一种针对不确定性结构的区间鲁棒性优化方法

唐嘉昌, 姜潮*, 龙湘云, 张哲, 刘海波

湖南大学机械与运载工程学院, 汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 长沙 410082

* E-mail: jiangc@hnu.edu.cn

收稿日期: 2019-02-01; 接受日期: 2019-05-21; 网络版发表日期: 2019-06-17

科学挑战专题(编号: TZ2018007)资助项目

摘要 本文提出一种针对不确定性结构的区间鲁棒性优化方法. 首先, 采用区间模型度量目标函数和约束函数中的不确定变量和参数. 然后引入鲁棒性评价因子来度量目标函数的鲁棒性, 并采用区间可能度方法(RPDI)处理不确定约束, 进而建立区间鲁棒性优化模型. 针对区间鲁棒性优化求解效率较低的问题, 提出一种高效的优化方法, 该方法将双层嵌套优化问题解耦为区间分析和确定性优化方法序列求解的问题. 在每一迭代步, 根据在当前设计点下的区间分析结果构建一个等效确定性优化问题, 然后通过求解该问题更新设计点. 此外, 本文还提出一种迭代机制, 来提高整个优化过程的收敛速度. 最后, 给出了三个数值算例和一个工程算例验证本文方法的有效性.

关键词 鲁棒性优化, 区间不确定性, 区间可能度方法, 高效鲁棒性优化方法

1 引言

不确定性广泛存在于实际工程问题中, 如材料属性、几何公差和边界条件等. 在诸多不确定因素的影响下, 即使是较小的不确定性, 经过耦合之后也可能导致结构或者系统性能响应的较大偏差. 因此, 对结构进行优化设计时, 有必要考虑不确定因素, 并发展相应不确定优化设计方法, 来获得满足工程可靠性需求的设计结果. 不确定性优化方法大致可分为两大类: 基于可靠性的设计优化方法(RBDO)^[1~5]和鲁棒性设计优化方法(RO)^[6~9]. RBDO主要关注的设计点在不确定约束下的可行性并且减少结构或者系统在潜在极限条件下失效的机会. RO旨在提高结构的鲁棒性并且减少

在设计变量变动时或者噪音影响下结构或者性能的敏感性. 本文主要关注的是鲁棒性设计优化.

鲁棒性设计优化最早由Taguchi提出^[10], 并且逐渐拓展到结构设计领域中. 如Sandgren和Cameron^[11]利用目标函数响应的标准差作为优化指标构建结构鲁棒性优化模型, 并且通过遗传算法进行求解. 为了提高鲁棒性优化问题的计算效率, Harzheim和Warnecke^[12]发展了一种基于kriging代理模型的鲁棒性优化方法. Liang等人^[13]基于Single Loop方法发展了一种高效的鲁棒性优化方法. 更多关于鲁棒性优化的资料, 参见文献[14~20]. 上述方法均为基于概率模型的鲁棒性优化方法, 采用随机变量描述不确定参数, 前提是需要充足的样本点构建不确定参数的精确概率密度分布函数. 然

引用格式: 唐嘉昌, 姜潮, 龙湘云, 等. 一种针对不确定性结构的区间鲁棒性优化方法. 中国科学: 技术科学, 2019, 49: 787–802

Tang J C, Jiang C, Long X Y, et al. An interval robust optimization method for uncertain structures (in Chinese). Sci Sin Tech, 2019, 49: 787–802, doi: 10.1360/SST-2019-0052

而在实际工程问题中, 尤其是在设计的初期, 由于试验条件和成本的限制, 往往难以获得足够多的样本点^[21].

因此, 在不确定性领域发展了一种非概率不确定性分析技术, 即区间模型^[22]. 区间模型只需要不确定参数的边界而非准确的概率分布, 所以只需要较少的样本点或者仅仅依据工程技术人员的经验便得以构建. 基于区间模型, 在最近20年间发展了若干区间鲁棒性优化方法. Ben-Tal和Nemirovski^[23]考虑了区间不确定影响下线性规划问题, 并且尝试去获得鲁棒性解. Sun等人^[24]考虑目标函数的鲁棒性, 将单目标优化问题转化为关于目标函数的均值和方差的多目标优化问题, 再将其转化为bi-level的数学模型进行求解. Gunawa和Azarm^[25-27]提出一种新的区间参数灵敏度评估方法, 并将该方法推广到单目标和多目标的鲁棒性优化问题中. 为了获得带有区间参数鲁棒性优化的全局最优解, Yonekura和Kanno^[28]采用分支定界方法处理桁架结构鲁棒性拓扑优化问题. Siddiqui等人^[29]通过在原有的Bender's分解方法中增加额外的鲁棒性判断, 将Bender's分解方法拓展到区间非线性鲁棒性优化问题中, 提高了鲁棒性优化问题的求解效率. Zhou等人^[30]考虑了设计变量和参数中同时带有区间不确定性的情况, 并提出了一种求解带有区间参数鲁棒性问题的序列二次规划方法. 为了进一步提高区间鲁棒性优化方法的计算效率, Zhou和Li^[31]提出了一种新的方法来高效计算目标函数和约束在区间参数影响下的响应区间. Kang和Bai^[32]考虑了桁架结构中载荷和结构参数同为区间参数的鲁棒性设计优化问题. 为了获得广义半无限规划问题的鲁棒性解, Chen和Tang^[33]发展了两种高效序列迭代优化算法. Jiang等人^[34]考虑了在设计优化过程中公差的影响, 提出了一种基于公差设计的区间优化方法. Wang和Qing^[35]提出一种区间运算和仿射运算混合方法求解区间鲁棒性优化问题. Hu等人^[36]提出了一个新的鲁棒性指标来表示约束的变动量, 并将区间鲁棒性优化问题转化为确定性优化问题进行求解. Cheng等人^[37]提出了一种区间约束违反程度正则化(NVDIC)方法, 对不同的设计向量进行分类排序, 并且基于此提出了一种直接方法求解区间鲁棒性优化问题.

综上所述, 区间鲁棒性优化的研究工作已经取得了一定的进展, 但是依然存在两个关键问题亟待解决. 首先, 已有的方法大多采用“最坏情况方法”处理不确

定约束. “最坏情况方法”需要约束在不确定参数所有可能的取值情况下都满足要求, 是一种较为刚性的方法, 并且往往会造成不合预期的目标函数值. 然而, 在实际工程问题中, 我们往往希望能够采用可能度的方式根据不同的工程实际问题给与不确定约束以可控制的满足程度, 并且通过多重标准保证不确定性目标函数的性能. 其次, 在求解区间鲁棒性优化问题中常常会遇到双层嵌套问题, 其中外层是设计变量寻优, 内层是优化函数响应上下边界的计算. 对于实际工程问题, 双层嵌套优化通常造成极低的计算效率.

针对区间鲁棒性优化存在的问题, 本文提出一种区间鲁棒性优化方法, 该方法的主要创新点包括以下两个方面: 第一, 通过引入区间可能度度量不确定约束的可靠性, 使不确定约束的满足程度可以得到控制; 第二, 提出一种高效的解耦方法来提高区间鲁棒性优化问题的求解效率.

2 区间鲁棒性优化模型的构建

常规的确定性优化问题可表述为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}) \\ \text{s.t. } g_j(\mathbf{d}) \leq b_j, j = 1, 2, \dots, l, \\ \mathbf{d} \in \Omega^n, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{d}$ 表示在设计空间 Ω^n 中的 n 维的设计向量; f 和 g_j 分别表示目标函数和第 j 个约束; l 为约束的个数; b_j 为第 j 个约束的最大允许值.

