Green 函数与非线性发展方程解的大时间状态

献给齐民友教授 90 华诞

王维克^{1,2}

1. 上海交通大学数学科学学院, 上海 200240;

2. 上海交通大学自然科学研究院, 上海 200240

E-mail: wkwang@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2018-03-20; 接受日期: 2018-04-24; 网络出版日期: 2018-11-12

国家自然科学基金 (批准号: 11771284) 资助项目

摘要 本文讨论用 Green 函数方法研究非线性发展方程初值问题解的大时间状态的逐点估计. 在简要介绍 Green 函数的基本思想后, 本文通过两个例子说明, 对带耗散和双曲结构的非线性发展方程, 其相应初值问题的解在双曲机制、抛物机制和非线性机制作用下, 如何通过 Green 函数的方法厘清各种机制的作用, 清晰看到其精细结构, 并解释其他方法难以解释的一些令人诧异的现象.

关键词 逐点估计 双曲机制 一般 Huygens 原理 阻尼机制 衰减率

MSC (2010) 主题分类 35S05, 35S10, 35B40

1 引言

对于非线性发展方程, 讨论其初值问题或者初边值问题解的整体存在性和大时间状态, 一般常用的办法是, 在方程局部解存在的前提下, 通过能量估计和连续性方法讨论非线性发展方程解的整体存在性和大时间的状态. 随着研究的深入, 人们开始考虑更加复杂和有着重要物理背景的方程组, 这些方程通常耦合了双曲和抛物机制, 有的还要耦合上椭圆机制, 再加上各种非线性机制, 构成了形形色色的非线性发展方程. 这类非线性发展方程组由于其在流体力学、生物数学、材料力学、工程物理、核能技术和航空航天等重要的科学技术领域的重要应用, 并涵盖诸如不可压缩流体的 Navier-Stokes 方程和可压缩流体的 Navier-Stokes 方程等著名方程, 一直是偏微分方程最重要的研究领域. 近三十年来, 随着微局部分分析和调和分析技术的发展以及在这一领域的出色应用 (参见文献 [1–4]), 再加上椭圆方程和抛物方程领域多年发展起来的各类精细分析方法 (如 De Giorgi-Nash-Moser 估计 [5] 等), 以及近年形成的针对带非局部化算子的一些非线性发展方程研究的新技术 (如非局部极值原理和非线性极值原理 (参见文献 [6–9]) 等) 开始涉足与应用于这一研究领域, 使得双曲 - 抛物耦合、双曲 - 抛物 - 椭圆耦合的非线性发展方程的研究的疆界有了很大的拓展, 不少数学家开始涉足一些过去数学研究很少触

英文引用格式: Wang W K. Green's function and large time behavior of solutions for nonlinear evolution systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 249–266, doi: 10.1360/N012018-00069

及的多物理过程的复杂非线性发展方程, 很多研究的方法表现出更高的技术含量, 同时也得到一系列引人注目的工作. 在这些新技术的应用中, Green 函数方法由于其实用性和符合很多问题精细化的要求, 再加上其与其他调和分析方法有很好的契合性, 得到人们愈来愈多的重视, 在很多文献中用不同的形式出现, 是一个在非线性发展方程研究中值得我们重视的数学方法.

所谓 Green 函数方法就是利用非线性发展方程的线性化方程的 Cauchy 问题的基本解来研究原方程的解, 最初是 Liu^[10] 在考虑一维的黏性激波的逐点估计时提出的, 后逐步发展为可以研究多维问题. 近年很多文献称其为 Green 函数方法. 一方面, Green 函数方法从本质上讲应该归于“微局部分析”方法 (参见文献 [1, 3, 11, 12]), 其基本思想是通过 Fourier 分析, 在空间域、时间域和频谱域配合方程的结构进行精细的微局部分解, 从而得到解的性质和解各种形态; 另一方面, Green 函数方法与半群方法及谱方法有很多类似之处, 其表现形式均是把一个微分方程转化为一个积分方程表示或者算子方程表示. 但毫无疑问, Green 函数方法比半群方法和谱方法更精细, 可以得到半群方法和谱方法难以实现的精细结果. 当然, Green 函数方法更适合初值问题, 在初边值问题上比半群方法和谱方法的适用范围会有稍多的局限性, 其精细估计需要对方程有更深刻的理解, 也需要更高的技术性.

用 Green 方法在进行精细估计时, 一个常见的技术路线是从微局部分析的角度, 通过一些空间域和频域的不等式估计得到解的性质和大时间状态, 后常称为“实分析办法”; 另一个技术路线是通过围道积分等复分析办法得到其基本解的表示或者性质, 后常称为“复分析办法”. 从处理问题的角度讲, Green 函数方法主要用于处理非线性发展方程的 Cauchy 问题和各种初边值问题. 由于作者的局限性, 本文不试图对 Green 函数方法作一个全面的综述, 仅就笔者本人熟悉的领域介绍 Green 函数方法的精妙之处, 所以对 Green 函数的“复分析”办法和用 Green 函数方法处理初边值问题将不会涉及. 这两方面的研究是一个有广泛应用前景和高技术含量的方法, 有兴趣的读者可参见文献 [13–17]. 另外, 目前, Green 函数方法的长处主要表现在讨论小扰动情形下解的大时间状态的逐点分析. 但实际上, 前面提到的调和分析和各类精细分析方法本质上都是在空间域和频谱域进行切割、分解和分析, 希望探索问题更深层次的物理和数学机理, 这些特点正是与 Green 函数方法一致, 所以可以期望 Green 函数方法在研究各种具有重要物理意义的非线性发展方程的大扰动解的存在性等问题上可以有所贡献.

本文的目的是想解释为什么 Green 函数方法可以很清楚看到非线性发展方程解的结构和大时间状态. 同时, 为什么在不少情形下, Green 函数方法可以得到通常能量方法不能得到的精细结果. 为了这个目的, 本文将通过两类方程组的研究来说明. 后面章节会看到两种似乎是不可思议的现象. 一个现象是可压缩流体的 Navier-Stokes 方程的解会满足一般 Huygens 原理, 具体讲就是在小扰动初值的前提下, 可压缩流体的 Navier-Stokes 方程 Cauchy 问题的解, 其大时间状态中表现出波动方程波的传播和热方程的扩散这两种现象的组合. 而波的传播是满足 Huygens 原理的, 我们就把这种组合的扩散现象的 Huygens 原理称为“一般的 Huygens 原理”^[11]. 但是, 由于电场的作用, 加上电场的作用后形成的单极的可压缩流的 Navier-Stokes-Poisson 方程, 其 Cauchy 问题的解, 不再满足一般的 Huygens 原理, 具体地讲就是这一方程组的 Cauchy 问题的解只有扩散现象, 不再具有波的传播现象. 一个明显含有双曲机制的方程组的 Cauchy 问题的解没有表现出波的传播, 这当然是一个令人关注的现象. 更有意思的是, 双极的可压缩流的 Navier-Stokes-Poisson 方程, 其方程 Cauchy 问题的解又满足一般的 Huygens 原理, 又有了波的传播现象 (目前仅仅对奇数维情形下证明了这一结论, 参见文献 [18]), 这就让人诧异了. 另外一类现象是关于 Timoshenko 梁方程. 一般我们会认为, 一个双曲方程组, 加上阻尼后方程会增加衰减率, 增加两个阻尼项至少其衰减率不会低于仅仅一个阻尼项的. 但对于 Timoshenko 梁方程, 人们发现加上两个阻尼项, 其方程解的衰减性还慢于仅有一个阻尼项方程的解. 这些现象从数学上看并不是显然的, 甚至是难以理解的. 但用 Green 函数的办法可以清楚看到在考察非线性发展方程解的

大时间状态时这些让人感到诧异的现象背后的数学本质. 本文就是通过这两个例子, 在用 Green 函数的方法解释这些现象的同时, 体会到 Green 函数方法的优越性和在精细分析时的强大功效.

以下内容分 3 节讨论: 第 2 节简述 Green 函数的基本思想和性质; 第 3 节讨论与 Navier-Stokes-Poisson 方程相关的方程组解的一般 Huygens 原理; 第 4 节讨论带双阻尼的 Timoshenko 梁方程解的衰减速率. 关于 Green 函数“实分析”的基本思想, 我们曾经在综述文献 [19] 中有叙述, 这里为了读者方便, 在第 2 节作了简单介绍. 第 3 和 4 节内容是介绍近期的结果, 这些结果可以更好体现 Green 函数在非线性发展方程研究中的优势, 本文也可看作文献 [19] 的继续.

