频域两尺度下非光滑Duffing系统的簇发振荡及其机理分析

张正娣^{1*}, 彭淼¹, 曲子芳¹, 毕勤胜²

1. 江苏大学理学院, 镇江 212013;

2. 江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013

*联系人, E-mail: dyzhang@ujs.edu.cn

收稿日期: 2018-02-27; 接受日期: 2018-05-04; 网络出版日期: 2018-10-08

国家自然科学基金(编号: 11472116, 11472115)、国家自然科学基金重点基金(编号: 11632008)和江苏省研究生科研与实践创新计划项目(编号: KYCX17_1784)资助

摘要 为揭示非光滑因素存在时动力系统的簇发行为, 本文以周期激励Duffing系统为例, 引入干摩擦, 同时选取周期激励频率与系统的固有频率之间存在量级差距, 构建了频域两尺度下非光滑动力系统. 将周期激励项视为慢变参数, 激励系统转化为广义自治系统, 考察了广义自治系统平衡点的稳定性以及分岔条件. 选取适当的参数值, 重点研究了三组参数条件下的簇发现象, 即双涡卷情形、三涡卷情形和四涡卷情形. 结合转换相图, 并考虑到非光滑因素的影响, 讨论了相应快子系统的分岔模式, 揭示了该类非光滑系统中不同簇发振荡的产生及其沉寂态与激发态之间相互转迁的分岔机理. 另外, 针对于该类非光滑系统中的多平衡态共存现象, 结合吸引子自身的演化行为对涡卷形成的影响, 进一步揭示了系统产生特殊振荡现象的原因.

关键词 非光滑, Duffing系统, 两尺度, 簇发振荡, 分岔机理

PACS: 05.45.Xt, 05.45.-a, 05.45.Pq

1 引言

不同尺度耦合系统存在的复杂振荡及其机理一直是当前国内外学者的研究热点^[1-3], 其动力学行为通常表现为较大振幅的振荡与近似简谐运动的微幅振荡之间的耦合. 当状态变量呈现为微幅振荡或几乎不变时, 称系统处于沉寂态(Quiescent State, QS); 而当平衡态失稳或者大幅振荡称为激发态(Spiking State, SP), 当系统的轨线在沉寂态和激发态之间来回变化时, 会呈

现出簇发振荡^[4,5], 也可称为混合模式振荡^[6]. 该簇发现象最初在神经元模型中被广泛地研究^[7,8], 后来在化学反应^[9,10]、生物^[11-13]、机械^[14]等系统中也往往存在着不同时间尺度的耦合. 然而, 通过传统的非线性理论对不同尺度之间的相互作用无法得到解决, 如沉寂态和激发态相互转换的产生机制还不能被清楚地揭示出来, 早期的相关工作大都局限在近似求解、数值仿真和实验分析^[15,16], 直到Rinzel^[17]引入了快慢动力学分析法. 基于该方法, 相关学者对两时间尺度下系统簇发行为

引用格式: 张正娣, 彭淼, 曲子芳, 等. 频域两尺度下非光滑Duffing系统的簇发振荡及其机理分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 114501
Zhang Z D, Peng M, Qu Z F, et al. Bursting oscillations and mechanism analysis in a non-smooth Duffing system with frequency domain of two time scales (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 114501, doi: 10.1360/SSPMA2018-00044

的产生机制开展了一系列工作. 例如, Izhikevich^[1]总结了余维一的各种簇发现象及其分岔机制. Zhang等人^[18]通过在 Lü系统中引入周期激励项, 研究了不同簇发行行为的产生机制以及不同簇发行行为之间的转迁过程.

近些年, 对于多时间尺度耦合的问题上已经取得了一定的成果, 但是大多数工作都是围绕光滑系统进行开展的. 而在实际工程系统中往往存在非光滑因素, 例如机械工程中涉及到的摩擦和开关^[19,20]; 生态经济动力学中的阈值策略^[21], 具有率依赖的捕食-被捕食系统中反捕食行为避难的影响^[22]等. 相关系统中这些因素的影响会导致更丰富的动力学行为, 未来的研究有必要展开进一步的探索.

Duffing振子作为非线性动力学中最具代表性和最重要的对象之一^[23], 尤其在工程实际中的很多非线性振动问题都可以借助该模型进行具体的讨论. 例如, Duffing系统在图像加密中的应用^[24], 在配电网故障的应用^[25]及放电信号的检测^[26]等. 本文重点关注非光滑因素在频域两时间尺度下系统的影响. 以修正的Duffing系统^[27]为基础, 通过引入周期激励项, 并考虑非光滑因素, 建立一个单自由度非自治模型, 其无量纲数学模型表达如下:

$$\begin{cases} dx/dt = y, \\ dy/dt = -\alpha_1 y - \alpha_2 x - \alpha_3 x^3 - \alpha_4 x^5 + \delta|y| + A\sin(\Omega t), \end{cases} \quad (1)$$

这里, 定义变量 $w = A\sin(\Omega t)$ 为系统的周期外激励项, 其中, A 和 Ω 为外激励的幅值和频率, α_1 为系统结构阻尼系数, δ 为干摩擦阻尼系数, 非线性恢复力为 $-\alpha_2 x - \alpha_3 x^3 - \alpha_4 x^5$. 为考察频域上的不同尺度效应, 取定激励频率 $\Omega \ll \omega$, 其中 ω 为固有频率, 此时系统(1)会存在着各种复杂的簇发振荡现象.