在实际工程问题中, 不确定性经常存在于结构参数中, 如材料特性、几何尺寸等. 采用区间模型描述这些不确定性, 能够建立如下区间不确定性优化模型.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{X}} f(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) \\ \text{s.t. } g_j(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) \leq b_j^I = [b_j^L, b_j^R], j = 1, 2, \dots, l, \\ \mathbf{P} \in \mathbf{P}^I = [\mathbf{P}^L, \mathbf{P}^R], P_j = [P_j^L, P_j^R], j = 1, 2, \dots, q, \\ \mathbf{X} \in \mathbf{X}^I = [\mathbf{X}^L, \mathbf{X}^R] = [\mathbf{X}^C - \mathbf{X}^W, \mathbf{X}^C + \mathbf{X}^W], \\ \mathbf{d} \in \Omega^n, \mathbf{X}^C \in \Omega^m, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{X}$ 表示 m 维不确定性设计向量并且通过区间向量 $\mathbf{X}^I$ 来度量; $\mathbf{P}$ 表示一个 q 维不确定性向量并且通过区间向量 $\mathbf{P}^I$ 来度量; b_j^I 为第 j 个约束的最大允许区间; 上标 L 和 R 分别表示区间上边界和下边界; 上标 C 以及 W

分别表示区间中点和区间半径; Ω^m 表示不确定设计向量的中点向量 $\mathbf{X}^C$ 的设计域; $\mathbf{X}^W$ 表示不确定设计向量的扰动量. 如果 g_j 是关于区间参数向量 $\mathbf{P}$ 和不确定设计变量 $\mathbf{X}$ 的连续函数, 那么在任意一个设计点 $(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C)$ 下, 目标函数 $f(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ 和 $g_j(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ 都将会是区间. 所以, 上述问题无法通过传统的确定性优化方法进行求解.

2.1 不确定性目标的处理

在实际工程设计问题中, 我们不仅希望得到一个满足可靠性要求的设计, 而且希望该设计在不确定影响下不敏感, 进而保证结构或者系统的鲁棒性. 本文采用原不确定目标函数的名义目标函数 $f(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C)$ 来表示其平均性能, 并且引入鲁棒性评价因子来衡量其鲁棒性^[30].

$$V = f(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) - f(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C), \quad (3)$$

其中, V 所有可能的取值会是一个包含实数 0 的区间 $0 \in V^I$. V^I 的上下边界分别表示目标函数在上下两个方向上相对于平均性能最大的变动量, 因此, 区间 V^I 的上下边界的绝对值越大, 表示不确定影响下的目标函数的变动越大, 系统或者结构的鲁棒性能越差, 反之则否.

在处理鲁棒性评价因子时, 通常有两种思路: 第一种是将鲁棒性评价因子作为一个新的目标函数, 构建以名义目标函数和鲁棒性评价因子为两目标函数的多目标不确定性优化模型; 第二种是给定鲁棒性要求并且将鲁棒性评价因子转化为一个新的约束, 然后以名义目标函数为新的目标函数构建优化模型. 本文采用第二种处理方法, 将不确定目标函数转化为

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{d}, \mathbf{X}^C} f(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) \\ & \text{s.t. } g(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) = |f(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) - f(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C)| \leq \Delta f^I, \\ & \quad \mathbf{P} \in \mathbf{P}^I = [\mathbf{P}^L, \mathbf{P}^R], P_j = [P_j^L, P_j^R], j = 1, 2, \dots, q, \\ & \quad \mathbf{X} \in \mathbf{X}^I = [\mathbf{X}^L, \mathbf{X}^R] = [\mathbf{X}^C - \mathbf{X}^W, \mathbf{X}^C + \mathbf{X}^W], \\ & \quad \mathbf{d} \in \Omega^n, \mathbf{X}^C \in \Omega^m, \end{aligned} \quad (4)$$

其中, Δf^I 为鲁棒性因子约束的最大允许区间; 称式(4)中的约束为鲁棒性因子约束, 该约束的作用是控制目标函数在不确定性影响下的变动量, 保证一个对不确定性不敏感的设计, 进而实现结构或者系统设计的鲁棒性. 另外, 鲁棒性因子约束含有绝对值, 是因为要限

制目标函数在上下两个方向的变动量.

2.2 不确定约束的处理

在处理不确定约束时, 通常采用的是“最坏情况方法”. “最坏情况方法”要求约束在不确定性参数所有可能的取值下都满足要求, 这是一种较为刚性的处理方法. 在区间数优化方法中, 通常以可能性的方式给予不确定约束以可控制的满足程度, 并且通过多重标准保证不确定性目标函数的性能, 相比于最坏情况方法它更具有灵活性和柔性. 通过可能度的引入, 决策者可以根据实际问题以及自身的经验和偏好, 灵活地控制整个求解过程, 故具有更大的设计空间. 区间可能度(RPDI)方法^[38,39]是用来表示一区间大于或者小于另一区间的程度的方法. 对于任意两个区间 A^I 和 B^I , 区间 A^I 小于等于 B^I 的可能度 $Pr(A^I \leq B^I)$ 能够表示为

$$\begin{aligned} Pr(A^I \leq B^I) &= \frac{B^R - A^L}{2(A^W + B^W)}, \\ A^W &= \frac{A^R - A^L}{2}, B^W = \frac{B^R - B^L}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $Pr(A^I \leq B^I) \in [-\infty, +\infty]$. 可能度水平的值越大, 表示可能度越高. 特别地, 当 $A^R = B^L$ 时, 可能度水平等于 1, 此时区间 A^I 中任意一个数都不大于区间 B^I 中的任意一个数. 当区间 A^I 退化为一个确定的数或者区间 B^I 退化成一个确定的数时, RPDI 方法依然可行.

$$Pr(A \leq B^I) = \frac{B^R - A}{2B^W}, Pr(A^I \leq B) = \frac{B - A^L}{2A^W}. \quad (6)$$

类似地, 将区间可能度方法应用到不确定约束的处理中, 并将其转化为可靠性约束的形式.

$$\begin{aligned} Pr(g_j^I(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C) \leq b_j^I) &= \frac{b_j^R - g_j^L(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C)}{2g_j^W(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C) + 2b_j^W} \geq \lambda_{pj}, \\ g_j^W(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C) &= \frac{g_j^R(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C) - g_j^L(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C)}{2}, \\ b_j^W &= \frac{b_j^R - b_j^L}{2}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中, λ_{pj} 表示第 j 个约束预设的 RPDI 水平, 通常由决策者给定. 预设的 RPDI 水平 λ_{pj} 反映了约束的限制程度, λ_{pj} 越大, 表示要约束要求的可靠性越大, 反之亦然.

$g_j^l(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C)$ 为不确定约束函数 $g_j(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ 在设计点 $(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C)$ 上可能的取值区间, 其上下边界可以表示为

$$\begin{cases} g_j^l(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C) = \min_{\mathbf{X}, \mathbf{P}} g_j(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}), \\ g_j^r(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C) = \max_{\mathbf{X}, \mathbf{P}} g_j(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}). \end{cases} \quad (8)$$

由式(8)可知, 在计算约束响应的上下边界时需要两次区间分析计算。

为了书写方便, 定义

$$\lambda_j(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C) = Pr(g_j^l(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C) \leq b_j^l). \quad (9)$$

基于式(7)和(4), 可以建立一个新的区间鲁棒性优化模型。

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{d}, \mathbf{X}^C} f(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) \\ & \text{s.t. } Pr(g_j^l(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C) \leq b_j^l) \geq \lambda_{pj}, j = 1, 2, \dots, l, \\ & \quad Pr(g_{l+1}^l(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C) = |f(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) - f(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C)| \leq \Delta f^l) \geq \lambda_{p(j+1)}, \\ & \quad \mathbf{P} \in \mathbf{P}^l = [\mathbf{P}^L, \mathbf{P}^R], P_j = [P_j^L, P_j^R], j = 1, 2, \dots, q, \\ & \quad \mathbf{d} \in \Omega^n, \mathbf{X}^C \in \Omega^m, \mathbf{X} \in \mathbf{X}^l = [\mathbf{X}^C - \mathbf{X}^W, \mathbf{X}^C + \mathbf{X}^W]. \end{aligned} \quad (10)$$

如式(10)所示, 与传统的优化问题相比, 约束的个数从 l 个变为 $l+1$ 个, 第 $l+1$ 个约束为鲁棒性因子约束。与已有的鲁棒性优化模型相比, 该模型在处理约束时具有较好的灵活性, 能够根据具体的问题对约束的严格程度进行调整。在求解式(10)时, 常常会遇到外层为设计变量的寻优, 内层为计算约束函数响应边界的双层嵌套问题, 需要调用较多次的区间分析计算。然而实际的工程优化设计问题常常基于一些复杂的数值分析模型, 比如有限元模型和多体动力学模型, 这些模型即使只计算一次也需要较长的计算时间, 基于上述数值分析模型的双层嵌套优化将会导致求解效率极为低下。即便对于单次计算较快的数值分析模型, 所需要的优化时间往往也无法满足设计需要。因此, 需要发展一种高效的解耦方法克服双层嵌套的问题, 提升区间鲁棒性优化问题的求解效率。