2 Green 函数方法的基本思想和性质

本文中提到的 Green 函数, 实际上是一个常系数线性发展方程组 Cauchy 问题的基本解, 一般而言, 如果考虑一个非线性发展方程的 Cauchy 问题, 当其初值是在一个常状态附近的小扰动时, 我们总可以在这常状态附近将这一非线性发展方程线性化. 这样得到的是一个常系数线性发展方程组 Cauchy 问题, 我们可以得到其 Cauchy 问题的基本解, 并用 Duhamel 原理将原来的非线性发展方程的 Cauchy 问题的解表示成一个积分方程的解. 而这样一种变换给予 Green 函数方法一个好的工作平台, 使我们可以借助线性方程解的结构理解和得到一些有着重要物理背景的非线性发展方程组解的结构, 如可压缩流的 Navier-Stokes 方程组等.

为了更清楚表述以上思想, 我们考虑一个具有一般形式的非线性发展方程组的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \partial_t U(t, x) + \sum_{j=1}^n A_j(U) \partial_{x_j} U(t, x) + \sum_{i,j=1}^n B_{i,j}(U) \partial_{x_i} \partial_{x_j} U(t, x) + C(U)U(t, x) = 0, \\ U(0, x) = U_0(x), \end{cases} \quad (2.1)$$

其中未知函数 $U(t, x)$ 是一个 n 维向量, $A_j(U)$ 、 $B_{i,j}(U)$ 和 $C(U)$ 是含有未知函数 $U = U(t, x)$ 的 n 阶矩阵, 初值 $U_0(x)$ 是已知的函数, 并假设 $\|U_0(x) - U^*\| \leq \varepsilon$. 这里 U^* 是满足方程的常状态解, $\|U_0(x) - U^*\| \leq \varepsilon$ 表示在每个范数意义下初值 $U_0(x)$ 是在常状态 U^* 附近的小扰动.

如果记 $U(t, x) = \tilde{U}(t, x) + U^*$, $A_j^* = A_j(U^*)$, $B_{i,j}^* = B_{i,j}(U^*)$, $C^* = C'(U^*)$, 则可以将 (2.1) 中的非线性方程线性化, 即为

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{U}(t, x) + \sum_{j=1}^n A_j^* \partial_{x_j} \tilde{U}(t, x) + \sum_{i,j=1}^n B_{i,j}^* \partial_{x_i} \partial_{x_j} \tilde{U}(t, x) + C^* \tilde{U}(t, x) + C(U^*) \\ = N(\tilde{U}(t, x), U^*), \\ G(0, x) = U_0(x), \end{cases} \quad (2.2)$$

上式中的 $N(U, U^*)$ 为方程线性化后余下的非线性项, 具体可以表示为

$$N(\tilde{U}, U^*) = \sum_{j=1}^n (A_j^* - A_j(U)) \partial_{x_j} \tilde{U} + \sum_{i,j=1}^n (B_{i,j}^* - B_{i,j}(U)) \partial_{x_i} \partial_{x_j} \tilde{U} + (C^* \tilde{U} + C(U^*) - C(U)U).$$

这一线性化方程 Cauchy 问题的基本解记为 $G(t, x)$, 则 $G(t, x)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t G(t, x) + \sum_{j=1}^n A_j^* \partial_{x_j} G(t, x) + \sum_{i,j=1}^n B_{i,j}^* \partial_{x_i} \partial_{x_j} G(t, x) + C^* G(t, x) + C(U^*) = 0, \\ G(0, x) = \delta(x) I_{n \times n}, \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 $\delta(x) = \delta(x_1) \otimes \delta(x_2) \otimes \cdots \otimes \delta(x_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Delta 函数, $I_{n \times n}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的单位矩阵. 在本文中, 这样一个基本解 $G(t, x)$ 就称为 Green 函数. 由 Duhamel 原理知, (2.1) 的解可以表示为

$$U(t, x) = G(t, \cdot) * U_0(\cdot) + \int_0^t G(t-s, \cdot) * N(\tilde{U}(s, \cdot), U^*) ds. \quad (2.4)$$

以上积分方程和 Green 函数 $G(t, x)$ 的逐点估计是 Green 函数方法的出发点. 为了得到 Green 函数的逐点估计, 我们对方程 (2.3) 的空间变量作 Fourier 变换, 得到一个常微分方程组

$$\begin{cases} \partial_t \hat{G}(t, \xi) + \sum_{j=1}^n A_j^* (-\sqrt{-1} \xi_j) \hat{G}(t, \xi) - \sum_{i,j=1}^n B_{i,j}^* \xi_i \xi_j \hat{G}(t, \xi) + C^* \hat{G}(t, \xi) + C(U^*) = 0, \\ \hat{G}(0, \xi) = I_{n \times n}, \end{cases} \quad (2.5)$$

其中 ξ_j ($j = 1, \dots, n$) 是 Fourier 变换中空间变量 x_j ($j = 1, \dots, n$) 的对偶变量, 通常称为频域变量. 方程 (2.5) 是一个含参变量 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 的常微分方程组, 可以通过解其特征根和特征向量的方法得到其解. 当然, 如果 $n > 2$, 这样一个方程组的特征根也是不好求的. 如果 $n > 4$, 由于 5 次方程没有一般的求根法则, 其特征根的得到会有更大困难. 但这不是本文关注的重点. 为了清楚了解如何从 Green 函数得到逐点估计, 我们通过一个具体的例子来说明. 考虑如下一个重要的方程, 即可压缩流的 Navier-Stokes 方程组:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div} M = 0, \\ \partial_t M + \operatorname{div} \left(\frac{M \otimes M}{\rho} \right) + \nabla P(\rho) = \mu_1 \Delta \left(\frac{M}{\rho} \right) + \mu_2 \nabla \operatorname{div} \left(\frac{M}{\rho} \right), \end{cases} \quad (2.6)$$

其中 ρ 是流体的密度; M 是动量, 是一个 n 维向量; P 是压力, 它是流体的密度 ρ 的函数. 在一个常状态 $(\bar{\rho}, \bar{M}) = (1, 0)$ 将方程组线性化就有

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div} M = 0, \\ \partial_t M + c^2 \nabla \rho = \mu_1 \Delta M + \mu_2 \nabla \operatorname{div} M. \end{cases} \quad (2.7)$$

以上方程组中 $c^2 = P'(1)$, 同时为方便起见, 将减去了常状态后的密度和动量仍然分别记为 ρ 和 M . 将这一线性方程组对 x 变量作 Fourier 变换, 并解相应的常微分方程, 可以得到其解, 就是 Green 函数的 Fourier 变换:

$$\hat{G}(t, x) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_+ e^{\lambda_+ t} - \lambda_- e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} & -\sqrt{-1} \left(\frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) \xi^T \\ -\sqrt{-1} c^2 \left(\frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} \right) \xi & e^{-\varepsilon |\xi|^2 t} + \left(\frac{\lambda_+ e^{\lambda_+ t} - \lambda_- e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} - e^{-\varepsilon |\xi|^2 t} \right) \frac{\xi \xi^T}{|\xi|^2} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

其中 $\nu = \mu_1 + \mu_2$, $|\xi| \neq 0$ 和 $|\xi| \neq \frac{2c}{\nu}$, 并且 $\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2}\nu|\xi|^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\nu^2|\xi|^4 - 4c^2|\xi|^2}$. 当然, 这个 Green 函数之所以可以得到, 是因为相应的方程有较好的对称结构. 但从以上这个 $(n+1) \times (n+1)$ 的矩阵的表示很难看出逐点估计的可能, 这里有几个关键的观察和重要的思想. 第一个重要的思想和关键点是, 对于带耗散结构的发展方程 (一般而言应该满足 Shizuta-Kawashima 条件, 参见文献 [20, 21]), 其解的主体结构由其低频部分 (即 $|\xi| \leq \varepsilon$ 的部分) 确定. 故以下为看到方程解的大时间状态, 仅需考虑其低频的情形, 对以上特征根在 $|\xi| \leq \varepsilon$ 处作 Taylor 展式, 有

$$\lambda_{\pm}(\xi) = \pm \sqrt{-1} c |\xi| - \frac{1}{2} \nu |\xi|^2 + O(|\xi|^3). \quad (2.9)$$

从 (2.9) 可否看到解的大时间状态呢? 答案是肯定的, 但这里需要一点经验, 也就是 Green 函数方法的又一重要思想, 即第二个关键点. 为理解 Green 函数的这一关键想法, 这里需要回顾最简单的双曲方程和抛物方程.

