, 标量化问题可以表示为

$$\begin{aligned} (\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon} \quad & \min \|f(x) - f^*\|_\beta^\alpha \\ \text{s.t.} \quad & f_i(x) \leq U_i, \\ & x \in X, \quad s_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 2, \end{aligned}$$

并且 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}$ 中 x 的可行域为 $[-3, 4]$. 下面验证 $(-3, 0, 0)$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}$ 的最优解. 因为

$$\beta_i((I_\alpha^{-1})_{i1}(f_1(\hat{x}) - f_1^*) + (I_\alpha^{-1})_{i2}(f_2(\hat{x}) - f_2^*)) = 1, \quad i = 1, 2,$$

所以, $\|f(\hat{x}) - f^*\|_\beta^\alpha = 1$. 此外, 由

$$\begin{aligned} \beta_1(I_\alpha^{-1}(f(x) - f^*))_1 &= \frac{8f_1(x) + f_2(x) + 24 + 9\delta}{9\delta + 16}, \\ \beta_2(I_\alpha^{-1}(f(x) - f^*))_2 &= \frac{f_1(x) + 8f_2(x) + 3 + 9\delta}{9\delta + 128} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \frac{8f_1(x) + f_2(x) + 24 + 9\delta}{9\delta + 16} &= \begin{cases} \frac{x^2 + 6x + 25 + 9\delta}{9\delta + 16}, & x \in [-3, 1], \\ 1 + \frac{16}{9\delta + 16}, & x \in (1, 2), \\ 1 + \frac{8x}{9\delta + 16}, & x \in [2, 3], \\ \frac{x^2 - 2x + 41 + 9\delta}{9\delta + 16}, & x \in (3, 4], \end{cases} \\ \frac{f_1(x) + 8f_2(x) + 3 + 9\delta}{9\delta + 128} &= \begin{cases} \frac{8x^2 - 15x + 11 + 9\delta}{9\delta + 128}, & x \in [-3, 1], \\ \frac{4 + 9\delta}{9\delta + 128}, & x \in (1, 2), \\ \frac{x + 2 + 9\delta}{9\delta + 128}, & x \in [2, 3], \\ \frac{8(1-x)^2 + 5 + 9\delta}{9\delta + 128}, & x \in (3, 4], \end{cases} \end{aligned}$$

可知 $\beta_1(I_\alpha^{-1}(f(x) - f^*))_1 \geq 1 \geq \beta_2(I_\alpha^{-1}(f(x) - f^*))_2, \forall x \in [-3, 4]$, 即

$$\|f(x) - f^*\|_\beta^\alpha \geq 1, \quad \forall x \in [-3, 4].$$

因此, $(\hat{x}, \hat{s}) = (-3, 0, 0)$ 是 $(\text{SOP})_{r\alpha\beta\varepsilon}$ 的最优解且 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的真有效解.

5 结论

本文研究了一般多目标优化问题的一类新的标量化方法. 利用松弛变量和广义 Tchebycheff 范数的推广形式提出了一类新的标量化模型, 通过调整参数的范围建立了多目标优化问题弱有效解、有效解和真有效解的完全标量化刻画. 主要结果见表 1.

表 1 基于 $(SOP)_{r\alpha\beta\epsilon}^-$ 的标量化结果总结

ϵ	结论	相关定理
$\epsilon \geq f(\hat{x})$	弱有效解 $\Leftrightarrow$ 最优解 $\exists -\frac{1}{2p} < \alpha \leq 0, \beta > 0, r \geq 0, \hat{s} \geq 0$	定理 3.1
$\epsilon = f(\hat{x})$	有效解 $\Leftrightarrow$ 最优解 $\exists -\frac{1}{2p} < \alpha \leq 0, \beta > 0, r > 0, \hat{s} \geq 0$	定理 3.2
$\epsilon = f(\hat{x})$	有效解 $\Leftrightarrow$ 最优解 $\exists -\frac{1}{2p} < \alpha < 0, \beta > 0, r \geq 0, \hat{s} \geq 0$	定理 3.3
$\epsilon_i = U_i$	真有效解 $\Leftrightarrow$ 最优解 $\exists -\frac{1}{2p} < \alpha < 0, \beta > 0, r \geq 0, \hat{s} \geq 0, r_i \hat{s}_i = 0$	定理 3.4
$\epsilon = f(\hat{x})$	真有效解 $\Rightarrow$ 最优解 $\exists -\frac{1}{2p} < \alpha < 0, \beta > 0, r > 0, \hat{s} \geq 0$	定理 3.5

本文的研究结果为求解多目标优化问题, 特别是为求解非凸多目标优化问题提供了新的途径和思路. 如何进一步减少标量化模型中的参数以实现多目标优化问题各类精确解和近似解的等价刻画依然是十分重要且有意义的研究工作.