3 高效解耦方法

本文提出一种高效的方法来解决双层嵌套问题, 该方法的求解策略是将双层嵌套优化问题转化为一系

列的区间分析和确定性优化序列求解问题。在每一步迭代中, 首先, 在当前设计点上采用区间分析方法计算每一个约束的区间可能度水平, 然后, 基于该水平构建等效确定性优化模型, 再通过求解等效确定性优化模型更新设计点。

3.1 等效确定性优化问题的建立

本文方法的关键在于引入确定性约束RPDI水平的概念并且联系不确定约束RPDI水平和其相应的确定性约束RPDI水平。对于第 j 个约束, 定义忽略设计变量和参数不确定性影响下约束的RPDI水平为确定性约束RPDI水平, 记为 $\lambda_j^C(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C)$ 。确定性约束RPDI水平只与不确定设计变量的中点和参数的中点值有关, 因此, 又称确定性约束RPDI水平 $\lambda_j^C(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C)$ 为中点RPDI水平。此外, 用 $\Delta\lambda_j$ 表示在不确定性的影响下第 j 个约束RPDI水平的减小量。

$$\Delta\lambda_j = \lambda_j^C(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C) - \lambda_j(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C), j = 1, 2, \dots, l+1. \quad (11)$$

通过大量的分析, 我们发现在相近的不同设计点下, 约束的RPDI水平减小量具有一定的规律, 即在相近的不同设计点上虽然约束的RPDI水平不同, 但是它们的RPDI减小量非常接近。因此, 基于式(11)我们找到了一种联系约束的RPDI水平与其相应的中点RPDI水平的方法, 即假设不确定性引起的RPDI水平的减少量 $\Delta\lambda_j$ 不变。当更新后的设计点非常接近上一步设计点的时候, 上述假设是精确的, 此时约束在新设计点下的RPDI水平和中点RPDI水平之间的关系是

$$\lambda_j(\mathbf{d}^{(\text{New})}, \mathbf{X}^{C(\text{New})}) = \lambda_j^C(\mathbf{d}^{(\text{New})}, \mathbf{X}^{C(\text{New})}) - \Delta\lambda_j, \quad (12)$$

其中, $\lambda_j(\mathbf{d}^{(\text{New})}, \mathbf{X}^{C(\text{New})})$ 和 $\lambda_j^C(\mathbf{d}^{(\text{New})}, \mathbf{X}^{C(\text{New})})$ 分别表示约束在新设计点下的RPDI水平和中点RPDI水平。

根据式(10), 在新设计点下, 第 j 个约束的RPDI水平需要满足:

$$\lambda_j(\mathbf{d}^{(\text{New})}, \mathbf{X}^{C(\text{New})}) \geq \lambda_{pj}. \quad (13)$$

根据式(12)和(13)可得

$$\lambda_j^C(\mathbf{d}^{(\text{New})}, \mathbf{X}^{C(\text{New})}) \geq \lambda_{pj} + \Delta\lambda_j. \quad (14)$$

式(14)表示新的设计点下约束的中点RPDI水平达到 $\lambda_{pj} + \Delta\lambda_j$ 时, 它的RPDI水平将会满足要求。基于式

(14), 不确定性约束能够转化为等效的确定性约束, 区间鲁棒性优化问题能够转化为等效的确定性优化问题.

例如, 考虑一个初值设计向量为 $(\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{X}^{C(1)})$ 的区间鲁棒性优化模型, 其中上标括号中的数字表示迭代的步数. 在该设计点上, 采用区间分析方法计算所有约束在设计点 $(\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{X}^{C(1)})$ 上的RPDI水平 $\lambda_j(\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{X}^{C(1)})$, 并且再计算所有约束在设计点 $(\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{X}^{C(1)})$ 的中点RPDI水平 $\lambda_j^C(\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{X}^{C(1)})$, 基于式(11)能够得到所有约束的RPDI水平减小量 $\Delta\lambda_j^{(1)}$. 基于RPDI水平减小量和式(14), 等效确定性优化模型可以构建如下:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{X}^C} & f(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) \\ \text{s.t. } & Pr(g_j(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) \leq b_j^I) \geq \lambda_{pj} + \Delta\lambda_j^{(1)}, j = 1, 2, \dots, l, \\ & Pr(-f(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) \leq \Delta f^I) \geq \lambda_{p(l+1)} + \Delta\lambda_{l+1}^{(1)}, \\ & \mathbf{d} \in \Omega^n, \mathbf{X}^C \in \Omega^m. \end{aligned} \quad (15)$$

由于等效确定性约束忽略了设计变量和参数的不确定性, 只与不确定设计变量和参数的区间中点有关, 从而式(15)中的目标函数 $f(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C)$ 和约束 $g_j(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C)$ 在任意设计点下都是确定的值. 根据RPDI的定义, 式(15)能够写成

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{X}^C} & f(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) \\ \text{s.t. } & g_j(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) \leq b_j^R - 2b_j^W(\lambda_{pj} + \Delta\lambda_j^{(1)}), j = 1, 2, \dots, l, \\ & f(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) \geq 2\Delta f_0^W(\lambda_{p(l+1)} + \Delta\lambda_{l+1}^{(1)}) - \Delta f_0^R, \\ & \mathbf{d} \in \Omega^n, \mathbf{X}^C \in \Omega^m. \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)是一个传统的确定性优化问题, 能够采用传统的优化方法求解. 通过求解式(16), 设计向量将会更新到 $(\mathbf{d}^{(2)}, \mathbf{X}^{C(2)})$. 约束在设计点 $(\mathbf{d}^{(2)}, \mathbf{X}^{C(2)})$ 上的中点RPDI水平将会满足 $\lambda_j^C(\mathbf{d}^{(2)}, \mathbf{X}^{C(2)}) \geq \lambda_{pj} + \Delta\lambda_j^{(1)}, j=1, 2, \dots, l+1$.

3.2 迭代机制

在构建等效确定性优化过程中, 假定约束RPDI水

平的减小量 $\Delta\lambda_j$ 保持不变. 如果这个假设成立并且没有误差, 则即使设计点 $(\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{X}^{C(1)})$ 和设计点 $(\mathbf{d}^{(2)}, \mathbf{X}^{C(2)})$ 处约束的RPDI水平和中点RPDI水平不同, 它们的RPDI水平的减小量还是会相同, 进而转化之后的等效确定性优化问题式(16)将会完全等效于原区间鲁棒性优化问题, 更新后的设计向量 $(\mathbf{d}^{(2)}, \mathbf{X}^{C(2)})$ 是区间鲁棒性优化问题精确的最优解. 然而, 上述假设将不可避免地产生误差, 当设计点更新到 $(\mathbf{d}^{(2)}, \mathbf{X}^{C(2)})$ 后, 约束RPDI水平的减小量也会相应地变化, 因此, 在很多情况下设计点 $(\mathbf{d}^{(2)}, \mathbf{X}^{C(2)})$ 都不会是区间鲁棒性优化问题的最优解. 于是, 我们构建了一个迭代机制来更新设计点.

如图1所示, 本文方法的迭代机制概括如下:

步骤一: 设置 $s = 1$ 并给定初始设计点 $(\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{X}^{C(1)})$.

设置准许误差 ξ 以及预设RPDI水平 $\lambda_{pj}, j = 1, 2, \dots, l+1$;

步骤二: 在第 s 个循环中, 直接计算所有约束的中点RPDI水平 $\lambda_j^C(\mathbf{d}^{(s)}, \mathbf{X}^{C(s)}), j = 1, 2, \dots, l+1$, 并且采用合适的区间分析方法计算所有约束的RPDI水平 $\lambda_j(\mathbf{d}^{(s)}, \mathbf{X}^{C(s)}), j = 1, 2, \dots, l+1$, 进而通过式(11)计算可精度水平下降量 $\Delta\lambda_j, j = 1, 2, \dots, l+1$;

步骤三: 构建如式(16)所示的等效确定性优化模型;

步骤四: 选择合适的传统优化方法求解式(16), 得到最优解 $\mathbf{X}^{C*}$, 并且令 $[\mathbf{d}^{(s+1)}, \mathbf{X}^{C(s+1)}] = [\mathbf{d}^*, \mathbf{X}^{C*}]$;

步骤五: 检验是否满足收敛要求. 若满足, 则 $[\mathbf{d}^{(s+1)}, \mathbf{X}^{C(s+1)}]$ 为最优设计向量, 迭代结束; 否则, 令 $s := s + 1$, 返回到步骤二.