下面看热方程和波动方程的 Cauchy 问题的基本解, 这是通常偏微分方程教材都会有的内容, 其 Cauchy 问题分别为

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, \\ u|_{t=0} = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0, \\ (u, u_t)^\tau|_{t=0} = \delta(x) I_{2 \times 2}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.11)$$

注意在热方程 (2.10) 中, u 是纯量; 而在波动方程 (2.11) 中, 因为对 $(u, u_t)^\tau$ 给予两组初值, 故这里的 u 应看作向量. 对热方程, 对其空间变量用 Fourier 变换, 有

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} = 0, \\ \hat{u}|_{t=0} = 1, \end{cases}$$

解得 $\hat{u}(t, \xi) = e^{-|\xi|^2 t}$. 利用逆 Fourier 变换, 得到热方程的 Cauchy 问题 (2.10) 的基本解

$$u(x, t) = t^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}.$$

这也是著名的 Gauss 分布. 对波动方程的 Cauchy 问题 (2.11), 同样对空间变量用 Fourier 变换, 有

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u} + c^2 |\xi|^2 \hat{u} = 0, \\ (\hat{u}, \hat{u}_t)^\tau|_{t=0} = I_{2 \times 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{u}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 & 0 \\ 0 & \hat{u}_2 \end{pmatrix},$$

其中解 $\hat{u}_j$ ($j = 1, 2$) 的复形式是

$$\hat{u}_1(t, \xi) = e^{\sqrt{-1}c|\xi|t}, \quad \hat{u}_2(t, \xi) = e^{-\sqrt{-1}c|\xi|t},$$

而解的实形式是

$$\hat{u}_1(t, \xi) = \cos(c|\xi|t), \quad \hat{u}_2(t, \xi) = \frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|t}.$$

对波动方程, 我们知道其基本解是“球面上的 Delta 函数”, 但 $\hat{u}_j$ ($j = 1, 2$) 的逆 Fourier 变换形式是不好写出的, 如果记

$$\hat{w} = (2\pi)^{-n/2} \frac{\sin c|\xi|t}{c|\xi|}, \quad \hat{w}_t = (2\pi)^{-n/2} \cos(c|\xi|t).$$

我们可以通过下面的引理 2.1 表示出基本解作用到一个函数上后的效果. 这一引理通常称为波方程的 Kichohoroff 公式 (参见文献 [22]). 基于这个公式以及相应的推论, 我们可以很好描述波方程的波的传播效应.

引理 2.1 假设 $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ ($m > \frac{n}{2} + 1$).

(1) 如果 n 是奇数, 那么存在常数 a_α 和 b_α , 使得

$$w * f = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq (n-3)/2} a_\alpha t^{|\alpha|+1} \int_{|y|=1} D^\alpha f(x + cty) y^\alpha dS_y,$$

$$w_t * f = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq (n-1)/2} b_\alpha t^{|\alpha|} \int_{|y|=1} D^\alpha f(x+cty) y^\alpha dS_y;$$

(2) 如果 n 是偶数, 那么存在常数 a_α 和 b_α , 使得

$$\begin{aligned} w * f(x) &= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq \frac{n-2}{2}} a_\alpha t^{|\alpha|+1} \int_{|y| \leq 1} \frac{D^\alpha f(x+cty)}{\sqrt{1-|y|^2}} y^\alpha dy, \\ w_t * f(x) &= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq \frac{n}{2}} b_\alpha t^\alpha \int_{|y| \leq 1} \frac{D^\alpha f(x+cty)}{\sqrt{1-|y|^2}} y^\alpha dy. \end{aligned}$$

下面回到 Navier-Stokes 方程的讨论, 从这两个最经典的例子我们看到, Green 函数的 Fourier 变换的形式中, $e^{-|\xi|^2/t}$ 表示的是抛物方程的扩散现象, 而 $e^{\pm\sqrt{-1}c|\xi|t}$ 表示的是双曲方程的波的传播现象. 而在考虑线性方程的特征根时, 需要捕捉的就是形如 $-|\xi|^2t$ 和 $\sqrt{-1}c|\xi|t$ 的项. 从 (2.9) 中可以看到, Navier-Stokes 方程的特征根在低频部分正是表现出这样的双曲和抛物的特性.

前面我们看到, 通过 Fourier 变换, 可以从 $e^{-|\xi|^2t}$ 得到类似热核的扩散产生的衰减. 但问题是如何把波的现象表示出来. 例如, 考虑 (2.8) 中的 $e^{\lambda+t}$ 这样一项的逆 Fourier 变换的逐点估计, 由 (2.9), 当 $|\xi| \leq \varepsilon \ll 1$ 时,

$$e^{\lambda+t} = e^{\sqrt{-1}c|\xi|t} e^{-\frac{1}{2}\nu|\xi|^2t + O(|\xi|^3)t} =: \hat{G}_1 \hat{G}_2, \quad (2.12)$$

其中 $\hat{G}_1 = e^{\sqrt{-1}c|\xi|t}$, $\hat{G}_2 = e^{-\frac{1}{2}\nu|\xi|^2t + O(|\xi|^3)t}$. 粗略地, 我们可以先从 $\hat{G}_2$ 的衰减估计, 通过微局部分析的一些办法得到 $G_2(t, x)$ 的估计:

$$|G_2(t, x)| \leq Ct^{-n/2} \left(1 + \frac{|x|^2}{1+t}\right)^{-m}, \quad m \geq \frac{n}{2}. \quad (2.13)$$

在得到 $|G_2(t, x)|$ 逐点估计的基础上, 当空间维数为奇数时, 再用引理 2.1(1) 及其相关引理得到

$$|G_1 * G_2(t, x)| \leq Ct^{-n/2-(n-1)/4} \left(1 + \frac{(|x|-ct)^2}{1+t}\right)^{-m}, \quad m \geq \frac{n}{2}. \quad (2.14)$$

如果空间维数为偶数时, 也是在得到 $|G_2(t, x)|$ 逐点估计的基础上, 再用引理 2.1(2) 及其相关引理得到

$$|G_1 * G_2(t, x)| \leq Ct^{-n/2-(n-2)/4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2(1+\frac{(|x|-ctr)^2}{1+t})}^m} dr, \quad m \geq \frac{n}{2}. \quad (2.15)$$

上面 (2.14) 和 (2.15) 两式就体现出解的波动现象. 具体说, 可以看到 $|x| - ct = 0$ 形成一个特征锥, 在奇数维的情形下, 在特征锥附近 Green 函数衰减最慢, 特征锥内或者特征锥外都衰减稍快; 在偶数维情形下, 在特征锥附近 Green 函数衰减最慢, 特征锥外都衰减最快, 特征锥内的衰减速度介于这两者之间. 奇数维与偶数维的衰减情形不一样, 这一现象实际上是由波的传播的 Huygens 原理造成的, 大于等于 3 的奇数维波的传播有清晰的前阵面和清晰的后阵面; 但偶数维波的传播有清晰的前阵面, 但没有清晰的后阵面, 这就导致偶数维特征锥内的衰减速度与奇数维的不同. 注意到这里还有耗散这一抛物结构造成的衰减, 我们把这样一种双曲机制和抛物机制共同作用形成的衰减形态称之为一般的 Huygens 原理.

还再强调的一点是, 如果把 $G_1(t, x)$ 和 $G_2(t, x)$ 放在一起估计, 因为 $|\hat{G}_1| = 1$, 很容易就把波动现象泯灭在估计的过程中. 把波动的结构 (或者称双曲结构) 单独估计是用 Green 函数方法得到逐点估计的重要思想之一, 即前面提到的第二个关键点.

注意到前面叙述的都是低频的情形 (有的文献也称为长波的情形), 对于其他情形, 即带宽 (即 $\epsilon \leq |\xi| \leq M$) 和 高频部分 (即 $|\xi| \geq M$) 还需要讨论. 但可以证明这余下的部分对时间 t 均是指数级衰减, 所以, 低频部分确定了相应方程组解的大时间状态, 这是前面主要考虑低频部分的原因. 但这里必须说明的是, 带宽和 高频部分虽然不影响解的大时间的逐点估计, 但其证明不是显然的. 以上说到的还仅仅是 Green 函数的估计, 如果要证明其初值在一个常状态附近小扰动的情形, 相应非线性发展方程解的逐点估计就会有更多困难, 而且其证明很多情形下还必须与能量方法结合才能完成.

综上所述, 用 Green 函数方法仅仅研究其 Green 函数的低频部分的状态就可以清楚看到解的大时间状态的精细结构, 这一作法可以针对一大类满足 Shizuta-Kawashima 条件^[20, 21]的非线性发展方程. 但证明这些“看到的精细结构”是一个非常技术性的过程, 还必须结合其他方法, 例如, 能量估计、微局部分分析和调和 分析的办法进行一系列的估计. 可以看到, 本节以上讨论的主要目的是讨论如何用 Green 函数方法看到解的大时间精细结构, 没有详细介绍相应的证明细节, 相应的证明细节可参见文献 [11, 12, 19, 23, 24]. 后面两节我们会体会到, 在对方程解作估计前, 用 Green 函数方法先“看到解的精细结构”是十分重要的. 这样可以清晰知道期望得到的结果和前行的道路, 而不是在迷雾中试探徘徊.

3 解的一般 Huygens 原理

本节以可压缩流的 Navier-Stokes 方程和描述半导体中的 (电) 流体方程 Navier-Stokes-Poisson 方程 (参见文献 [25–29]) 为例, 介绍如何用 Green 函数的方法理解这些方程解的波动现象, 主要围绕一般 Huygens 原理展开. Navier-Stokes-Poisson 方程是多物理过程耦合的非线性发展方程, 这一类问题的重要性一是因为其有重要的物理和工程学的应用; 二是这类方程除有双曲和抛物机制外, 一些方程还包含了椭圆机制 (其变形简化后转化成含非局部化耗散结构), 富含各种物理现象. 这类问题目前均是考虑其小扰动解的适定性和大时间状态.