本文考虑快慢两时间尺度耦合下非光滑系统随参数变化的动力学演化过程. 通过相应的广义自治系统的平衡点稳定性以及分岔分析, 并运用快慢分析法, 结合转换相图, 进而揭示了3组参数下不同簇发振荡的产生机制.

2 分岔分析

对于非线性系统, 其固有频率会随着系统动力学行为发生变化^[28]. 例如, 当系统的轨线趋于稳定的焦

点时, 固有频率近似为共轭复数特征根的虚部, 当轨线趋于极限环时, 固有频率可以用周期振荡的频率来计算. 而对于非光滑系统, 固有频率则相对复杂, 如对于系统(1), 非光滑分界面 $\Sigma \equiv [(x, y)|y = 0]$, 将整个平面划分为两个区域区域, 即 $D_+ \equiv [(x, y)|y > 0]$ 和 $D_- \equiv [(x, y)|y < 0]$. 为计算其固有频率, 设定无外激励, 也即 $A = 0$, 此时平衡位于分界面 Σ 上, 表示为 $(X_E, 0)$, 其中 X_E 满足

$$\alpha_2 X_E + \alpha_3 X_E^3 + \alpha_4 X_E^5 = 0, \quad (2)$$

显然, 对于不同的参数, 可以存在着不同数目的平衡点, 如当参数 $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 1.0$, $\alpha_3 = -2.0$, $\delta = 0.2$, $\alpha_4 = 0.8$ 时, 系统存在5个不同的平衡点, 分别为:

$$\begin{aligned} E_0(x, y) &= (0.0, 0.0), \\ E_{1\pm}(x, y) &= (\pm 0.8313, 0.0), \\ E_{2\pm}(x, y) &= (\pm 1.345, 0.0). \end{aligned}$$

由于这些平衡点均位于分界面上, 因此, 平衡点在两区域 $D_{\pm}$ 中呈现出不同的特征值所对应的特征子空间结构, 见表1.

当轨迹在平衡点 $E_0(x, y) = (0.0, 0.0)$ 附近振荡时, 其固有频率为 $\omega_{N0} = 1.0$, 而当轨迹围绕 $E_{2\pm}(x, y) = (\pm 1.345, 0.0)$ 振荡时, 在 $D_{\pm}$ 内分别有不同的振荡频率 $\omega_{N+} = 1.7927$ 和 $\omega_{N-} = 1.7982$, 也即存在有两个不同的固有频率.

取定激励频率 $\Omega = 0.01$, 而其他参数为常规量, 显然系统激励频率与系统固有频率 ω 之间存在量级差距. 在任一固有周期 $T \in [\tau_0, \tau_0 + 2\pi/\omega]$ 内, 外激励项 w 在 $\pm A$ 之间变化, 且仅在 $W_A = A\sin(\Omega\tau_0)$ 和 $W_B = A\sin(\Omega\tau_0 + 2\pi\Omega/\omega)$ 之间变化, 而由于 $\Omega \ll \omega$, 因此 W_A 与 W_B 非常接近, 导致 w 的变化非常缓慢, 故而, 在任一外激励周期内 w 可被视为一慢变参数. 因此, 系统(1)亦可表达为

$$\begin{cases} dx/dt = y, \\ dy/dt = -\alpha_1 y - \alpha_2 x - \alpha_3 x^3 - \alpha_4 x^5 + \delta|y| + w, \end{cases} \quad (3)$$

相对于非自治系统(1)而言, 我们称这种含慢变参数的系统为广义自治系统, 而相对于慢变量 w 而言, 系统(3)则是一个快子系统. 显然地, 对原系统做这样的变换后, 不仅可以分析外激励对系统的影响, 而且也可以

表 1 不同平衡点所对应的特征值

Table 1 Eigenvalues of different equilibrium points

平衡点	D_+ 内 $y \rightarrow 0^+$ 时的特征值	D_- 内 $y \rightarrow 0^-$ 时的特征值
(0.0, 0.0)	$\lambda_{1,2} = -0.15 \pm 1.0i$	$\lambda_{1,2} = 0.05 \pm 1.0i$
(± 0.8313 , 0.0)	$\lambda_3 = 0.9719, \lambda_4 = -1.2719$	$\lambda_{3,4} = \pm 1.1629$
(± 1.3450 , 0.0)	$\lambda_{5,6} = -0.15 \pm 1.7927i$	$\lambda_{5,6} = 0.05 \pm 1.7982i$

使用快慢分析法来研究其动力学复杂行为及其形成机理.

系统的平衡点以 $E(x_0, y_0)$ 表示, 显然 y_0 始终为 0, 也即平衡点位于分界面 Σ 上, 其中 x_0 满足

$$-\alpha_2 x_0 - \alpha_3 x_0^3 - \alpha_4 x_0^5 + w = 0. \quad (4)$$

其相应的特征方程为

$$\lambda^2 + (\alpha_1 \mp \delta)\lambda + \alpha_2 + 3\alpha_3 x_0^2 + 5\alpha_4 x_0^4 = 0, \quad (5)$$

由Routh-Hurwitz准则可知, 当参数满足 $\alpha_1 \mp \delta > 0$ 且 $\alpha_2 + 3\alpha_3 x_0^2 + 5\alpha_4 x_0^4 > 0$ 时, 平衡点 $E(x_0, y_0)$ 是渐近稳定的.