理论上, 可以选取任意点作为本文方法的初始点, 但是, 为了提高本文方法的收敛效率, 采用一确定性优化模型的解作为初始解.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{X}^C} & f(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) \\ \text{s.t. } & g_j(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) \leq b_j^R - 2b_j^W\lambda_{pj}, j = 1, 2, \dots, l, \\ & f(\mathbf{d}, \mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) \geq 2\Delta f_0^W\lambda_{p(l+1)} - \Delta f_0^R, \\ & \mathbf{d} \in \Omega^n, \mathbf{X}^C \in \Omega^m. \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)是式(16)在RPDI水平减小量 $\Delta\lambda_j=0$ 时的一种特殊的情况, 能够采用传统的优化方法进行求解.

本文方法第一次迭代的示意图如图2(a)或(b)所示.

图1 本文方法迭代机制

从图中可以看到, 该等效确定性优化模型与传统优化模型的不同在于: 等效确定性优化模型带有一个与目标函数有关的约束, 而传统的优化模型一般没有. 为了方便描述, 假设一个带有两约束和一个鲁棒性指标约束的区间鲁棒性优化模型. 首先求解如式(17)所示的确定性优化模型, 得到初始设计向量 $\mathbf{X}^{C(1)}$, 假设 $\mathbf{X}^{C(1)}$ 落在初始确定性优化模型约束 $g_2(\mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) \leq b_2^R - 2b_2^W \lambda_{p2}$ 的边界上, 并且接近约束 $g_1(\mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) \leq b_1^R - 2b_1^W \lambda_{p1}$ 的边界. 之后通过式(12)计算在设计点 $\mathbf{X}^{C(1)}$ 上的RPDI水平的减少量 $\Delta\lambda_1^{(1)}$, $\Delta\lambda_2^{(1)}$ 和 $\Delta\lambda_3^{(1)}$, 进而获得等效确定性约束的边界. 相比于初始的约束边界, 等效确定性约束边界向可行域方向移动了一个距离. 在等效约束边界的作用下, 最优设计点 $\mathbf{X}^{C(2)}$ 相比于初始设计点 $\mathbf{X}^{C(1)}$ 也向可行域移动了一个距离. 通过若干次迭代, 等效确定性约束边界的移动量的改变量将会逐渐减小, 最终达到一个稳定的值, 从而算法得以收敛并且能够获得区间鲁棒性优化问题的最优解. 另外, 因为本文方法引入了可能度的概念, 可以根据实际情况, 通过调整预设RPDI水平来调整对鲁棒性要求的严格程度. 当

图2 本文方法第一步迭代示意图. (a) 鲁棒性因子约束为不起作用约束; (b) 鲁棒性因子约束为起作用约束

鲁棒性因子约束的预设RPDI水平较小时, 容易造成等效的鲁棒性因子约束是不起作用约束, 如图2(a)所示. 当鲁棒性因子约束的预设RPDI水平较大时, 鲁棒性因子约束是一个起作用约束, 如图2(b)所示.

随着迭代的进行, 设计点将会逐渐接近一个稳定的点, 并且由近似引起的误差将会变得越来越小. 通常情况下, 本文方法只需要很少的迭代步就能收敛到一个较为精确的解. 本文方法将鲁棒性优化问题转化为一系列的区间分析和确定性优化问题, 成功地避免了双层嵌套问题, 提高了计算效率. 此外, 本文方法没有限制特定的区间分析方法和确定性优化方法, 理论上说设计人员可以根据实际工程问题选择最合适的方法求解相应转化后的子问题. 例如, 设计人员可以根据不同不确定性水平下的区间分析问题选择一阶泰勒展开区间方法^[40]、二阶泰勒展开区间方法^[41]、子区间方法^[42]等的一种或者多种进行求解. 因此相较于已有的区间鲁棒性优化方法, 本文方法更具有一般性, 并且为设计人员提供了较大的决策空间.

对于大规模鲁棒性优化问题, 也能通过本文方法

进行求解. 本文方法能够将大规模区间鲁棒性优化问题转化为大规模的区间分析和大规模确定性优化序列求解的问题. 因此, 只需要根据实际工程问题选择合适的大规模区间分析方法和大规模确定性优化方法对相应的问题进行求解即可. 比如对于大规模的区间分析问题, 能够采用降维区间分析方法进行处理^[43], 对于大规模确定性优化问题, 可以采用变尺度法进行处理.

4 数值算例及其讨论

此部分将通过三个算例来验证本文方法的精度和效率. 所有的算例均采用序列二次规划方法(SQP)^[44]作为区间分析问题求解方法以及确定性优化问题的求解方法. 为了让读者更好地理解本文方法, 我们将会在算例1中详细介绍本文方法的计算过程. 另外, 采用区间分析所需的调用次数作为检验本文方法效率的评价指标, 并且将双层嵌套优化方法获得的计算结果与本文方法获得的计算结果进行比较来检验本文方法的计算精度.

4.1 算例1

考虑一区间鲁棒性优化问题如下:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}^C} f(\mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) &= P_3^C X_1^C + 7P_2^C X_2^C - P_1^C X_1^C X_2^C + 100, \\ \text{s.t. } Pr(g_j(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \leq 0) &\geq \lambda_{pj}, j = 1, 2, 3, \\ g_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= P_2 P_3 X_2 + P_1 X_1 X_2 - [750, 1050], \\ g_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= P_1 P_2 (X_1 - 15)^2 + P_3 (X_2 - 20)^2 - [650, 950], \\ g_3(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= |f(\mathbf{X}, \mathbf{P}) - f(\mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C)| - [130, 170], \\ P_1 &\in [1.5, 2.5], P_2 \in [3.5, 4.5], P_3 \in [5.5, 6.5], \\ 0 \leq X_i^C \leq 21, X_i^W &= 0.1, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (18)$$

其中, 约束 g_1 和约束 g_2 的预设RPDI水平设置为 $\lambda_{p1} = 1$

和 $\lambda_{p2} = 1$; 初始的设计向量为 $\mathbf{X}^{C(1)} = [19.22, 10.65]$. 下面我们将分析鲁棒性因子约束在3种不同的预设可能度水平下的计算结果.

首先, 分析鲁棒性因子约束在预设RPDI水平为 $\lambda_{p3} = 0.9$ 的情况. 直接计算所有约束在初始设计点 $\mathbf{X}^{C(1)} = [19.22, 10.65]$ 上的中点RPDI水平:

$$\begin{cases} \lambda_1^C(\mathbf{X}^{C(1)}) = 1.00, \\ \lambda_2^C(\mathbf{X}^{C(1)}) = 1.00, \\ \lambda_3^C(\mathbf{X}^{C(1)}) = 9.08. \end{cases} \quad (19)$$

之后采用SQP计算所有约束函数在初始设计点响应的上下边界, 进而计算所有约束在初始设计点下的RPDI水平:

$$\begin{cases} \lambda_1(\mathbf{X}^{C(1)}) = 0.72, \\ \lambda_2(\mathbf{X}^{C(1)}) = 0.71, \\ \lambda_3(\mathbf{X}^{C(1)}) = 0.80. \end{cases} \quad (20)$$

通过式(11)计算3个约束RPDI水平的减小量:

$$\begin{cases} \Delta\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^C(\mathbf{X}^{C(1)}) - \lambda_1(\mathbf{X}^{C(1)}) = 0.28, \\ \Delta\lambda_2^{(1)} = \lambda_2^C(\mathbf{X}^{C(1)}) - \lambda_2(\mathbf{X}^{C(1)}) = 0.29, \\ \Delta\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^C(\mathbf{X}^{C(1)}) - \lambda_3(\mathbf{X}^{C(1)}) = 8.28. \end{cases} \quad (21)$$

基于式(14)和(21), 约束的中点RPDI水平需要满足:

$$\begin{cases} \lambda_1^C(\mathbf{X}^C) \geq \lambda_{p1} + \Delta\lambda_1^{(1)} = 1.28, \\ \lambda_2^C(\mathbf{X}^C) \geq \lambda_{p2} + \Delta\lambda_2^{(1)} = 1.29, \\ \lambda_3^C(\mathbf{X}^C) \geq \lambda_{p3} + \Delta\lambda_3^{(1)} = 9.18. \end{cases} \quad (22)$$