在小扰动的情形下已经可以看到一些非常有意思的现象. 例如, 在文献 [11, 23, 24] 中应用 Green 函数办法得到可压缩流的 Navier-Stokes 方程小扰动解的逐点估计, 揭示出该方程组的解有波的传播现象, 且满足一般的 Huygens 原理. 接着文献 [28, 29] 中却发现由于电场的作用, 对单极的可压缩流的 Navier-Stokes-Poisson 方程, 其解不再有波的传播现象, 也不满足一般的 Huygens 原理. 更有意思的是, 在讨论双极的可压缩流的 Navier-Stokes-Poisson 方程时发现又出现波的传播现象, 在奇数维情形下其解又满足一般的 Huygens 原理 (参见文献 [18]). 这个现象的物理解释目前并不清楚, 但多场作用下, 一些奇妙的现象是很多数学工作者都有体会的. 至于偶数维情形, 由于其解的逐点结构更为复杂, 暂时还没有结果. 可以看到, 由于多物理场的效应, 使得这类方程表现出非常丰富的物理现象, 结合 Green 函数的办法, 可以期望得到更多有意思的结果.

可压缩流的 Navier-Stokes 方程组是

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div} M = 0, \\ \partial_t M + \operatorname{div} \left(\frac{M \otimes M}{\rho} \right) + \nabla P(\rho) = \mu_1 \Delta \left(\frac{M}{\rho} \right) + \mu_2 \nabla \operatorname{div} \left(\frac{M}{\rho} \right), \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $\rho(t, x)$ 是流体的密度 (densities); $M(t, x)$ 是动量 (momenta); $P(t, x)$ 是压力 (pressure), 在本文中压力 $P(t, x) = (\rho(t, x))^\gamma$, 是密度的函数. 在文献 [11, 23, 24] 中得到可压缩流的 Navier-Stokes 方程组的解逐点估计, 揭示其解的状态一方面具有类似热传导方程由于耗散机制产生的耗散波, 同时还满足所

谓的一般的 Huygens 原理, 即在 3 维和 3 维以上的奇数维的情形, 解由于耗散机制在衰减的同时, 还有波的传播, 并且在波的传播中有较清晰的波的前阵面, 也有较清晰的后阵面; 但在 2 维和 2 维以上的偶数维情形, 波的传播有较清晰的波的前阵面, 但没有清晰的后阵面. 这里叙述中讲到 Huygens 原理波在传播中的前阵面和后阵面均用“较清晰”来描述, 这是因为方程的耗散机制会使得波没有到达的位置会先受到耗散效应的影响, 波的传播的阵面的清晰度会有影响. 这也是我们称其为“一般 Huygens 原理”的原因. 这一工作充分体现了 Green 函数的威力, 只有通过 Green 函数的逐点估计才能看到可压缩流的 Navier-Stokes 方程组解所具有的双曲和抛物机制. 而传统的能量估计方法因为是通过积分看到的, 是整体能量, 波的传播这一重要现象被“平均”抹杀掉了. 具体对 3 维可压缩流的 Navier-Stokes 方程组有以下结果:

定理 3.1 ^[11] 设 $P'(\rho) > 0$ ($\rho > 0$), 如果 $(\rho - \bar{\rho}, M_0) \in H^6(\mathbb{R}^3)$, 并要求 $\varepsilon_0 = \|(\rho_0 - \bar{\rho}, M_0)\|_{H^6(\mathbb{R}^3)}$ 充分小, 那么方程 (3.1) 的 Cauchy 问题存在经典解. 进一步, 如果初值还满足

$$|D_x^\alpha(\rho_0 - \bar{\rho}, M_0)| \leq C\varepsilon_0(1 + |x|^2)^{-r}, \quad r \geq \frac{21}{10}, \quad |\alpha| \leq 2,$$

那么 Cauchy 问题的解满足以下逐点估计:

$$|\rho - \bar{\rho}| + |M| \leq C\varepsilon_0(1 + t)^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{|x|^2}{1 + t}\right)^{-\frac{3}{2}} + (1 + t)^{-2} \left(1 + \frac{(|x| - ct)^2}{1 + t}\right)^{-\frac{3}{2}},$$

其中 $c := \sqrt{P'(\bar{\rho})}$.

上式的第一项称为扩散波, 它表现出的是由于抛物机制产生类似热传导方程的扩散波; 第二项称为一般 Huygens 波, 除了具有耗散机制外, 可以看到这波的主体按速度 c 传播.

再看单极情形下等熵的 Navier-Stokes-Poisson 方程组:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div} M = 0, \\ \partial_t M + \operatorname{div} \left(\frac{M \otimes M}{\rho} \right) + \nabla P(\rho_1) = \mu_1 \Delta \left(\frac{M}{\rho} \right) + \mu_2 \nabla \operatorname{div} \left(\frac{M}{\rho} \right) + \rho \nabla \phi, \\ \Delta \phi = \rho - \rho_0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x, t) \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

从数学上看, 这一方程是在 Navier-Stokes 方程组的基础上加上电场的势函数 (electric potential) ϕ 以及相应的椭圆方程, 这实际上形成一个双曲 - 抛物 - 椭圆耦合的方程组. 这一方程组由于其椭圆结构会产生非局部化算子, 讨论其解的大时间状态需要克服一些技术上的困难, 但这不是本文关心的重点. 事实上, 文献 [28] 和 [29] 用 Green 函数方法分别得到了等熵和非等熵情形下解的逐点估计. 本文主要是介绍文献 [28] 的结果, 即对等熵的单极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组有以下结论:

定理 3.2 设 $P'(\rho) > 0$ ($\rho > 0$), 如果 $(\rho - \bar{\rho}, M_0, \nabla \phi_0) \in H^6(\mathbb{R}^3)$, 并要求 $\varepsilon_0 := \|(\rho_0 - \bar{\rho}, M_0, \nabla \phi_0)\|_{H^6(\mathbb{R}^3)}$ 充分小, 那么方程 (3.2) 的 Cauchy 问题存在经典解. 进一步, 如果初值还满足

$$|D_x^\alpha(\rho_0 - \bar{\rho}, M_0)| \leq C\varepsilon_0(1 + |x|^2)^{-r}, \quad r \geq \frac{21}{10},$$

那么 Cauchy 问题的解满足以下逐点估计:

$$|\rho - \bar{\rho}| + |M| \leq C\varepsilon_0(1 + t)^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{|x|^2}{1 + t}\right)^{-(\frac{3}{2} - \varepsilon)}.$$

从以上定理可以看到一个令人关注的现象是, 由于电场的作用, 单极情形下等熵的 Navier-Stokes-Poisson 方程组的解不再有波的主体沿着某一方向传播, 也就是说解的逐点估计中只有扩散波而不再有 Huygens 波, 不再满足一般的 Huygens 原理. 这一有趣现象可以用 Green 函数作出数学解释, 这点在后面会有仔细的分析.

最后再看双极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \operatorname{div} M_1 = 0, \\ \partial_t M_1 + \operatorname{div} \left(\frac{M_1 \otimes M_1}{\rho_1} \right) + \nabla P_1(\rho_1) = \mu_1 \Delta \left(\frac{M_1}{\rho_1} \right) + \mu_2 \nabla \operatorname{div} \left(\frac{M_1}{\rho_1} \right) + \rho_1 \nabla \phi, \\ \partial_t \rho_2 + \operatorname{div} M_2 = 0, \\ \partial_t M_2 + \operatorname{div} \left(\frac{M_2 \otimes M_2}{\rho_2} \right) + \nabla P_2(\rho_2) = \mu_1 \Delta \left(\frac{M_2}{\rho_2} \right) + \mu_2 \nabla \operatorname{div} \left(\frac{M_2}{\rho_2} \right) - \rho_2 \nabla \phi, \\ \Delta \phi = \rho_1 - \rho_2, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x, t) \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

这相当于是两个不同密度和动量的 Navier-Stokes-Poisson 方程组用势函数和一个椭圆方程联立起来. 对于双极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组, 我们有以下结果 (参见文献 [18]):

定理 3.3 设 $P'_1(\rho_1) > 0$ 和 $P'_2(\rho_2) > 0$ ($\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$), 如果 $(\rho_i - \bar{\rho}, M_{i0}, \nabla \phi_0) \in H^6(\mathbb{R}^3)$ ($i = 1, 2, c := \sqrt{P'_i(\bar{\rho})}$ 是常数), 并要求 $\varepsilon_0 := \|(\rho_{i0} - \bar{\rho}, M_{i0}, \nabla \phi_0)\|_{H^6(\mathbb{R}^3)}$ 充分小, 那么方程 (3.3) 的 Cauchy 问题存在经典解. 进一步, 如果初值还满足

$$|D_x^\alpha(\rho_{1,0} + \rho_{2,0} - 2\bar{\rho}, M_{1,0} + M_{2,0})| \leq C\varepsilon_0(1 + |x|^2)^{-r_1}, \quad r_1 \geq \frac{21}{10},$$