假设函数

$$f(x) = -\alpha_2 x_0 - \alpha_3 x_0^3 - \alpha_4 x_0^5 + w,$$

其极值点位置可以由

$$\frac{df(x)}{dx} = -\alpha_2 - 3\alpha_3 x_0^2 - 5\alpha_4 x_0^4 = 0$$

得到, 也即

$$x_{C\pm}^2 = (-3\alpha_3 \pm \sqrt{9\alpha_3^2 - 20\alpha_2\alpha_4}) / (10\alpha_4),$$

从而可以确定在不同区域中 $y \rightarrow 0^+$ 时平衡点表现出来的轨迹特性. 如当 $\alpha_4 > 0$ 且

$$-3\alpha_3 - \sqrt{9\alpha_3^2 - 20\alpha_2\alpha_4} / (10\alpha_4) > 0$$

时, 函数 $f(x)$ 存在四个极值点, 表示为

$$X_{C1\pm} = \pm \sqrt{(-3\alpha_3 + \sqrt{9\alpha_3^2 - 20\alpha_2\alpha_4}) / (10\alpha_4)},$$

$$X_{C2\pm} = \pm \sqrt{(-3\alpha_3 - \sqrt{9\alpha_3^2 - 20\alpha_2\alpha_4}) / (10\alpha_4)},$$

其极值则分别对应为 $F_{C1\pm} = f(X_{C1\pm})$ 和 $F_{C2\pm} = f(X_{C2\pm})$.

显然, $X_{C1-} < X_{C2-} < X_{C2+} < X_{C1+}$. 从而可知, 当 $F_{C1-} < 0$, $F_{C2-} > 0$, $F_{C2+} < 0$, $F_{C1+} > 0$ 时, 存在 5 个平衡点 $(X_i, 0)$, ($i=1, 2, \dots, 5$), 满足

$$X_1 < X_{C1-} < X_2 < X_{C2-} < X_3 < X_{C2+} < X_4 < X_{C1+} < X_5,$$

在 $\alpha - \delta > 0$ 时, D_+ 区域内, 平衡点 $(X_1, 0)$, $(X_3, 0)$ 和 $(X_5, 0)$ 表现为稳定的焦点或结点, 而 $(X_2, 0)$ 和 $(X_4, 0)$ 表现为不稳定鞍点.

当这些极值点所对应的极值为零值时, 则会导致两不同平衡点的相遇, 产生分岔行为. 由于所有平衡点均位于分界面 Σ 上, 也即为边界平衡点(Boundary Equilibrium Points), 其分岔特性可以用Filippov理论来分析, 引入辅助参数 q , 其平衡点的广义特征方程可以统一表示为

$$\lambda^2 + [q(\alpha_1 + \delta) + (1-q)(\alpha_1 - \delta)]\lambda + \alpha_2 + 3\alpha_3 x_0^2 + 5\alpha_4 x_0^4 = 0,$$

其中 $q \in [0, 1]$, 从而可得两非光滑分岔条件

$$FB : \alpha_2 + 3\alpha_3 x_0^2 + 5\alpha_4 x_0^4 = 0. \quad (6)$$

此时系统可能出现非光滑fold分岔, 导致系统在不同平衡点之间产生跳跃现象. 而当

$$HB : \begin{cases} \alpha_2 + 3\alpha_3 x_0^2 + 5\alpha_4 x_0^4 > 0, \\ \alpha_1 + (2q-1)\delta = 0, \end{cases} \quad (7)$$

则可能会产生非光滑Hopf分岔, 导致周期振荡.

由 $\alpha_1 + (2q-1)\delta = 0$ 条件可进一步确定参数范围为

$$0 < (\delta - \alpha_1) / \delta < 2.$$

为进一步揭示系统复杂行为及其演化过程, 在此选取 3 种典型情况来解释系统的振荡现象及其产生机理.

3 簇发振荡及其机理分析

由于快子系统不仅决定系统的沉寂态和激发态的形式, 同时也决定着它们之间的转化形式, 因此本节我们将 α_4 作为控制参数, 探究 α_4 取不同数值时系统(1)的

动力学行为的演化规律.

下面将通过分岔参数不同取值下3种具有代表性的情形来具体分析系统的动力学行为演化过程.

情形一: 两涡卷周期簇发振荡

当 $A = 0.5$, $\alpha_4 = 0.8$ 时, 可以观察到系统(1)中出现双涡卷周期簇发振荡现象, 如图1和2所示.

其中图1给出了系统在 (x, y) 平面上的相图, 从图1(a)的四个象限中可观察到系统轨线围绕两个焦点 E_+ 和 E_- 振荡, 而其中围绕 E_+ 的振荡与围绕 E_- 的振荡, 虽然都关于横轴对称, 但是振幅却明显不同. 再者, 在外激励的调节下, 轨线在 E_+ 和 E_- 之间的运动也存在着跳跃现象, 如图中的两个箭头所示. 除此之外, 轨线在围绕单一焦点运动时, 还存在着较为特殊的情况, 如图1(b)所示, 在 E_+ 附近轨线的疏密程度存在明显差异. 当然, 与此相应的现象也可以通过时间历程图得到进一步地证实.

图2给出了系统关于状态变量 x 的时间历程图, 从图2中可以看出, 系统轨线在一个完整的振荡周期内, 存在着明显的簇发行为(见右侧的放大部分). 进一步观察两个激发态 SP_+ 和 SP_- 的放大部分, 则可以发现振幅是逐渐衰减的, 由此可以初步认定 SP_+ 和 SP_- 是轨线在围绕两个焦点振荡时所形成的, 而在此二者之间的连接状态则为几乎没有振荡的沉寂态 QS_+ 和 QS_- , 并且同样存在着明显的跳跃现象, 这与相图中的所描述的现象是完全吻合的.