于是, 式(18)能够转化为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}^C} f(\mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) &= P_3^C X_1^C + 7P_2^C X_2^C - P_1^C X_1^C X_2^C + 100, \\ \text{s.t. } Pr(g_1(\mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) &= P_2^C P_3^C X_2^C + P_1^C X_1^C X_2^C \leq [750, 1050]) \geq 1.28, \\ Pr(g_2(\mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) &= P_1^C P_2^C (X_1^C - 15)^2 + P_3^C (X_2^C - 20)^2 \leq [650, 950]) \geq 1.29, \\ Pr(g_3(\mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) &= -(P_3^C X_1^C + 7P_2^C X_2^C - P_1^C X_1^C X_2^C + 100) \leq [130, 170]) \geq 9.18, \\ 0 \leq X_1^C \leq 21, \quad 0 \leq X_2^C \leq 21, \quad \mathbf{P}^C &= [2, 4, 6]. \end{aligned} \quad (23)$$

基于RPDI的定义, 式(23)能够转化为一个传统的优化模型:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}^C} f(\mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) &= P_3^C X_1^C + 7P_2^C X_2^C - P_1^C X_1^C X_2^C + 100, \\ \text{s.t. } g_1(\mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) &= P_2^C P_3^C X_2^C + P_1^C X_1^C X_2^C \leq 664.96, \\ g_2(\mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) &= P_1^C P_2^C (X_1^C - 15)^2 + P_3^C (X_2^C - 20)^2 \leq 562.80, \\ g_3(\mathbf{X}^C, \mathbf{P}^C) &= P_3^C X_1^C + 7P_2^C X_2^C - P_1^C X_1^C X_2^C + 100 \geq 205.50, \\ 0 \leq X_1^C \leq 21, \quad 0 \leq X_2^C \leq 21, \quad \mathbf{P}^C &= [2, 4, 6]. \end{aligned} \quad (24)$$

采用SQP方法来求解式(24), 能够得到最优解

$\mathbf{X}^{C*}=[18.24, 9.89]$, 并且设 $\mathbf{X}^{C(2)}=\mathbf{X}^{C*}$. 通过收敛标准判断其未达到收敛, 所以将会在设计点 $\mathbf{X}^{C(2)}$ 上开始一个新的迭代. 表1给出了本文方法的计算结果, 由表可知在第9次迭代后设计点实现收敛并且获得了最优解 $\mathbf{X}^{C*}=[18.24, 9.89]$, 相应的目标函数值为 $f=227.62$. 并且从第一步和第九步比较可知, 相比于确定性优化模型得到的解, 鲁棒性解中两个设计变量的值均减小, 并且鲁棒性因子的可能度从0.88上升到0.96. 另外, 由于鲁棒性因子约束预设的RPDI水平较小, 对鲁棒性的限制程度较低, 导致鲁棒性因子约束是一个不起作用约束. 如表2所示, 将本文得到的计算结果与双层嵌套

表1 3种预设可能度要求的情况下本文方法的收敛过程

λ_{p3}	迭代步	X_1^C	X_2^C	f	λ_3
0.9	1	19.22	10.65	214.88	0.88
	2	18.56	10.23	224.18	0.93
	3	18.33	10.03	226.91	0.95
	4	18.26	9.94	227.51	0.95
	5	18.24	9.91	227.62	0.96
	6	18.24	9.90	227.63	0.96
	7	18.24	9.89	227.63	0.96
	8	18.24	9.89	227.62	0.96
	9	18.24	9.89	227.62	0.96
1.0	1	19.22	10.65	214.88	0.88
	2	18.56	10.23	224.18	0.93
	3	18.32	10.02	227.02	0.95
	4	18.16	9.91	229.02	0.96
	5	18.00	9.77	230.53	0.97
	6	17.90	9.66	231.45	0.99
	7	17.82	9.53	231.87	1.00
	8	17.82	9.53	231.87	1.00
	9	17.82	9.53	231.87	1.00
1.1	1	19.22	10.65	214.88	0.88
	2	18.56	10.23	224.18	0.93
	3	17.97	9.76	231.02	1.01
	4	17.52	9.45	235.87	1.06
	5	17.08	9.04	239.29	1.08
	6	16.83	8.82	240.86	1.10
	7	16.74	8.70	241.02	1.10
	8	16.74	8.70	241.01	1.10
	9	16.74	8.70	241.01	1.10

表 2 本文方法与双层嵌套方法计算结果的效率和精度比较

λ_{p3}	方法	X_1^C	X_2^C	f	g_1^I	g_2^I	g_3^I	λ_1	λ_2	λ_3	N
0.9	双层嵌套	18.23	9.88	227.6	[454,749]	[431,650]	[0,136.7]	1.00	1.00	0.96	1065
	本文方法	18.24	9.88	227.6	[454,750]	[431,650]	[0,136.7]	1.00	1.00	0.96	27
1.0	双层嵌套	17.82	9.51	231.7	[431,712]	[438,643]	[0,129.79]	1.06	1.01	1.00	1065
	本文方法	17.82	9.53	231.8	[431,712]	[438,642]	[0,129.84]	1.06	1.01	1.00	27
1.1	双层嵌套	16.75	8.68	240.78	[379,627]	[463,642]	[0,115]	1.22	1.01	1.10	1230
	本文方法	16.74	8.70	241.02	[380,627]	[461,640]	[0,115]	1.22	1.02	1.10	27

方法得到计算解进行比较可知,一方面本文方法的计算结果非常接近参考解,具有较好的计算精度,另一方面,本文方法仅仅用了9次确定性优化以及27次区间分析,具有较高的计算效率。

之后,将鲁棒性因子约束的预设RPDI水平提升到 $\lambda_{p3}=1.0$,此时对于不确定约束的处理等效于“最坏情况方法”。迭代历史如表1所示,可知本文方法只需要9次的迭代就能获得最优解 $\mathbf{X}^C=[17.82,9.53]$,此时目标函数值 $f=231.87$,相比于上一情况有所提高,因为随着预设鲁棒性约束RPDI水平的提高,约束的严格程度也会相应地提高,从而设计域会相应地缩小。并且从表1中可知,在该可能度要求下,相比于确定性优化模型得到的计算解,鲁棒性因子的可能度从0.88上升到1.00。如表2所示,本文方法的计算结果非常接近参考解,这说明本文方法具有较好的精度和效率。再次,将预设鲁棒性因子约束的RPDI水平提升到 $\lambda_{p3}=1.1$,如表1所示,与上两种情况相同也是通过9次迭代收敛到最优解 $\mathbf{X}^C=[16.74,8.70]$,相应的目标函数值 $f=241.01$,因为随着鲁棒性因子约束的预设RPDI水平进一步提高,设计域进一步缩小,从而目标函数值会进一步增加。并且从表1中可知,与确定性优化模型得到的计算结果相比,鲁棒性因子的可能度从0.88上升到1.10。另外,该情况下只有鲁棒性约束是起作用约束,其余约束都是不起作用约束。如表2所示,此时本文方法在计算精度和效率上依然具有较好的表现。

3种预设RPDI水平下本文方法的收敛曲线如图3所示。可以看到迭代在3种情况下都在第9步实现收敛,说明本文方法具有较稳定的收敛性质。如图4所示,不同的预设鲁棒性因子RPDI水平下获得了不同的目标函数值。随着鲁棒性因子约束预设RPDI水平的增加,

图 3 (网络版彩图)3种RPDI水平下的收敛曲线

目标函数的值和最大变动量分别呈现上升和下降的趋势。这是因为较大的预设RPDI水平意味着较小的设计域和较严格的鲁棒性要求,进而造成目标函数值增大以及变动量减小。同时目标函数值和目标函数值变动量相反的趋势也符合在鲁棒性优化问题中被研究者广泛认可的观点:“优化与鲁棒性相悖”^[45]。