那么 Cauchy 问题的解满足以下逐点估计:

$$\begin{aligned} |\rho_1 + \rho_2 - 2\bar{\rho}| &\leq C\varepsilon_0(1+t)^{-2} \left\{ \left(1 + \frac{(|x| - ct)^2}{1+t} \right)^{-(\frac{3}{2}-\varepsilon)} + \left(1 + \frac{|x|^2}{1+t} \right)^{-(\frac{3}{2}-\varepsilon)} \right\}, \\ |M_1 + M_2| &\leq C\varepsilon_0(1+t)^{-2} \left(1 + \frac{(|x| - ct)^2}{1+t} \right)^{-(\frac{3}{2}-\varepsilon)} + C\varepsilon_0(1+t)^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{|x|^2}{1+t} \right)^{-(\frac{3}{2}-\varepsilon)}, \\ |\rho_1 - \rho_2| &\leq C\varepsilon_0(1+t)^{-2} \left(1 + \frac{|x|^2}{1+t} \right)^{-\frac{3}{2}}, \\ |M_1 - M_2| &\leq C\varepsilon_0(1+t)^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{|x|^2}{1+t} \right)^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

其中 $c := \sqrt{P'_i(\bar{\rho})}$, 并且可以推出

$$\begin{aligned} |(\rho_1 - \bar{\rho}, \rho_2 - \bar{\rho})| &\leq C\varepsilon_0(1+t)^{-2} \left\{ \left(1 + \frac{(|x| - ct)^2}{1+t} \right)^{-(\frac{3}{2}-\varepsilon)} + \left(1 + \frac{|x|^2}{1+t} \right)^{-(\frac{3}{2}-\varepsilon)} \right\}, \\ |(M_1, M_2)| &\leq C\varepsilon_0(1+t)^{-2} \left(1 + \frac{(|x| - ct)^2}{1+t} \right)^{-(\frac{3}{2}-\varepsilon)} + C\varepsilon_0(1+t)^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{|x|^2}{1+t} \right)^{-(\frac{3}{2}-\varepsilon)}. \end{aligned}$$

从以上定理可以看到双极情形不同于单极情形, 解又有了波的传播现象. 为什么会出现这样一种令人费解的现象呢? 即 Navier-Stokes 方程组的解表现出来的一般 Huygens 原理, 在单极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组没有了, 但到了双极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组, 这种一般的 Huygens 原理又会出现. 换句话说, 为什么方程组波的传播的这一双曲现象仅仅对单极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组看不到, 下面试图从数学上找到其原因.

回到方程组的线性化方程组的特征根来说明这一现象. 类似 Navier-Stokes 方程组, 将单极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组在常状态 $(\bar{\rho}, M) = (1, 0)$ 附近线性化, 得到常系数线性偏微分方程:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div} M = 0, \\ \partial_t M + c^2 \nabla \rho = \mu_1 \Delta M + \mu_2 \nabla \operatorname{div} M + \frac{\nabla}{\Delta} \rho. \end{cases} \quad (3.4)$$

注意这一线性偏微分方程较方程组 (2.7) 仅仅多了最后一项 $\frac{\nabla}{\Delta} \rho$. 就是这一带有非局部化算子的项极大改变了方程组的双曲特性. 如果联想到带阻尼项的 Euler 方程组也是因为阻尼项改变了 Euler 方程组的波的传播的双曲特性 (参见文献 [12]), 我们也就不会特别惊奇了.

对方程组 (3.4) 的变量 x 作 Fourier 变换, 解常微分方程可以得到其 Green 函数的 Fourier 变换的形式为

$$\hat{\mathbb{G}}(\xi, t) = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\lambda}_+ e^{\tilde{\lambda}_+ t} - \tilde{\lambda}_- e^{\tilde{\lambda}_- t}}{\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-} & -\sqrt{-1} c^2 \frac{e^{\tilde{\lambda}_+ t} - e^{\tilde{\lambda}_- t}}{\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-} \xi^\tau \\ -\sqrt{-1} (c^2 + |\xi|^2) \frac{e^{\tilde{\lambda}_+ t} - e^{\tilde{\lambda}_- t}}{\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-} \xi & \frac{\xi \xi^\tau}{|\xi|^2} \frac{\tilde{\lambda}_+ e^{\tilde{\lambda}_+ t} - \tilde{\lambda}_- e^{\tilde{\lambda}_- t}}{\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-} - e^{-\mu_1 |\xi|^2 t} (I - \frac{\xi \xi^\tau}{|\xi|^2}) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

其中 $\tilde{\lambda}_\pm(\xi) = \frac{-\mu |\xi|^2 \pm \sqrt{\mu^2 |\xi|^4 - 4(c^2 |\xi|^2 + 2)}}{2}$. 当 $|\xi| < \varepsilon_1$, $\tilde{\lambda}_\pm$ 可以表示为

$$\tilde{\lambda}_\pm = -\frac{\mu}{2} |\xi|^2 + \sum_{j=2}^{\infty} a_j |\xi|^{2j} \pm \sqrt{-1} \left(\sqrt{2} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j |\xi|^{2j} \right). \quad (3.6)$$

将 Navier-Stokes 方程组与单极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组进行比较, 在线性化的前提下就是比较 Green 函数. 而 Green 函数的大时间状态, 或者说解的主体的状态事实上是取决于其 Green 函数的低频部分, 也就是 $\hat{G}(\xi, t)$ 和 $\hat{\mathbb{G}}(\xi, t)$ 在 $\xi = 0$ 附近的 Taylor 展式. 故我们比较线性化的 Navier-Stokes 方程组与线性化的单极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组解的主体状态, 就只需比较 $\hat{G}(\xi, t)$ 与 $\hat{\mathbb{G}}(\xi, t)$ 在 $\xi = 0$ 附近的 Taylor 展式, 注意到其 Green 函数的主要不同是其特征根不同, 也就是比较 (2.9) 与 (3.6). 如果我们仔细比较这两个特征根在 $\xi = 0$ 附近的 Taylor 展式, 就会发现在 (2.9) 的虚部有 $\sqrt{-1} |\xi|$ 的项, 其 Green 函数中就有 $e^{\sqrt{-1} |\xi| t}$ 的因子, 这就是在第 2 节讲到的波算子. 有了波算子也就有了波的传播的 Huygens 原理. 但从 (3.6) 可以看出, 与单极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组情形不一样, (3.6) 的虚部没有形如 $\sqrt{-1} |\xi|$ 的一阶项, 仅仅有常数项和二次项及更高阶的项, 这些是色散算子的项, 不会产生波的传播, 当然就不会有一般 Huygens 原理.

最后看双极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组, 记 $n_1 = \rho_1 + \rho_2 - 2$, $n_2 = \rho_1 - \rho_2$, $w_1 = M_1 + M_2$, $w_2 = M_1 - M_2$, 则有

$$\begin{cases} \partial_t n_1 + \operatorname{div} w_1 = 0, \\ \partial_t w_1 - \mu_1 \Delta w_1 - \mu_2 \nabla \operatorname{div} w_1 + c^2 \nabla n_1 = F_1(n_1, w_1, n_2, w_2), \\ \partial_t n_2 + \operatorname{div} w_2 = 0, \\ \partial_t w_2 - \mu_1 \Delta w_2 - \mu_2 \nabla \operatorname{div} w_2 + c^2 \nabla n_2 - 2 \nabla \phi = F_2(n_1, w_1, n_2, w_2), \\ \Delta \phi = n_2, \\ (n_1, w_1, n_2, w_2, \nabla \phi)(x, 0) = (n_{1,0}, w_{1,0}, n_{2,0}, w_{2,0}, \nabla \phi_0)(x), \end{cases} \quad (3.7)$$

其中 $c^2 = P'_1(1) = P'_2(1) > 0$. 这时我们发现, 通过引进这样一组解的组合 $(n_1, n_2, w_1, w_2, \phi)$, 原方程组的线性部分已经解耦, 即前 4 个方程的线性部分完全就是关于 (n_1, w_1) 的方程组, 其形式完全等同

于 Navier-Stokes 方程组的线性部分; 而后 5 个方程的线性部分就是关于 (n_2, w_2, ϕ) 的方程组, 其形式完全等同于单极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组. 所以从线性部分看, 双极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组就是一个 Navier-Stokes 方程组, 再加上一个单极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组. 其 Green 函数也是一个解耦的形式, 其 Fourier 变换的形式为

$$\hat{\mathfrak{G}}(\xi, t) = \begin{pmatrix} \hat{G}(\xi, t) & 0 \\ 0 & \hat{\mathbb{G}}(\xi, t) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

这是一个 8×8 的分块对角矩阵, 其中 $\hat{G}(\xi, t)$ 和 $\hat{\mathbb{G}}(\xi, t)$ 是两个 4×4 矩阵, 分别在 (2.8) 和 (3.5) 中给出. 从 (3.8) 的 Green 函数可以看到, 就其线性部分而言, 双极的 Navier-Stokes-Poisson 方程组的解同时具有 Navier-Stokes 方程组和单极的 Navier-Stokes-Poisson 方程组的解的性质. 我们如果考虑的是初值附近的小扰动解, 那么其解是其线性化方程的解的扰动, 故双极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组尽管它的解的某些组合没有波的传播, 但整体看其解是有 Navier-Stokes 方程组的机制, 解会表现出一般的 Huygens 原理.