总之, 通过以上分析, 我们可以将该周期簇发振荡分成4个部分, 即两个激发态 SP_+ 和 SP_- , 以及连接激发

图1 (网络版彩图) $\alpha_4=0.8$, (a) (x, y) 平面上的相图; (b) 局部放大图

Figure 1 (Color online) (a) Phase portraits on (x, y) plane; (b) locally enlargement for $\alpha_4=0.8$.

态 SP_+ 和 SP_- 的沉寂态 QS_+ 与连接激发态 SP_- 和 SP_+ 的沉寂态 QS_- .

进一步地观察可以发现, 两个激发态中的振荡, 不仅振幅存在持续衰减的现象, 而且振荡周期也存在着明显的衰减现象, 如图3所示.

由式(4)可以得到广义自治系统在 (w, x) 平面上的

图2 (网络版彩图) $\alpha_4=0.8$, 系统的时间历程图

Figure 2 (Color online) Time history of the system for $\alpha_4=0.8$.

图 3 (网络版彩图) $\alpha_4=0.8$, 系统的时间历程局部放大图. (a) 第1个; (b) 第5个; (c) 第9个

Figure 3 Locally enlarged parts of the time history for $\alpha_4=0.8$. (a) The first one; (b) the fifth one; (c) the ninth one.

平衡点曲线, 如图4所示. 该曲线被4个fold分岔点划分为五个部分, 而每部分的稳定性则可由式(6)确定, 具体情况如表2所示. 由此可基本确定在各平衡态附近的轨线性态, 进而方便我们在下面讨论簇发振荡的产生机理.

如图5所示, 不失一般性, 本节我们以状态变量 x 为例来讨论系统簇发振荡产生的原因. 假定轨线的初始位置位于 $P(w = -0.2)$ 点, 而此时在理论上状态变量 $y \rightarrow 0^-$, 由表2可知相应的 EB_{-2} 为稳定的焦点, 因此, 即使状态变量 x 的初始位置不在 EB_{-2} 上, 但随着系统(3)的演化, 也将趋于 EB_{-2} 上, 并几乎沿着 EB_{-2} 向右运动进而形成沉寂态 QS_{-1} .

图 4 (网络版彩图) $\alpha_4=0.8$, 快子系统在 (w, x) 平面上的平衡点分布及fold分岔点

Figure 4 (Color online) Distribution of equilibrium points and fold bifurcation points of fast subsystem on (w, x) for $\alpha_4=0.8$.

表 2 平衡点分支的稳定性

Table 2 Stability of equilibrium branches

	EB_0	$EB_{\pm 1}$	$EB_{\pm 2}$
$y > 0$	不稳定焦点	鞍点	不稳定焦点
$y < 0$	稳定焦点	鞍点	稳定焦点

图 5 (网络版彩图) $\alpha_4=0.8$, 转换相图与图4叠加, 其中绿色实线表示关于 x 的转换相图, 而黄色实线则表示关于 y 的转换相图

Figure 5 (Color online) Overlay of the the transformed phase portrait (TPP) with the curve in Figure 4 for $\alpha_4=0.8$. Green line represents the TPP about x , however yellow line represents the TPP about y .

当轨线到达fold分岔点 FB_{-2} 时, 由于相应位置的平衡点在碰撞后消失, 因而轨线在另一吸引子 EB_{+2} 的作用下, 产生了跳跃现象, 之后围绕 EB_{+2} 振荡, 并形成了振幅逐渐衰减的激发态 SP_{+} . 而该状态将一直持续到状态变量 $y \rightarrow 0^-$, 且轨线几乎沿着 EB_{-2} 向右运动进而形成沉寂态 QS_{+1} .

注意: 随着时间 t 的增加, 当慢变参数 $w = A\sin(\Omega t) = 0.5$ 到达极大值时, 轨线将会返回向左运动; 同样地, 当 $w = A\sin(\Omega t) = -0.5$ 而到达极小值时, 轨线则会折返向右运动.

由于fold分岔点 FB_{+2} 的存在, 因此当轨线到达此处时会再次产生跳跃现象之后围绕 EB_{-2} 振荡, 并形成了振幅逐渐衰减的激发态 SP_{-} . 最后, 当轨线再次趋于稳定并到达沉寂态 QS_{-1} 中的 P 点时, 完成了一个完整的周期簇发运动, 而由于在整个运动中, 激发态与沉寂态之间只有fold分岔相连接, 因此可称之为fold/fold型周期簇发振荡, 该情形下系统存在双涡卷.

现在为了讨论簇发现象中两个激发态 SP_{-} 和 SP_{+} 的差异及其形成原因, 我们将图5中的 SP_{+} 做局部放大, 如图6所示, 从图中可以发现, 在激发态中的一个振荡周期内存在着特殊行为.

首先, 当 $y < 0$ 时, 即蓝色虚线 L_1 和 L_3 所围区域内, 由表2可知, 广义自治系统(3)的平衡点是稳定焦点, 因此, 相对于 L_1 左边的区域而言, 状态变量 x 从 P_1 到 P_3 是向着平衡点运动的. 而当 $y > 0$ 时, 即蓝色虚线 L_3 和 L_5 所围区域内, 广义自治系统(3)的平衡点却是不稳定焦点, 因此, 状态变量 x 从 P_3 到 P_5 的运动则是背离平衡点的. 在此, 不同于光滑系统的是, 在一个环绕周期内轨线是由稳定和不稳定两部分所组成的.