4.2 算例2

如图5所示,研究一个悬臂梁结构^[46]。该悬臂梁的长度为 $L=1$ m,横截面的宽度和厚度 b^C 和 h^C 是需要设计的变量,该不确定设计变量的扰动量为 $b^W = h^W = 0.05$ 。该悬臂梁受到的水平载荷和竖直载荷分别为 $P_x \in P_x^I=[49500 \text{ N}, 50500 \text{ N}]$ 和 $P_y \in P_y^I=[24750 \text{ N}, 25250 \text{ N}]$ 。根据材料力学的基础知识,悬臂梁固定端的最大应力为

$$\sigma(b, h) = \frac{6P_x L}{b^2 h} + \frac{6P_y L}{b h^2}. \quad (25)$$

该优化设计的目的是满足应力和体积变动量的要

图4 (网络版彩图)目标函数与预设RPDI水平的关系。(a) 目标函数中点值; (b) 目标函数变动量

图5 悬臂梁

求下最小化悬臂梁的体积, 其中准许应力为 $\sigma_s^I=[250 \text{ MPa}, 275 \text{ MPa}]$; 准许体积变动量为 $\Delta V^I=[13, 15]$. 基于上述描述, 悬臂梁的区间鲁棒性优化模型构建如下:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{X}^C} f(\mathbf{X}^C) &= b^C h^C L, \\
 \text{s.t. } Pr\left(g_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \frac{6P_x L}{b^2 h} + \frac{6P_y L}{b h^2} \leq \sigma_s^I\right) &\geq \lambda_{p1}, \\
 Pr(g_2(\mathbf{X}) = |bh - b^C h^C| \leq \Delta V^I) &\geq \lambda_{p2}, \\
 \mathbf{X}^C = [b^C, h^C], \mathbf{P} = [P_x, P_y], \lambda_{p1} = \lambda_{p2} &= 1, \\
 b \in b^I = [b^C - b^W, b^C + b^W], \\
 h \in h^I = [h^C - h^W, h^C + h^W], \\
 5 \text{ cm} \leq b^C \leq 20 \text{ cm}, 5 \text{ cm} \leq h^C &\leq 20 \text{ cm}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

选择相应确定性优化问题的解为初始设计

表3 悬臂梁问题的迭代过程

迭代步	b^C (cm)	h^C (cm)	λ_1, λ_2	λ_1^C, λ_2^C	$\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2$
1	17.24	8.62	0.83, 1.05	1.32, 41.67	0.49, 40.62
2	17.60	8.81	0.98, 1.03	1.61, 43.28	0.63, 42.25
3	17.65	8.83	1.00, 1.03	1.64, 43.45	0.64, 42.42
4	17.67	8.82	1.00, 1.03	1.64, 43.46	0.64, 42.43

点 $(b^{C(1)}, h^{C(1)}) = (17.24 \text{ cm}, 8.62 \text{ cm})$. 如表3和图6所示, 两个约束的可能度水平下降量随着迭代进行变得越来越稳定, 并在第4个迭代步收敛到最优解 $(b^{C*}, h^{C*}) = (17.65 \text{ cm}, 8.83 \text{ cm})$. 并且相比于确定性优化模型的解, 鲁棒性优化的解中横截面的厚度和宽度都有所增加. 在最优点下, 悬臂梁的体积为 155000 cm^3 , 最大的变动量为 130 cm^3 , 悬臂梁最大应力区间为 $[191.58 \text{ MPa}, 250.0 \text{ MPa}]$, 其约束RPDI水平分别为1.0和1.03, 都满足和大于可能度1.0的要求. 如表4所示, 本文方法的计算结果与参考解非常接近, 证明本文方法具有良好的精度和效率.

4.3 算例3

如图7所示, 考虑一个经典的机械设计问题, 即减速器设计问题^[47]. 该设计问题包含7个设计变量, 分别为齿轮表面宽度 X_1 , 齿轮模数 X_2 , 齿数 X_3 , 第一根轴的轴承间距 X_4 , 第二根轴的轴承间距 X_5 , 第一根轴的直径 X_6 和第二根轴的直径 X_7 . 设计的目标为最小化减速器的重量. 约束包含了弯曲应力、纵向位移、轴向位移和集合尺寸约束等减速器的机械特征. 减速器问题的区间鲁棒性优化模型能够构建为

图 6 (网络版彩图)悬臂梁问题的收敛过程. (a) 约束应力; (b) 鲁棒性因子约束

表 4 悬臂梁问题的精度和效率的比较

方法	b^C (cm)	h^C (cm)	f (cm ³)	g_1^I (MPa)	g_2^I	λ_1	λ_2	N
双层嵌套	17.68	8.81	15576	[191.58,250.00]	[0,13]	1.00	1.03	776
本文方法	17.67	8.82	15585	[191.58,250.00]	[0,13]	1.00	1.03	8

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{X}^C} f(\mathbf{X}^C) &= 0.7854X_1^C(X_2^C)^2(3.3333(X_3^C)^2 + 14.9334X_3^C - 43.0934) \\
 &\quad - 1.508X_1^C((X_6^C)^2 + (X_7^C)^2) + 7.477((X_6^C)^3 + (X_7^C)^3) + 0.7854(X_4^C(X_6^C)^2 + X_5^C(X_7^C)^2), \\
 s.t. \quad Pr(g_j(\mathbf{X}) \leq b_j) &\geq \lambda_{pj}, j = 1, 2, \dots, 11, \\
 g_1(\mathbf{X}) &= -\frac{27}{X_1X_2^2X_3}, g_2(\mathbf{X}) = -\frac{397.5}{X_2^2X_3^2X_1}, g_3(\mathbf{X}) = -\frac{1.93X_4^3}{X_2X_3X_6^4}, \\
 g_4(\mathbf{X}) &= -\frac{1.93X_5^3}{X_2X_3X_7^4}, g_5(\mathbf{X}) = -\frac{X_2X_3}{40}, g_6(\mathbf{X}) = -\frac{X_1}{12X_2}, g_7(\mathbf{X}) = \frac{X_1}{5X_2}, \\
 g_8(\mathbf{X}) &= -\frac{1.5X_6 + 1.9}{X_4}, g_9(\mathbf{X}) = -\frac{1.1X_7 + 1.9}{X_5}, g_{10}(\mathbf{X}) = -\frac{\sqrt{[745X_4/(X_2X_3)]^2 + 16.9 \times 10^6}}{180X_6^3}, \\
 g_{11}(\mathbf{X}) &= -\frac{\sqrt{[745X_5/(X_2X_3)]^2 + 157.5 \times 10^6}}{110X_7^3}, g_{12}(\mathbf{X}) = |f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}^C)| \leq \Delta f^I, \\
 2.6 \text{ mm} &\leq X_1^C \leq 3.6 \text{ mm}, 0.7 \text{ mm} \leq X_2^C \leq 0.8 \text{ mm}, 17 \leq X_3^C \leq 18, 7.3 \text{ mm} \leq X_4^C \leq 8.3 \text{ mm}, \\
 7.3 \text{ mm} &\leq X_5^C \leq 8.3 \text{ mm}, 2.9 \text{ mm} \leq X_6^C \leq 3.9 \text{ mm}, 5.0 \text{ mm} \leq X_7^C \leq 5.5 \text{ mm}, \\
 b_j &= [-1, 1], j = 1, 2, \dots, 11, \mathbf{X} \in \mathbf{X}^I = [\mathbf{X}^C - \mathbf{X}^W, \mathbf{X}^C + \mathbf{X}^W], \mathbf{X}^W = [0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.1, 0.01].
 \end{aligned} \tag{27}$$

不确定设计变量的扰动量为 $\mathbf{X}^W=[0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.1, 0.01]$, 以及减速器质量可接受的变动设为 $\Delta f^I=[10, 100]$. 将预设约束RPDI水平都设置为1, 初始点设置为 $\mathbf{X}^{C(1)}=[3.58, 0.71, 18.00, 8.00, 8.00, 3.50, 5.30]$, 在该点的鲁棒性因子的可能度为0.87, 可知在该设计点下, 未达到目标鲁棒性要求. 本文方法经过5次

迭代求得最优的设计点如表5所示. 在最优设计点下, 减速器的质量为 $f=2749.8$ kg, 减速器质量在不确定影响下最大的变动量为80 kg, 并且所有的约束都满足预设RPDI水平的要求, 其中, g_7 和 g_{12} 是起作用约束, 其余的约束为不起作用约束, 如表6所示. 分析结果表明, 本文方法在处理减速器设计问题时具有较好的精度和效

图7 (网络版彩图)减速器

率. 另外, 在最优解处鲁棒性因子的可能度为1.00, 与初始点相比提高了0.13, 实现了鲁棒性设计.

5 行车平板工程算例

行车平板^[48]具有多种行车辅助功能, 如泊车辅助、通讯、影音娱乐等, 能够大大提升使用者的驾驶体验, 目前已广泛应用于各类汽车的电子系统中. 汽车平板在工作过程中会遇到如极限温度场和复杂电磁场的问题, 与此同时, 车内的设计空间有限, 行车平板尺寸和外形的要求非常严格.