从线性化方程的特征根可以看到是否具有双曲方程波的传播现象以及解是否满足一般的 Huygens 原理, 但要证明这些“看到的结构”还有许多问题要解决. 例如, 如何控制在低频部分 Green 函数的其他因子或者项不影响希望得到的结构; 如何证明 Green 函数在带宽和高频部分具有指数级的衰减. 还有更困难的是非线性部分逐点估计, 这要契合线性和非线性部分的逐点结构, 这是一个非常技术和细致的证明过程.

事实上, 作者及其合作者从用 Green 函数“看到”解的正确结构到最后能够证明这一猜测, 用了很长一段时间. 这里至少有 3 个困难:

其一是双极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组由于椭圆结构形成的非局部化算子, 会对“一般 Huygens 波”的非线性波的估计带来困难, 而对单极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组, 因为仅仅有扩散波, 克服非局部算子产生的困难要相对简单一些.

其二是双极情形下的 Navier-Stokes-Poisson 方程组线性化后的方程组 (3.7) 的非线性项中不是所有的项均具有守恒结构 (即不能整体写成导函数形式). 具体写出方程组 (3.7) 的非线性项为

$$\begin{aligned} F_1 = & -\operatorname{div} \left(\frac{(w_1 + w_2) \otimes (w_1 + w_2)}{2(n_1 + n_2) + 4} + \frac{(w_1 - w_2) \otimes (w_1 - w_2)}{2(n_1 - n_2) + 4} \right) \\ & - \nabla \left(P_1 \left(\frac{n_1 + n_2}{2} + 1 \right) - c^2 \frac{n_1 + n_2}{2} + P_2 \left(\frac{n_1 - n_2}{2} + 1 \right) - c^2 \frac{n_1 - n_2}{2} \right) + n_2 \nabla \phi \\ & - \mu_1 \Delta \left(\frac{(n_1 - n_2)(w_1 - w_2)}{2(n_1 - n_2) + 4} + \frac{(n_1 + n_2)(w_1 + w_2)}{2(n_1 + n_2) + 4} \right) \\ & - \mu_2 \nabla \operatorname{div} \left(\frac{(n_1 - n_2)(w_1 - w_2)}{2(n_1 - n_2) + 4} + \frac{(n_1 + n_2)(w_1 + w_2)}{2(n_1 + n_2) + 4} \right), \\ F_2 = & -\operatorname{div} \left(\frac{(w_1 + w_2) \otimes (w_1 + w_2)}{2(n_1 + n_2) + 4} - \frac{(w_1 - w_2) \otimes (w_1 - w_2)}{2(n_1 - n_2) + 4} \right) \\ & - \nabla \left(P_1 \left(\frac{n_1 + n_2}{2} + 1 \right) - c^2 \frac{n_1 + n_2}{2} - P_2 \left(\frac{n_1 - n_2}{2} + 1 \right) + c^2 \frac{n_1 - n_2}{2} \right) + n_1 \nabla \phi \\ & - \mu_1 \Delta \left(\frac{(n_1 + n_2)(w_1 + w_2)}{2(n_1 + n_2) + 4} - \frac{(n_1 - n_2)(w_1 - w_2)}{2(n_1 - n_2) + 4} \right) \\ & - \mu_2 \nabla \operatorname{div} \left(\frac{(n_1 + n_2)(w_1 + w_2)}{2(n_1 + n_2) + 4} - \frac{(n_1 - n_2)(w_1 - w_2)}{2(n_1 - n_2) + 4} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

可以看到, 以上非线性项中, $n_2 \nabla \phi$ 和 $n_1 \nabla \phi$ 这两项没有守恒结构. 但是通过方程之间的关系有

$$n_2 \nabla \phi = \Delta \phi \nabla \phi = \operatorname{div} \left(\nabla \phi \otimes \nabla \phi - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 I_{3 \times 3} \right),$$

故这项也有了守恒结构. 但 $n_1 \nabla \phi$ 这项写不成类似形式, 即不具有守恒结构. 而没有守恒结构给非线性方程相应证明的完成带来很大的困难.

其三是电场的势函数 ϕ 的逐点估计的结构. 其他的未知函数, 如密度或者动量, 它们都会对应到 Green 函数矩阵中的某一项. 但势函数来自方程组中的椭圆部分, 它通过一个非局部化算子归并到密度或者动量的相关方程中. 它在 Green 函数矩阵中没有具体对应项, 它的影响散落在 Green 函数矩阵中的一些非局部化算子中. 势函数中到底是否具有扩散波或者是一般 Huygens 波, 这是一个需要在迷雾中摸索的问题.

这里简单地叙述这些技术上的困难是想说明, 用 Green 函数可以看到解的结构, 但真正完成证明还有大量的工作.

当然, 以上讨论还仅仅限于空间维数为 3 的情形, 当维数是大于 3 的奇数维情形应该有类似的结构. 但对于维数是 2 或者大于 2 的偶数维, 其波的结构会有很大不同, 会表现出类似于偶数维可压缩流的 Navier-Stokes 方程情形, 仅有较清晰的波的前阵面, 但没有清晰的后阵面. 它的解的形态应该类似于 (2.15). 注意这是基于其线性部分的 Green 函数结构的一个猜想, 其证明目前还是一个尚未解决的问题. 这里主要是因为偶数维情形一般 Huygens 波会表现出更复杂的情形, 再与前述的没有守恒结构和具有非局部化算子等问题交织在一起, 其非线性部分的证明将是一个十分困难的问题.

4 在双阻尼情形下解的衰减比较

阻尼也是一类耗散效应, 通常一个双曲方程加上阻尼效应会使得双曲方程不再有波的传播现象, 例如, 加上阻尼项的 Euler 方程组 (参见文献 [12]). 但阻尼会使得方程的解增加衰减性. 一般来讲, 增加阻尼项, 方程或者方程组带来更多的衰减效果, 但是对于多个方程耦合的方程组, 带两个阻尼项的方程组是否比其中一个阻尼去掉后有更好的衰减效果呢? 人们一般会认为, 应该有更好的衰减效果. 但在本节将介绍有可能多个阻尼项的方程组衰减得比带单个阻尼项的方程组还要慢. 这也是一个有趣的现象, 如何从数学上看清楚是本节关心的问题.

本节探讨了带两个阻尼项的 Timoshenko 梁方程组, 并从数学角度证明了 Timoshenko 梁方程组带两个阻尼项比带单个阻尼项的情形衰减还要慢. Timoshenko 梁理论是 20 世纪初美籍俄罗斯力学家 Timoshenko^[30] 提出并初步研究的弹性力学模型, 这一模型是对 1750 年左右提出的 Euler-Bernoulli 梁模型的又一补充. 这里不去展开考虑其方程的历史和形成, 仅仅考虑其在双曲方程组基础上, 阻尼结构对解的衰减的影响.