参考文献

- Ehrgott M, Wiecek M M. Multiobjective programming. In: Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys. International Series in Operations Research & Management Science, vol. 78. New York: Springer, 2005, 667–708
- Marler R T, Arora J S. Survey of multi-objective optimization methods for engineering. Struct Multidiscip Optim, 2004, 26: 369–395
- Zopounidis C, Pardalos P M. Handbook of Multicriteria Analysis. Berlin: Springer, 2010
- Chinchuluun A, Pardalos P M. A survey of recent developments in multiobjective optimization. Ann Oper Res, 2007, 154: 29–50
- Collette Y, Siarry P. Multiobjective Optimization. Principles and Case Studies. Berlin: Springer, 2004
- Fang Y P, Meng K W, Yang X Q. Piecewise linear multicriteria programs: The continuous case and its discontinuous generalization. Oper Res, 2012, 60: 398–409
- Miettinen K M. Nonlinear Multiobjective Optimization. Dordrecht: Kluwer Academic, 1999
- Sawaragi Y, Nakayama H, Tanino T. Theory of Multiobjective Optimization. San Diego: Academic Press, 1985
- Yu P L. Multiple-Criteria Decision Making: Concepts, Techniques, and Extension. New York: Plenum Press, 1985
- Zheng X Y, Yang X Q. The structure of weak Pareto solution sets in piecewise linear multiobjective optimization in normed spaces. Sci China Ser A, 2008, 51: 1243–1256
- Ehrgott M. Multicriteria Optimization. Berlin: Springer, 2005
- Geoffrion A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization. J Math Anal Appl, 1968, 22: 618–630
- Geoffrion A M. Solving bicriterion mathematical programs. Oper Res, 1967, 15: 39–54
- Bowman V J. On the relationship of the Tchebycheff norm and the efficient frontier of multiple-criteria objectives. In: Multiple Criteria Decision Making. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 130. Berlin: Springer, 1976, 76–86
- Burachik R S, Kaya C Y, Rizvi M M. A new scalarization technique to approximate Pareto fronts of problems with disconnected feasible sets. J Optim Theory Appl, 2014, 162: 428–446
- Ghane-Kanafi A, Khorram E. A new scalarization method for finding the efficient frontier in non-convex multi-objective problems. Appl Math Model, 2015, 39: 7483–7498
- Ruiz-Canales P, Rufian-Lizana A. A characterization of weakly efficient points. Math Program, 1995, 68: 205–212
- Benson H P, Morin T L. The vector maximization problem: Proper efficiency and stability. SIAM J Appl Math, 1977, 32: 64–72
- Choo E U, Atkins D R. Proper efficiency in nonconvex multicriteria programming. Math Oper Res, 1983, 8: 467–470
- Huang X X, Yang X Q. On characterizations of proper efficiency for nonconvex multiobjective optimization. J Global Optim, 2002, 23: 213–231
- Zarepisheh M, Khorram E, Pardalos P M. Generating properly efficient points in multi-objective programs by the nonlinear weighted sum scalarization method. Optimization, 2014, 63: 473–486
- Ehrgott M, Ruzika S. Improved ϵ -constraint method for multiobjective programming. J Optim Theory Appl, 2008, 138: 375–396

- 23 Rastegar N, Khorram E. A combined scalarizing method for multiobjective programming problems. *European J Oper Res*, 2014, 236: 229–237
- 24 Marler R T, Arora J S. The weighted sum method for multi-objective optimization: New insights. *Struct Multidiscip Optim*, 2010, 41: 853–862
- 25 Chankong V, Haimes Y Y. *Multiobjective Decision Making Theory and Methodology*. New York: Elsevier, 1983
- 26 Benson H P. Hybrid approach for solving multiple-objective linear programs in outcome space. *J Optim Theory Appl*, 1998, 98: 17–35
- 27 Buchanan J, Gardiner L. A comparison of two reference point methods in multiple objective mathematical programming. *European J Oper Res*, 2003, 149: 17–34
- 28 Kaliszewski I. A modified weighted Tchebycheff metric for multiple objective programming. *Comput Oper Res*, 1987, 14: 315–323
- 29 Karasakal E, Köksalan M. Generating a representative subset of the nondominated frontier in multiple criteria decision making. *Oper Res*, 2009, 57: 187–199
- 30 Steuer R E, Choo E U. An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming. *Math Program*, 1983, 26: 326–344
- 31 Dutta J, Kaya C Y. A new scalarization and numerical method for constructing the weak Pareto front of multi-objective optimization problems. *Optimization*, 2011, 60: 1091–1104
- 32 Eichfelder G. An adaptive scalarization method in multiobjective optimization. *SIAM J Optim*, 2009, 19: 1694–1718
- 33 Eichfelder G. A constraint method in nonlinear multi-objective optimization. In: *Multiobjective Programming and Goal Programming*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 618. Berlin: Springer, 2009, 3–12
- 34 Lin J G G. On min-norm and min-max methods of multi-objective optimization. *Math Program*, 2005, 103: 1–33
- 35 Luc D T, Phong T Q, Volle M. Scalarizing functions for generating the weakly efficient solution set in convex multi-objective problems. *SIAM J Optim*, 2005, 15: 987–1001
- 36 Zarepisheh M, Pardalos P M. An equivalent transformation of multi-objective optimization problems. *Ann Oper Res*, 2017, 249: 5–15
- 37 Engau A, Wiecek M M. Generating ε -efficient solutions in multiobjective programming. *European J Oper Res*, 2007, 177: 1566–1579
- 38 Ghaznavi-ghosoni B A, Khorram E, Soleimani-damaneh M. Scalarization for characterization of approximate strong/weak/proper efficiency in multi-objective optimization. *Optimization*, 2013, 62: 703–720

Complete scalarization of multi-objective optimization problems

Kequan Zhao, Xinmin Yang & Yuanmei Xia

Abstract In this paper, we first propose a kind of new scalarization optimization problem by using the slack variables and the extension of generalized Tchebycheff norm. Furthermore, we obtain some complete scalarization characterizations of weakly efficient solutions, efficient solutions and properly efficient solutions for a general multi-objective optimization problem by adjusting the ranges of several kinds of parameters. Moreover, we give an example to illustrate our main results, which verifies that whether a given feasible solution of multi-objective optimization problems is a weakly efficient solution, an efficient solution and a properly efficient solution by using the corresponding scalarization procedures.

Keywords multi-objective optimization, generalized Tchebycheff norm, complete scalarization, efficient solution, weakly efficient solution, properly efficient solution

MSC(2010) 90C26, 90C29, 90C30, 90C46

doi: 10.1360/SCM-2019-0004