汽车平板结构设计问题如图8和9所示. 该平板包括前壳体、显示屏、驱动器、内支架、后壳体、触摸屏、减震垫、电源板和主板等9个重要部件. 在设计的过程中, 我们期望在高温、振动等环境下汽车平板依然能够稳定、可靠地工作. 在环境温度载荷、组件受热不均以及材料参数特性差异等因素的影响下, 汽车平板内部会产生热应力. 同时在汽车行驶过程中不同频率的振动激励下, 汽车平板内部会产生相应的应力应变响应. 在此, 我们希望通过对行车平板的一些关键尺寸进行设计, 实现满足在极限状态可靠性要求的前提下最小化行车平板的质量.

在该问题中, 设计变量为厚度, 分别为前侧壁厚度 X_1 , 上下壁厚度 X_2 , 后壳厚度 X_3 以及内支撑厚度 X_4 , 并且不确定设计变量的扰动量为 $\mathbf{X}^W=[0.1, 0.1, 0.1, 0.1]$. 驱动板电源消耗和壳体弹性模量是不确定性参数 $P_1 \in P_1^I=[5.5 \text{ W}, 6.5 \text{ W}]$ 和 $P_2 \in P_2^I=[43000 \text{ MPa}, 47000 \text{ MPa}]$. 相应的显示屏的屈服强度和CPU的准许温度分别设置为 $b_1^I=[55 \text{ MPa}, 59 \text{ MPa}]$ 和 $b_2^I=[21.4^\circ\text{C}, 22.4^\circ\text{C}]$ 以及质量的最大变动量不大于区间 $\Delta f^I=[0.085 \text{ kg}, 0.100 \text{ kg}]$. 基于我们最近的工作^[48], 构建如图10所示的高温工况和振动工况的有限元模型, 该模型包括285708个8节点6面体. 为了提高计算效率, 通过对有限元模型进行65次采样, 构建二次响应面, 进而构建行车平板问题的区间鲁棒性优化模型为

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{X}^C} f(\mathbf{X}^C) &= 0.01824(X_1^C)^2 - 0.03440(X_2^C)^2 + 0.4267X_2^C + 0.1194(X_3^C)^2 \\
 &\quad + 0.08591(X_4^C)^2 - 0.2272X_4^C, \\
 s.t. \quad Pr(g_j(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \leq 0) &\geq \lambda_j, j = 1, 2, \\
 g_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= 0.2222P_1^2 - 2.633P_1 + 0.19X_1 + 0.1325X_2 + 4.17X_3^2 \\
 &\quad - 33.81X_3 + 0.1939X_4^2 - 2.522X_4 + 115.59 \leq [55, 59], \\
 g_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= -7.176 \times 10^{-9} \times P_2^2 + 5.406 \times 10^{-4} \times P_2 - 6.890 \times 10^{-2} \times X_1^2 + 0.8018X_1 \\
 &\quad - 0.0639X_2^2 + 0.6718X_2 - 1.424X_3^2 + 5.481X_3 - 1.981X_4^2 + 7.532X_4 - 4.77 \leq [21.4, 22.4], \\
 g_3(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= |f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}^C)| \leq [0.085, 0.100], \\
 \mathbf{X} \in \mathbf{X}^I &= [\mathbf{X}^C - \mathbf{X}^W, \mathbf{X}^C + \mathbf{X}^W], P_1 \in P_1^I = [5.5 \text{ W}, 6.5 \text{ W}], P_2 \in P_2^I = [43000 \text{ MPa}, 47000 \text{ MPa}], \\
 4 \text{ mm} \leq X_1^C &\leq 8 \text{ mm}, 4 \text{ mm} \leq X_2^C \leq 8 \text{ mm}, 1 \leq X_3^C \leq 4, 0.6 \text{ mm} \leq X_4^C \leq 2.5 \text{ mm}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

通过误差分析, 可以证明上述模型的目标函数和约束具有良好的精度^[42], 因此, 采用上述区间鲁棒性

优化模型对设计变量进行寻优. 根据实际工程经验, 设置设计初始点设为 $\mathbf{X}^{C(1)}=[6.00 \text{ mm}, 6.00 \text{ mm}, 2.00$

表 5 本文方法的计算结果

设计变量	最优值	设计变量	最优值
X_1^C (mm)	3.56	X_5^C (mm)	7.49
X_2^C (mm)	0.70	X_6^C (mm)	3.01
X_3^C (mm)	17.00	X_7^C (mm)	5.00
X_4^C (mm)	7.34		

表 6 在最优点处减速器问题各个约束的RPDI水平

约束	可能度	约束	可能度
λ_1	1.53	λ_7	1.00
λ_2	2.43	λ_8	2.28
λ_3	1.06	λ_9	1.07
λ_4	83.00	λ_{10}	1.02
λ_5	40.00	λ_{11}	5.09
λ_6	20.00	λ_{12}	1.00

mm, 2.00 mm]. 约束的预设RPDI水平为 $\lambda_{p1}=\lambda_{p2}=\lambda_{p3}=1$. 通过本文方法能够求解得到最优点 $\mathbf{X}^{C*}=[4.00 \text{ mm}, 4.00 \text{ mm}, 2.11 \text{ mm}, 1.53 \text{ mm}]$. 在最优点处, 汽车平板

的质量为1.83 kg, 质量在不确定性影响下最大的变动量为0.085 kg, 显示屏的应力为[51.18 MPa, 54.95 MPa], CPU的温度为[20.38°C, 21.29°C], 三约束的

图 8 (网络版彩图)8寸智能行车平板. (a) 外形图; (b) 爆炸图

图 9 (网络版彩图)行车平板结构模型. (a) 前视图; (b) 剖视图

图 10 (网络版彩图)行车平板的有限元仿真模型. (a) 高温工况仿真模型; (b) 振动工况仿真模型

表 7 行车平板问题的计算结果

方法	$X_1^C(\text{mm})$	$X_2^C(\text{mm})$	$X_3^C(\text{mm})$	$X_4^C(\text{mm})$
双层嵌套	4.00	4.00	2.11	1.53
本文方法	4.00	4.00	2.11	1.53

表 8 行车平板问题精度和效率的比较

方法	$f(\text{kg})$	$g_1^I(\text{MPa})$	$g_2^I(^{\circ}\text{C})$	g_3^I	λ_1	λ_2	λ_2	N
双层嵌套	1.83	[51.22,54.93]	[20.34,21.26]	[0,0.085]	1.00	1.07	1.00	5940
本文方法	1.83	[51.18,54.95]	[20.38,21.29]	[0,0.085]	1.00	1.07	1.00	15

RPDI水平分别为1.00, 1.07和1.00, 都满足预设RPDI水平1.00的要求. 并且鲁棒性因子约束的可靠性由初始点的0.19上升到1.00, 说明本文方法的计算求解相比于确定性优化方法能够较大幅度上提高目标的鲁棒性. 如表7所示, 将本文方法得到的结果与双层嵌套优化方法得到的结果进行比较可知, 本文方法具有较好的计算精度. 如表8所示, 在求解效率上本文方法只需要5次确定性优化和15次区间分析就能获得最优解, 而双层嵌套优化方法需要1980次区间优化和5940次区间分析. 可见本文方法在处理实际工程问题中具有较好的精度和效率.

6 结论

本文提出一种区间鲁棒性优化方法, 求解带有不

确定参数的非线性结构鲁棒性优化问题. 通过引入区间可能度(RPDI)方法代替“最坏情况方法”处理不确定约束, 将不确定约束转化为确定性约束. RPDI方法使得决策者能够拥有更大的决策空间, 并且可以根据实际的问题和经验更灵活地控制整个优化过程. 然后, 提出一种高效的解耦方法, 将双层嵌套问题解耦为一系列区间分析和确定性优化的问题, 减少了区间分析的次数, 提高了区间鲁棒性优化问题的求解效率. 另外, 本文方法未限定特定的区间分析方法和确定性优化的求解方法, 读者能够根据实际情况自主选择合适的区间分析方法和确定性优化方法求解相应的问题. 3个数值算例和1个工程算例的计算结果表明, 本文方法在效率和精度上具有较好的表现. 在未来的工作中, 我们将会基于本文方法, 提出一些高效求解不确定性多目标优化问题或者混合不确定优化问题的方法.