其次, 当状态变量 y 到达横轴时, 可以发现此时状态变量 x 恰好取到极值 P_1, P_3 与 P_5 , 这是由广义自治系统(3)的具体表达形式所决定的, 即当状态变量 $y = 0$ 时, $\dot{x} = 0$, 进而状态变量 x 取得极值, 显然, 理论分析与如图6所示的数值结果是一致的.

再次, 当

$$\dot{y} = -\alpha_1 y - \alpha_2 x - \alpha_3 x^3 - \alpha_4 x^5 + \delta|y| + w = 0$$

时, 状态变量 y 到达极值点 P_1 和 P_5 . 进一步地, 由平衡点的定义式(4)可知, 此时 x 的数值是大于相应平衡点位置处的数值 x_0 . 换言之, 状态变量 x 与 EB_{+2} 的两个交点分别和点 P_2 与 P_4 并不在同一直线 L_2 或 L_4 上, 且在 $x_0 = 0$ 时有

$$\dot{y} = -\alpha_1 y + \delta|y| = -0.1y + 0.2|y| > 0,$$

这将导致两个状态变量的有界变化.

最后, 对单个完整激发态做一小结. 不失一般性,

图6 (网络版彩图)图5的局部放大图. 其中 P_1, P_3 与 P_5 分别是状态变量 x 的极值点, 而 P_2 与 P_4 分别是状态变量 y 的极值点
Figure 6 (Color online) Locally enlarged of Figure 5. Besides the P_1, P_3 and P_5 denote extreme points about state variable x , however P_2 and P_4 are extreme points about state variable y respectively.

当 $y < 0$ 且 $\dot{y} < 0$ 时, x 围绕稳定焦点振荡, 且振幅逐渐衰减, 而当 x 满足 $\dot{y} \geq 0$ 时, y 将逐渐增大, 直到 $y = 0$ 时, x 取得极小值; 之后, x 围绕不稳定焦点振荡, 且振幅逐渐增大, 而当 x 满足 $\dot{y} \leq 0$ 时, y 则逐渐减小, 直到完成一个周期运动为止. 进一步计算可得稳定焦点的特征根实部为 -0.15 , 而不稳定焦点的特征根实部为 0.05 , 由此也表明轨线的收敛速度大于发散速度, 导致 x 与 y 的极值将逐渐趋于各自的平衡态, 并最终形成簇发振荡所对应的沉寂态.

情形二: 三涡卷周期簇发振荡

随着参数 α_4 的增加, 当参数 $\alpha_4 = 1.0$ 时系统的行为会发生变化.

与图1相比, 图7所给出的相图更加复杂, 由于此时系统存在3个吸引子 E_0 和 $E_{\pm}$, 因此在导致其轨线围绕3个吸引子形成了3个激发态 SP_0 和 $SP_{\pm}$, 以及3个相应的沉寂态 ES_0 和 $ES_{\pm}$ 的运动过程中, 同样产生了跳跃现象. 此外, 以局部放大图图7(b)为例, 我们也可以发现3个激发态中轨线的疏密程度都存在着明显差异.

图8给出广义自治系统在 (w, x) 平面上的平衡点曲线, 与图4相同的是, 该曲线也被4个fold分岔点划分为5个部分, 且每部分的稳定性同样可由式(6)确定, 经计算表明其稳定性亦与表2所列相同.

然而, 与图4不同的是, 两者的分岔点的在 (w, x) 平面上的分布存在着巨大的差异, 如 FB_{+1} 与 FB_{-2} , 以及 FB_{-1} 与 FB_{+2} 之间的横向距离更大了, 这可能使得吸引子 E_0 的吸引盆比情形一中的更大, 因此, 在相图中

图 7 (网络版彩图) $\alpha_4=1.0$, (a) (x, y) 平面上的相图; (b) 局部放大图; (c) 时间历程图

Figure 7 (Color online) $\alpha_4=1.0$, (a) phase portraits on (x, y) plane; (b) locally enlargement; (c) time history.

会出现新的涡卷, 导致更为复杂的簇发振荡.

由此表明, 即使平衡态的稳定性相同, 但由分岔点的分布不同而导致其具体结构上的差异, 也可能引起系统的轨线产生完全不同的复杂行为. 下面我们来分析这类簇发振荡的产生机理.

如图 9 所示, 不失一般性, 仍以状态变量 x 振荡为例. 在此, 我们指出各激发态中的具体行为和情形一是类似的. 如已标出了各量的放大图图 9(b) 所示, 其中具体分析过程可仿照情形一进行, 为简单起见, 不再一一叙述, 仅给出讨论所需的结论, 即当 $y < 0$ 且 $\dot{y} < 0$ 时, x 围绕稳定焦点振荡, 而当 x 满足 $\dot{y} \geq 0$ 时, y 将逐渐增大到 $y = 0$, 之后平衡点失稳, x 则围绕不稳定焦点振荡,

图 8 (网络版彩图) $\alpha_4=1.0$, 系统的平衡点曲线
Figure 8 (Color online) Equilibrium curves for $\alpha_4=1.0$.