Timoshenko 梁方程组通过对常数的简化可以得到相应的 Cauchy 问题为

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x - \psi)_x = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ \psi_{tt} - a^2 \psi_{xx} - (\varphi_x - \psi) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)(0, x) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 $\varphi(t, x)$ 和 $\psi(t, x)$ 是未知函数, a 是一个实常数. 这是一个典型的线性双曲的方程组. 本文关心的

是在这一双曲方程组上加上阻尼项和非线性项的如下方程组:

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x - \psi)_x + \alpha\varphi_t = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ \psi_{tt} - a^2\psi_{xx} - (\varphi_x - \psi) + \mu\psi_t = |\psi|^r, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)(0, x) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.2)$$

其中 $\varphi(t, x)$ 是梁的横向位移, 而 $\psi(t, x)$ 是梁的旋转角度, 非负实数 α 和 μ 是阻尼系数, $r > 1$ 是非线性项的指数. 该方程组描述的是一个在横向位移和旋转角度都有阻尼效应的震动的梁, 以下称之为双阻尼半线性 Timoshenko 梁方程. 当 $\alpha = 0$ 时, 则是单阻尼的半线性 Timoshenko 梁方程. 对 $\alpha = 0$ 时的单阻尼的半线性 Timoshenko 梁方程, 在文献 [31] 中有深入的讨论. 对双阻尼半线性 Timoshenko 梁方程, 最近, 文献 [32, 33] 得到双阻尼半线性 Timoshenko 梁方程较单阻尼半线性 Timoshenko 梁方程有更差的衰减, 这是一个令人诧异的结果. 文献 [32] 用 Green 函数的方法从数学上对这一现象有深入分析. 首先, 列出文献 [32] 主要结果如下:

定理 4.1 对非线性指数 $r > 8$ 并且 $\alpha > 0, \mu > 0$, 若存在常数 $\delta_0 > 0$, 使得 Cauchy 问题 (4.2) 的初值的能量满足

$$E_0^2 = \|(\varphi_t, \varphi_x, \psi_t, \psi_x, \psi)(0, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|\psi(0, \cdot)\|_{L^1}^2 \leq \delta_0,$$

那么 Cauchy 问题 (4.2) 存在整体弱解, 并且其解对任意 $t > 0$ 满足

$$\|(\varphi_t, \varphi_x - \psi, \psi_t, \psi_x)(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq CE_0(1+t)^{-\frac{1}{4}},$$

其中常数 C 是与时间无关的常数. 如果 $\alpha = 0, \mu > 0$, 那么其相应 Cauchy 问题的解对任意 $t > 0$ 满足

$$\|(\varphi_t, \varphi_x - \psi, \psi_t, \psi_x)(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq CE_0(1+t)^{-\frac{1}{2}}.$$

注 4.1 当 $\alpha > 0$ 时, (4.2) 为双阻尼方程组, 这时解的 L^2 模的衰减为 $-\frac{1}{8}$ 阶; 但当 $\alpha = 0$ 时, (4.2) 为单阻尼方程组, 其解的衰减反而更快, 解的 L^2 模的衰减为 $-\frac{1}{4}$ 阶. 这与人们的常识是不一致的.

注 4.2 事实上, 文献 [33] 用能量估计方法讨论线性的双阻尼 Timoshenko 梁方程时就发现双阻尼比较单阻尼情形衰减会放慢, 并在一个注解中提出是否得到了最佳的衰减估计的疑惑. 本节的目的就是说明不是技术的原因, 确实双阻尼比较单阻尼情形衰减会放慢. 为什么会有这样一种现象, 我们用 Green 函数的方法从数学上给予解释.

注意方程组 (4.2) 是一个二阶方程组, 下面将其线性化, 并转化为一阶方程组. 令

$$U(t, x) = (\varphi_t, \varphi_x - \psi, \psi_t, a\psi_x)(t, x), \quad U_0(x) = (\varphi_t, \varphi_x - \psi, \psi_t, a\psi_x)(0, x),$$

那么方程组 (4.2) 的线性化部分就转化为以下一阶线性方程组:

$$\begin{cases} \partial_t U + A\partial_x U + B_\alpha U = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ U(0, x) = U_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.3)$$

其中 A 是一个实值对称矩阵, B_α 满足 $\operatorname{Re}(B_\alpha U, U) \geq 0$, 下标注明 α 是因为我们要特别关注 α 是否为零对方程组解的衰减的影响. 这两个矩阵具体表示为

$$A = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

类似于第 3 节的考虑, 对方程组的空间变量 x 作 Fourier 变换, 有

$$\begin{cases} \partial_t \hat{U} + A(\sqrt{-1}\xi)\hat{U} + B_\alpha \hat{U} = 0, & (t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ \hat{U}(0, \xi) = \hat{U}_0(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.5)$$

这是一个 4 阶的常微分方程, 记 $\Phi_\alpha(\xi) = -(\sqrt{-1}A + B_\alpha)$, 则 (4.4) 的解可以写为

$$\hat{U}(t, \xi) = e^{\Phi_\alpha(\xi)t} \hat{U}_0(\xi).$$

对上式作逆 Fourier 变换, 并记 $G(t, x) = \mathfrak{F}^{-1}(e^{\Phi_\alpha(\xi)t})$, 则 (4.3) 的解可以写为

$$U(t, x) = G(t, \cdot) * U_0(\cdot).$$

这里的 $G(t, x)$ 就是我们通常提到的 Green 函数. 但以上的 Green 函数或者它的 Fourier 变换

$$\hat{G}(t, x) = \mathfrak{F}(G(t, x)) = e^{\Phi_\alpha(\xi)t}$$

表示均为形式的, 为得到其相应的具体估计, 需要考虑其特征多项式 $F(\tau) = \det(\tau I + \sqrt{-1}\xi A + B_\alpha)$:

$$F(\tau) = \tau^4 + (\alpha + \mu)\tau^3 + (a^2\xi^2 + \xi^2 + \alpha\mu + 1)\tau^2 + (\alpha a^2\xi^2 + \mu\xi^2 + \alpha)\tau + a^2\xi^4.$$

令 $F(\tau) = 0$, 解其特征根就可以大致看到 Green 函数的状态. 但遗憾的是, 这是一个 4 次方程, 其特征根的显示表达十分复杂. 要看清解的衰减, 其实仅仅需要知道特征根在低频部分的估计. 转而求其次, 仅仅考虑在低频部分的特征根的表达. 注意到在 $F(\tau)$ 的表达式中可以看到仅仅出现 ξ^2 和 ξ^4 . 故可以认为 $\tau(t, \xi)$ 仅仅含有 ξ 的偶数次幂, 即特征根是 ξ^2 的函数. 设 τ 在 $\xi = 0$ 附近的 Taylor 展式是

$$\tau(\xi) = a_0 + a_1\xi^2 + a_2\xi^4 + O(\xi^6),$$

其中 a_j ($j = 0, 1, 2$) 是常数. 将上式代入 $F(\tau) = 0$, 有

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1\xi^2 + a_2\xi^4 + O(\xi^6))^4 + (\alpha + \mu)(a_0 + a_1\xi^2 + a_2\xi^4 + O(\xi^6))^3 \\ & + (a^2\xi^2 + \xi^2 + \alpha\mu + 1)(a_0 + a_1\xi^2 + a_2\xi^4 + O(\xi^6))^2 \\ & + (\alpha a^2\xi^2 + \mu\xi^2 + \alpha)(a_0 + a_1\xi^2 + a_2\xi^4 + O(\xi^6)) + a^2\xi^4 = 0. \end{aligned}$$

比较 ξ^2 同次幂的系数, 有

$$a_0^4 + (\alpha + \mu)a_0^3 + (\alpha\mu + 1)a_0^2 + \alpha a_0 = 0, \quad (4.6)$$

$$a_0(\alpha a^2 + \mu) + a_1\alpha + a_0^2(a^2 + 1) + 4a_0^3a_1 + 2a_0a_1(\alpha\mu + 1) + 3a_0^2a_1(\alpha + \mu) = 0, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & a_1(\alpha a^2 + \mu) + a_2\alpha + (a_1^2 + 2a_0a_2)(\alpha\mu + 1) + 4a_0^3a_2 + a^2 + 6a_0^2a_1^2 \\ & + 2a_0a_1(a^2 + 1) + 3a_0a_1^2\alpha + 3a_0^2a_2\alpha + 3a_0a_1^2\mu + 3a_0^2a_2\mu = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

解以上代数方程, 首先由 (4.6) 得到

$$a_0(a_0 + \alpha)(a_0^2 + \mu a_0 + 1) = 0.$$

那么 a_0 有 4 个根, 分别为

$$a_{0,1} = 0, \quad a_{0,2} = -\alpha, \quad a_{0,3} = -\frac{\mu}{2} + \frac{(\mu^2 - 4)^{1/2}}{2}, \quad a_{0,4} = -\frac{\mu}{2} - \frac{(\mu^2 - 4)^{1/2}}{2}.$$

前面已经将特征根 τ 在 $\xi = 0$ 附近展为 Taylor 展式, 将相对于第 l 个特征根的系数 a_j ($j = 0, 1, 2$) 记为 $a_{j,l}$, 则可相应写 4 个特征根分别为

$$\tau_j(\xi) = a_{0,j} + a_{1,j}\xi^2 + a_{2,j}\xi^4 + O(\xi^6), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

当 $|\xi| \leq \varepsilon$ 时, τ_2 、 τ_3 和 τ_4 均为负数, 故其相应的 Green 函数的项均为指数级衰减. 而显然 τ_1 代表的 Green 函数部分是解的主要部分. 下面主要讨论 τ_1 , 首先由 (4.7) 得到

$$a_1 = \frac{-a_0[\alpha a^2 + \mu + a_0(a^2 + 1)]}{\alpha + 4a_0^3 + 2a_0\alpha\mu + 2a_0(\alpha\mu + 1) + 3a_0^2(\alpha + \mu)}.$$

将 $a_0 = 0$ 代入上式, 就有 $a_1 = 0$. 再将 $a_0 = 0$ 和 $a_1 = 0$ 代入 (4.8), 有 $a_2\alpha + a^2 = 0$. 于是, $a_2 = -\frac{a^2}{\alpha}$. 基于前面讨论, 我们有