参考文献

- 1 Enevoldsen I, Sørensen J D. Reliability-based optimization in structural engineering. *Struct Saf*, 1994, 15: 169–196
- 2 Kuschel N, Rackwitz R. Two basic problems in reliability-based structural optimization. *Math Method Oper Res*, 1997, 46: 309–333
- 3 Kirjner-Neto C, Polak E, Kiureghian A D. An outer approximations approach to reliability-based optimal design of structures. *J Optim Theory Appl*, 1998, 98: 1–16
- 4 Tu J, Choi K K, Park Y H. A new study on reliability-based design optimization. *J Mech Des*, 1999, 121: 557–564
- 5 Du X, Chen W. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design. *J Mech Des*, 2004, 126: 225–233
- 6 Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust optimization-methodology and applications. *Math Program*, 2002, 92: 453–480
- 7 Bertsimas D, Pachamanova D, Sim M. Robust linear optimization under general norms. *Oper Res Lett*, 2004, 32: 510–516
- 8 Mourelatos Z P, Liang J. A methodology for trading-off performance and robustness under uncertainty. *J Mech Des*, 2005, 128: 856–863
- 9 Renaud J E. Automatic differentiation in robust optimization. *AIAA J*, 1997, 35: 1072–1079
- 10 Taguchi G. Performance analysis design. *Int J Prod Res*, 1978, 16: 521–530
- 11 Sandgren E, Cameron T M. Robust design optimization of structures through consideration of variation. *Comput Struct*, 2002, 80: 1605–1613

- 12 Harzheim L, Warnecke U. Robustness optimization of the position of an anti-roll bar link to avoid the toggling of a rear axle stabilizer. *Struct Multidisc Optim*, 2010, 42: 315–323
- 13 Liang J, Mourelatos Z P, Tu J. A single-loop method for reliability-based design optimisation. *IJPD*, 2008, 5: 76–92
- 14 Mulvey J M, Vanderbei R J, Zenios S A. Robust optimization of large-scale systems. *Oper Res*, 1995, 43: 264–281
- 15 El Ghaoui L, Lebret H. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 1997, 18: 1035–1064
- 16 Ben-Tal A, Nemirovski A, Roos C. Robust solutions of uncertain quadratic and conic-quadratic problems. *SIAM J Optim*, 2002, 13: 535–560
- 17 Bertsimas D, Sim M. Robust discrete optimization and network flows. *Math Program*, 2003, 98: 49–71
- 18 Xu H, Caramanis C, Mannor S. A distributional interpretation of robust optimization. *Math OR*, 2012, 37: 95–110
- 19 Chen X, Fan J, Bian X. Structural robust optimization design based on convex model. *Results Phys*, 2017, 7: 3068–3077
- 20 Chassein A, Goerigk M. Variable-sized uncertainty and inverse problems in robust optimization. *Eur J Oper Res*, 2018, 264: 17–28
- 21 Beyer H G, Sendhoff B. Robust optimization – A comprehensive survey. *Comput Method Appl Mech Eng*, 2007, 196: 3190–3218
- 22 Moore R E. Interval Analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1966
- 23 Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust solutions of uncertain linear programs. *Oper Res Lett*, 1999, 25: 1–13
- 24 Sun W, Dong R, Xu H. A novel non-probabilistic approach using interval analysis for robust design optimization. *J Mech Sci Technol*, 2009, 23: 3199–3208
- 25 Gunawan S, Azarm S. Non-gradient based parameter sensitivity estimation for single objective robust design optimization. *J Mech Des*, 2003, 126: 395–402
- 26 Gunawan S, Azarm S. A feasibility robust optimization method using sensitivity region concept. *J Mech Des*, 2004, 127: 858–865
- 27 Gunawan S, Azarm S. Multi-objective robust optimization using a sensitivity region concept. *Struct Multidisc Optim*, 2005, 29: 50–60
- 28 Yonekura K, Kanno Y. Global optimization of robust truss topology via mixed integer semidefinite programming. *Optim Eng*, 2010, 11: 355–379
- 29 Siddiqui S, Azarm S, Gabriel S. A modified benders decomposition method for efficient robust optimization under interval uncertainty. *Struct Multidisc Optim*, 2011, 44: 259–275
- 30 Zhou J, Cheng S, Li M. Sequential quadratic programming for robust optimization with interval uncertainty. *J Mech Des*, 2012, 134: 100913
- 31 Zhou J, Li M. Advanced robust optimization with interval uncertainty using a single-looped structure and sequential quadratic programming. *J Mech Des*, 2013, 136: 021008
- 32 Kang Z, Bai S. On robust design optimization of truss structures with bounded uncertainties. *Struct Multidisc Optim*, 2013, 47: 699–714
- 33 Chen J, Tang Y. Sequential algorithms for structural design optimization under tolerance conditions. *Eng Optimiz*, 2014, 46: 1183–1199
- 34 Jiang C, Xie H C, Zhang Z G, et al. A new interval optimization method considering tolerance design. *Eng Optimiz*, 2015, 47: 1637–1650
- 35 Wang S, Qing X. A mixed interval arithmetic/affine arithmetic approach for robust design optimization with interval uncertainty. *J Mech Des*, 2016, 138: 041403
- 36 Hu N, Duan B, Cao H, et al. Robust optimization with convex model considering bounded constraints on performance variation. *Struct Multidisc Optim*, 2017, 56: 59–69
- 37 Cheng J, Liu Z, Tang M, et al. Robust optimization of uncertain structures based on normalized violation degree of interval constraint. *Comput Struct*, 2017, 182: 41–54
- 38 Jiang C, Zhang Z G, Zhang Q F, et al. A new nonlinear interval programming method for uncertain problems with dependent interval variables. *Eur J Oper Res*, 2014, 238: 245–253
- 39 Jiang C, Han X, Li D. A new interval comparison relation and application in interval number programming for uncertain problems. *CMC-Comput Mater Con*, 2012, 27: 275–303
- 40 Qiu Z, Wang X. Parameter perturbation method for dynamic responses of structures with uncertain-but-bounded parameters based on interval analysis. *Int J Solids Struct*, 2005, 42: 4958–4970
- 41 Chen S H, Ma L, Meng G W, et al. An efficient method for evaluating the natural frequencies of structures with uncertain-but-bounded parameters. *Comput Struct*, 2009, 87: 582–590
- 42 Qiu Z, Elishakoff I. Antioptimization of structures with large uncertain-but-non-random parameters via interval analysis. *Comput Method Appl Mech Eng*, 1998, 152: 361–372
- 43 Tang J C, Fu C M. A dimension-reduction interval analysis method for uncertain problems. *CMES-Comp Model Eng Sci*, 2017, 113: 239–259
- 44 Gill P E, Murray W, Saunders M A. Snopt: An sqp algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM Rev*, 2005, 47: 99–131

- 45 Marczyk J. Stochastic multidisciplinary improvement-beyond optimization. In: 8th Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization. Long Beach: AIAA, 2000. 2000–4929
- 46 Du X. Saddle point approximation for sequential optimization and reliability analysis. *J Mech Design*, 2007, 130: 011011-11
- 47 Kurpati A, Azarm S, Wu J. Constraint handling improvements for multiobjective genetic algorithms. *Struct Multidisc Optim*, 2002, 23: 204–213
- 48 Huang Z L, Zhou Y S, Jiang C, et al. Reliability-based multidisciplinary design optimization using incremental shifting vector strategy and its application in electronic product design. *Acta Mech Sin*, 2018, 34: 285–302

An interval robust optimization method for uncertain structures

TANG JiaChang, JIANG Chao, LONG XiangYun, ZHANG Zhe & LIU HaiBo

State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China

An interval robust optimization method for uncertain structures is proposed in this paper. First, interval model is adopted to quantify the uncertainties in variables and parameters of objective function and constraints. Second, a robust index is introduced to represent the robustness of objective function and reliability-based possibility degree of interval (RPDI) is employed to deal with uncertain constraints, based on which the interval robust optimization model is established. Third, for the low efficiency problem of solving the interval robust optimization, an efficient optimization method is proposed to decouple the double-loop nested optimization problem into a series of interval analyses and deterministic optimizations that sequentially solved. At each iteration, an equivalent deterministic optimization problem is constructed according to the interval analysis results at current design point and then the design point is updated by solving the constructed optimization problem. Besides, an iterative mechanism is proposed to improve the convergence rate of the whole optimization process. Finally, three numerical examples and an engineering application are utilized to demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed method.

robust optimization, uncertain structures, reliability-based possibility degree of interval (RPDI), efficient decoupling method

doi: [10.1360/SST-2019-0052](https://doi.org/10.1360/SST-2019-0052)