图 9 (网络版彩图) $\alpha_4=1.0$, (a) 转换相图与图 8 叠加. 其中绿色实线表示关于 x 的转换相图, 而黄色实线则表示关于 y 的转换相图. (b) 局部放大图

Figure 9 (Color online) $\alpha_4=1.0$, (a) Overlay of the the transformed phase portrait (TPP) with the curve in Figure 8. Green line represents the TPP about x , however yellow line represents the TPP about y . (b) Locally enlargement.

而该状态将持续到 x 满足 $\dot{y} \leq 0$ 而导致 y 再次衰减, 直到完成一个周期运动为止, 又由于稳定焦点的特征根实部为 -0.15 , 而不稳定焦点的特征根实部为 0.05 , 所以对于整个系统而言, 平衡态 E_0 以及 $E_{\pm 2}$ 是稳定的.

假定轨线的初始位置位于沉寂态 QS_{-1} 中的 $P(w = -0.2)$ 点, 随着系统的演化, 轨线将几乎沿着曲线 EB_{-2} 向左运动, 直到在 fold 分岔点 FB_{-2} 处, 由于平衡态失稳, 进而导致轨线产生跳跃现象而进入激发

态 SP_+ . 由于此时的平衡态是稳定的, 因此轨线最终趋于 EB_{+2} 上, 并且当 $w = A\sin(\Omega t) = 0.5$ 时, 轨线向右折返, 从而形成沉寂态 QS_+ , 而该状态将持续到轨线再次穿越fold分岔点 FB_{+2} .

当轨线穿越fold分岔点 FB_{+2} 产生了跳跃现象后, 最终进入 EB_0 的吸引盆内, 并围绕其振荡, 从而形成了振幅逐渐衰减的激发态 SP_0 . 之后随着系统的演化形成了相对较为短暂的沉寂态 QS_0 .

同理, 当轨线穿越fold分岔点 FB_{-1} 产生了跳跃现象后, 则只能进入 EB_{-2} 的吸引盆内, 并围绕其振荡而形成激发态 SP_- . 最后, 当轨线返回沉寂态 QS_{-1} 中的 P 点时, 系统完成了—个完整的周期簇发振荡. 显然, 系统在整个运动中, 激发态与沉寂态之间只有fold分岔相连接, 因此可称之为fold/fold/fold型周期簇发振荡, 该情形下系统存在3个涡卷.

情形三: 四涡卷周期簇发振荡

当参数增加到 $\alpha_4 = 1.1$ 时, 系统若能产生4个涡卷, 则由上述分析可推测, 系统中将对存在着4个吸引子、4次跳跃现象、4个激发态和沉寂态以及与之相连接的分岔点, 而图10给出的数值结果也与此推测相符. 而从局部放大图图10(b)中同样可以发现这4个激发态中轨线的疏密程度也存在着明显差异. 由此可见, 尽管系统的行为更加复杂, 但是其形成的机理与情形一和情形二相比可能存在着一定的相似之处.

图11给出广义自治系统在 (w, x) 平面上的平衡点曲线, 与图4和8相同的是, 该曲线也被四个fold分岔点划分为五个部分, 且每部分的稳定性同样可由式(6)确定, 经计算表明其稳定性亦与表2所列相同.

而与图8相比, 两者的分岔点如 FB_{+1} 与 FB_{-2} , 以及 FB_{-1} 与 FB_{+2} 之间的横向距离进一步增大了, 这可能使得吸引子 E_0 的吸引盆比情形二中的更大, 因此, 在相图中才可能出现新的涡卷, 导致更为复杂的簇发振荡. 下面着重分析情形二与情形三的不同之处, 即涡卷形成所需满足的条件.

如图12所示, 仍假定轨线的初始位置位于沉寂态 QS_{-1} 中的 $P(w = -0.2)$ 点, 随着系统的演化, 轨线将几乎沿着曲线 EB_{-2} 向左运动, 直到在fold分岔点 FB_{-2} 处, 由于平衡态失稳, 进而导致轨线产生跳跃现象并围绕 EB_0 振荡而进入激发态 SP_0^+ . 显然, 此处轨线的行为

图10 (网络版彩图) $\alpha_4=1.1$, (a) (x, y) 平面上的相图; (b) 局部放大图; (c) 时间历程图

Figure 10 (Color online) $\alpha_4=1.1$ (a) phase portraits on (x, y) plane; (b) locally enlargement; (c) time history.

与情形二中图9没有形成新涡卷的现象是不同的, 其形成条件包括如下3点.

条件一: 在当前参数条件下, 可以发现当轨线刚刚穿越图12中的fold分岔点 FB_{-2} 时, 显然, 系统最多只存在一个吸引子 EB_0 , 因此轨线则可能围绕其振荡, 从而形成了激发态 SP_0^+ . 这是从空间角度来分析的, 因而在该条件下, 图8中当轨线刚刚穿越fold分岔点后, 则可能围绕吸引子 EB_0 振荡, 也可能围绕吸引子 EB_{-2} 的振荡, 而图9的结果就恰好验证了这一条件. 总之, 若有涡卷存在, 则要求在相应空间上存在吸引子.

条件二: 从时间角度来阐述, 可表述为, 轨线在穿越图中的fold分岔点 FB_{-2} 后, 有足够长的运动时间, 并

图 11 (网络版彩图) $\alpha_4=1.1$ 系统的平衡点曲线
Figure 11 (Color online) Equilibrium curves for $\alpha_4=1.1$.

图 12 (网络版彩图) $\alpha_4=1.1$, 转换相图与图11叠加. 其中绿色实线表示关于x的转换相图, 而黄色实线则表示关于y的转换相图
Figure 12 (Color online) $\alpha_4=1.1$, overlay of the the transformed phase portrait (TPP) with the curve in Figure 11. Green line represents the TPP about x, however yellow line shows the TPP about y.

最终可以围绕 EB_0 振荡, 反之, 若时间不够长, 则涡卷同样难以出现. 简单地做法是, 将外激励频率增大, 从而达到减少运动的真实时间来验证该条件, 如图13所示, 当外激励频率增大5倍后, 其中一个激发态将会消失. 然而不管怎样增大频率, 系统最少也会存在3个涡卷, 这是由下述条件三所决定的.

条件三: 多平衡态共存下, 轨线穿越分岔点后, 吸引子自身的演化对涡卷的形成产生重要的影响. 严格地讲, 轨线与平衡线及其上的分岔点是不会重合的, 因此穿越分岔点后, 可能导致轨线受到吸引的吸引子不同, 从而引起系统的行为也不同, 即当轨线穿越 FB_{-2} 后, 若受到 EB_0 的吸引, 则围绕 EB_0 振荡, 同样地, 若受到 EB_{-2} 的吸引, 则会围绕 EB_{-2} 振荡. 这里以情形二中的参数来验证该条件, 在此我们通过改变外激励振幅来影响系统稳定性的演化. 当减小振幅取 $A = 0.3$ 时, 轨

线在穿越分岔点 FB_{-2} 后, 受到吸引的第一个吸引恰好是 EB_0 , 因此出现了一个新的涡卷, 如图14(a)所示, 反之, 当增大振幅取 $A = 1.5$ 时, 则仅存在两个涡卷. 显然,

图 13 $\Omega=0.05$, (a) 系统的相图, (b) 时间历程图
Figure 13 $\Omega=0.05$, (a) phase portraits, (b) time history.

图 14 (a) $A=0.3$ 时系统的相图; (b) $A=1.5$ 时系统的相图
Figure 14 (a) Phase portraits for $A=0.3$; (b) phase portraits for $A=1.5$.

这也可以从能量的角度来解释这种现象, 即振幅越小, 系统能量也越小, 因此轨线更容易围绕低势能吸引子运动.

由于轨线穿越fold分岔点 FB_{+1} 之后的运动情况与情形二相似, 在此不再赘述. 最后, 当轨线再次返回出发点 P 点后, 完成了完整的周期簇发振荡, 可称之为fold/fold/fold/fold型周期簇发振荡, 而该情形下系统存在4个涡卷.

从上述不同的簇发振荡行为可以看出, 随着 α_4 的变化, 其平衡曲线随慢变量 w 的变化情况发生变化, 导致相同的外激励幅值下产生fold分岔的次数发生变化, 从而导致吸引子产生不同的涡卷数目.

另外, 我们发现在广义自治系统的不同平衡点的邻域内, 由于各平衡点在两区域 $D_{\pm}$ 中相应的特征值实部较小, 导致轨迹相对密集, 同时, 相应吸引子也是唯一存在的稳定振荡模式.

4 结论

本文以含周期外激励下的非自治Duffing振子为例, 重点探究了系统中由频域上的不同尺度导致簇发振荡现象的产生机制.

当激励频率远小于系统固有频率时, 可以将整个激励项看作一个慢变参数, 从而得到随慢变参数变化下不同的平衡点以及相应的分岔行为. 具体分3种情况研究了系统不同的簇发现象, 即双涡卷、三涡卷和四涡卷情形, 之后通过转换相图结合分岔分析, 进而揭示了该类非光滑系统中不同簇发振荡的产生机理: 若有涡卷存在, 不仅要求在相应空间上存在吸引子, 而且要求轨线有足够长的运动时间. 另外, 针对这类非光滑系统中的多平衡态共存现象, 还需要考虑到吸引子自身的演化行为, 以此解释了系统产生特殊振荡现象的原因.

参考文献

- 1 Izhikevich E M. Neural excitability, spiking and bursting. *Int J Bifurcation Chaos*, 2000, 10: 1171–1266
- 2 Duan L, Fan D, Lu Q. Hopf bifurcation and bursting synchronization in an excitable systems with chemical delayed coupling. *Cogn Neurodyn*, 2013, 7: 341–349
- 3 Teka W W, Upadhyay R K, Mondal A. Spiking and bursting patterns of fractional-order Izhikevich model. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2018, 56: 161–176
- 4 Zhang Z D, Bi Q S. Bursting phenomenon as well as the bifurcation mechanism of self-excited Lorenz system (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2013, 43: 511–517 [张正娣, 毕勤胜. 自激作用下洛伦兹振子的簇发现象及其分岔机制. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 511–517]
- 5 Hou J, Li X, Zuo D, et al. Bursting and delay behavior in the Belousov-Zhabotinsky reaction with external excitation. *Eur Phys J Plus*, 2017, 132: 283
- 6 Han X, Bi Q, Zhang C, et al. Study of mixed-mode oscillations in a parametrically excited van der Pol system. *Nonlinear Dyn*, 2014, 77: 1285–1296
- 7 Hodgkin A L, Huxley A F. A quantitative description of membrane potential and its application to conduction and excitation in nerve. *Bull Math Biol*, 1952, 117: 500–544
- 8 Xu X, Ni L, Wang R. A neural network model of spontaneous up and down transitions. *Nonlinear Dyn*, 2016, 84: 1541–1551
- 9 Ren J, Gao J, Yang W. Computational simulation of Belousov-Zhabotinskii oscillating chemical reaction. *Comput Visual Sci*, 2009, 12: 227–234
- 10 Proskurkin I S, Vanag V K. New type of excitatory pulse coupling of chemical oscillators via inhibitor. *Phys Chem Chem Phys*, 2015, 17: 17906–17913
- 11 Bröns M, Desroches M, Krupa M. Mixed-mode oscillations due to a singular hopf bifurcation in a forest pest model. *Math Population Studies*, 2015, 22: 71–79
- 12 Wang X, Peng M, Liu X. Stability and Hopf bifurcation analysis of a ratio-dependent predator-prey model with two time delays and Holling type III functional response. *Appl Math Computation*, 2015, 268: 496–508
- 13 Peng M, Zhang Z, Wang X. Hybrid control of Hopf bifurcation in a Lotka-Volterra predator-prey model with two delays. *Adv Differ Equ*, 2017, 2017: 387

- 14 Han Q S, Chen D Y, Zhang H. Bursting oscillations in a hydro-turbine governing system with two time scales. *Chin Phys B*, 2017, 26: 128202
- 15 Simo H, Woaf P. Bursting oscillations in electromechanical systems. *Mech Res Commun*, 2011, 38: 537–541
- 16 Shimizu K, Sekikawa M, Inaba N. Mixed-mode oscillations and chaos from a simple second-order oscillator under weak periodic perturbation. *Phys Lett A*, 2011, 375: 1566–1569
- 17 Rinzel J. Bursting Oscillations in An Excitable Membrane Model. In: Sleeman B D, Jarvis R J, eds. *Ordinary and Partial Differential Equations*. Berlin: Springer, 1985. 304–316
- 18 Zhang Z, Li Y, Bi Q. Routes to bursting in a periodically driven oscillator. *Phys Lett A*, 2013, 377: 975–980
- 19 Begun N, Kryzhevich S. One-dimensional chaos in a system with dry friction: Analytical approach. *Meccanica*, 2015, 50: 1935–1948
- 20 Zhang Z D, Liu Y, Zhang S Z. Bursting oscillations as well as the mechanism with codimension-1 non-smooth bifurcation (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2017, 66: 020501 [张正娣, 刘杨, 张苏珍. 余维-1非光滑分岔下的簇发振荡及其机理. *物理学报*, 2017, 66: 020501]
- 21 Zhang W, Swinton S M. Incorporating natural enemies in an economic threshold for dynamically optimal pest management. *Ecol Model*, 2009, 220: 1315–1324
- 22 Chen X, Huang L. A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator-prey model. *J Math Anal Appl*, 2015, 428: 817–837
- 23 Zhao Y P. *Nano and Mesoscopic Mechanics* (in Chinese). Beijing: Science Press, 2014 [赵亚溥. *纳米与介观力学*. 北京: 科学出版社, 2014]
- 24 Stoyanov B, Kordov K. Novel image encryption scheme based on Chebyshev polynomial and Duffing map. *Sci World J*, 2014, 2014: 1–11
- 25 Ma C Y, Gong Y. Fault line selection based on Duffing oscillator dichotomy for coal mine electric network (in Chinese). *Coal Eng*, 2016, 48: 110–112 [马春艳, 龚瑛. 基于Duffing振子二分法的煤矿电网故障选线方法. *煤炭工程*, 2016, 48: 110–112]
- 26 Wang X D, Yang S P, Zhao Z H. Research of weak signal detection based on the improved Duffing oscillation (in Chinese). *J Dyn Control*, 2016, 14: 283–288 [王晓东, 杨绍普, 赵志宏. 基于改进型Duffing振子的微弱信号检测研究. *动力学与控制学报*, 2016, 14: 283–288]
- 27 Lomtatidze A, Šremr J. On periodic solutions to second-order Duffing type equations. *Nonlinear Anal-Real World Appl*, 2018, 40: 215–242
- 28 Nayfeh A H, Ouakad H M, Najar F, et al. Nonlinear dynamics of a resonant gas sensor. *Nonlinear Dyn*, 2010, 59: 607–618

Bursting oscillations and mechanism analysis in a non-smooth Duffing system with frequency domain of two time scales

ZHANG ZhengDi^{1*}, PENG Miao¹, QU ZiFang¹ & BI QinSheng²

¹ Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China;

² School of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China

The main purpose of the manuscript is to explore the bursting oscillations in a dynamic system with non-smooth factor. Take the duffing system as a example, by introducing dry friction, and choosing periodic excitation ensure that there exists order gap between the natural frequency and the exited frequency, a non-smooth system with two time scales is established. The whole exciting term can be regarded as a slow-varying parameter, which leads to the generalized autonomous system, and the stability and the associated bifurcation conditions can be derived. By taking suitable parameter values, three typical cases are considered under the three group different parameters which can described as double scrolls, three scrolls and four scrolls. By using the transformed phase portrait and considering the effect of non-smooth factor, the associated bifurcation mechanism of the bursting oscillations is discussed, which may reveal different forms of bursting oscillations and transition mechanism between quiescent states and the spiking states. In addition, aiming at the coexistence of multiple equilibrium states in this non-smooth system, combined with the influence of evolution behavior of the attractor itself, and further reveals that the reason for showing special oscillation phenomena under the influence of non-smooth factor.

non-smooth, Duffing system, two time scales, bursting oscillation, bifurcation mechanism

PACS: 05.45.Xt, 05.45.-a, 05.45.Pq

doi: [10.1360/SSPMA2018-00044](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00044)