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0 + 0 - \frac{a^2}{\alpha}\xi^4 + O(\xi^6), \\ \tau_2 &= -\alpha + \frac{\alpha - \mu}{\alpha^2 - \mu\alpha + 1}\xi^2 + a_{2,2}\xi^4 + O(\xi^6), \\ \tau_3 &= -\frac{\mu}{2} + \frac{(\mu^2 - 4)^{1/2}}{2} + a_{1,3}\xi^2 + a_{2,3}\xi^4 + O(\xi^6), \\ \tau_4 &= -\frac{\mu}{2} - \frac{(\mu^2 - 4)^{1/2}}{2} + a_{1,4}\xi^2 + a_{2,4}\xi^4 + O(\xi^6). \end{aligned} \quad (4.9)$$

令 $\chi_1(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$, 并且当 $|\xi| \leq \varepsilon$ 时为 1, 当 $|\xi| \geq 2\varepsilon$ 时为 0. 如果承认低频时 Green 函数主要是由其特征根确定其主体形态, 那么可以得到其 Green 函数的 Fourier 变换形式在 ξ 充分小时的渐近状态:

定理 4.2^[32] 存在常数 $c > 0$, 使得

$$|\chi_1(\xi)e^{t\hat{\Phi}_\alpha(i\xi)}| \sim e^{-c\xi^4 t}.$$

注意到以上表达式, 显然不能从 (4.9) 直接得到 $\alpha = 0$ 时 Green 函数的 Fourier 变换形式在 ξ 充分小时的渐近状态, 但可以用类似的方法讨论. 事实上, 记 $\alpha = 0$ 时相应的特征根为 $\tilde{\tau}(\xi)$, 在 $|\xi| = 0$ 附近记其 Taylor 展式为

$$\tilde{\tau} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\xi^2 + \tilde{a}_2\xi^4 + O(\xi^6),$$

那么还是从 (4.6)–(4.8) 可以得到

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0^4 + (\alpha + \mu)\tilde{a}_0^3 + (\alpha\mu + 1)\tilde{a}_0^2 + \alpha\tilde{a}_0 &= 0, \\ \tilde{a}_0(\alpha a^2 + \mu) + \tilde{a}_1\alpha + \tilde{a}_0^2(a^2 + 1) + 4\tilde{a}_0^3\tilde{a}_1 + 2\tilde{a}_0\tilde{a}_1(\alpha\mu + 1) + 3\tilde{a}_0^2\tilde{a}_1(\alpha + \mu) &= 0, \\ \tilde{a}_1(\alpha a^2 + \mu) + \tilde{a}_2\alpha + (\tilde{a}_1^2 + 2\tilde{a}_0\tilde{a}_2)(\alpha\mu + 1) + 4\tilde{a}_0^3\tilde{a}_2 + a^2 + 6\tilde{a}_0^2\tilde{a}_1^2 \\ + 2\tilde{a}_0\tilde{a}_1(a^2 + 1) + 3\tilde{a}_0\tilde{a}_1^2\alpha + 3\tilde{a}_0^2\tilde{a}_2\alpha + 3\tilde{a}_0\tilde{a}_1^2\mu + 3\tilde{a}_0^2\tilde{a}_2\mu &= 0. \end{aligned}$$

上式中令 $\alpha = 0$, 特征根在 $|\xi| = 0$ 附近的 Taylor 展式的系数可以通过以下方程解得:

$$\tilde{a}_0^4 + \mu\tilde{a}_0^3 + \tilde{a}_0^2 = 0, \quad (4.10)$$

$$\tilde{a}_0\mu + \tilde{a}_0^2(a^2 + 1) + 4\tilde{a}_0^3\tilde{a}_1 + 2\tilde{a}_0\tilde{a}_1 + 3\tilde{a}_0^2\tilde{a}_1\mu = 0, \quad (4.11)$$

$$\tilde{a}_1\mu + (\tilde{a}_1^2 + 2\tilde{a}_0\tilde{a}_2) + 4\tilde{a}_0^3\tilde{a}_2 + a^2 + 6\tilde{a}_0^2\tilde{a}_1^2 + 2\tilde{a}_0\tilde{a}_1(\tilde{a}_2 + 1) + 3\tilde{a}_0\tilde{a}_1^2\mu + 3\tilde{a}_0^2\tilde{a}_2\mu = 0. \quad (4.12)$$

从 (4.10) 得到相应的 3 个根为

$$\tilde{a}_0 = 0, \quad \tilde{a}_0 = -\frac{\mu}{2} + \frac{(\mu^2 - 4)^{1/2}}{2}, \quad \tilde{a}_0 = -\frac{\mu}{2} - \frac{(\mu^2 - 4)^{1/2}}{2}.$$

当 $\tilde{a}_0 = 0$ 时, 从 (4.11) 得到对任何 $\tilde{a}_1$ 均满足 (4.10), 但是从 (4.12), 有

$$\tilde{a}_1\mu + \tilde{a}_1^2 + a^2 = 0. \quad (4.13)$$

因此, 如果 $\tilde{a}_0 = 0$, 那么有 $\tilde{a}_1 = -\frac{\mu}{2} + \frac{(\mu^2 - 4a^2)^{1/2}}{2}$, 或者 $\tilde{a}_1 = -\frac{\mu}{2} - \frac{(\mu^2 - 4a^2)^{1/2}}{2}$. 于是得到

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_1 &= 0 - \left(\frac{\mu}{2} + \frac{(\mu^2 - 4a^2)^{1/2}}{2} \right) \xi^2 + \tilde{a}_{2,1}\xi^4 + O(\xi^6), \\ \tilde{\tau}_2 &= 0 - \left(\frac{\mu}{2} - \frac{(\mu^2 - 4a^2)^{1/2}}{2} \right) \xi^2 + \tilde{a}_{2,2}\xi^4 + O(\xi^6), \\ \tilde{\tau}_3 &= -\frac{\mu}{2} + \frac{(\mu^2 - 4)^{1/2}}{2} + \tilde{a}_{1,3}\xi^2 + \tilde{a}_{2,3}\xi^4 + O(\xi^6), \\ \tilde{\tau}_4 &= -\frac{\mu}{2} - \frac{(\mu^2 - 4)^{1/2}}{2} + \tilde{a}_{1,4}\xi^2 + \tilde{a}_{2,4}\xi^4 + O(\xi^6). \end{aligned} \quad (4.14)$$

类似于定理 4.2, 我们得到其 Green 函数的 Fourier 变换形式在 ξ 充分小时的渐近状态:

定理 4.3 存在常数 $c > 0$, 使得 $|\chi_1(\xi)e^{t\hat{\Phi}(\mathrm{i}\xi)}| \sim e^{-c\xi^2 t}$.

下面解释如何从定理 4.2 和 4.3 得到定理 4.1. 事实上, 由前面讨论知, 方程组的线性部分的解可以表示为 $U(t, x) = G(t, \cdot) * U_0(\cdot)$, 那么 $\|U(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \|G(t, \cdot)\|_{L^2} \|U_0(\cdot)\|_{L^1} \leq C \|\hat{G}(t, \cdot)\|_{L^2}$. 注意到, 若对以上模的估计归结于形如定理 4.2 或者定理 4.3 右端的函数的估计, 则对于双阻尼情形, 由定理 4.2, 可得

$$\|\chi_1 \hat{G}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\chi_1(\xi)e^{t\hat{\Phi}(\mathrm{i}\xi)}|^2 d\xi \sim \int_{\mathbb{R}} e^{-2c\xi^2 t} d\xi = Ct^{-1/4}.$$

而对单阻尼情形, 由定理 4.3, 有 $\|\chi_1 \hat{G}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\chi_1(\xi)e^{t\hat{\Phi}(\mathrm{i}\xi)}|^2 d\xi \sim \int_{\mathbb{R}} e^{-2c\xi^2 t} d\xi = Ct^{-1/2}$. 注意这仅是对 Green 函数低频的估计, 对余下的带宽 (即 $\epsilon \leq |\xi| \leq M$) 和高频部分 (即 $|\xi| \geq M$) 还需要讨论. 但可以证明 Green 函数余下的部分对时间 t 均是指数级衰减, 所以, 低频部分确定了其 Green 函数的衰减率. 同时, 由于我们讨论的是小扰动解, 可以期望相应的非线性方程的解的衰减率和其线性部分的 Green 函数的衰减率一致. 当然, 这些具体的证明还是相当技术性的, 有兴趣的读者可参见文献 [32].

无独有偶, 类似的情形在其他方程组也会出现. 如果考虑一维双阻尼半线性热弹性 Timoshenko 梁方程组:

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x - \psi)_x + \alpha\varphi_t = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ \psi_{tt} - a^2\psi_{xx} - (\varphi_x - \psi) + \mu\psi_t + \beta\theta_x = |\psi|^r, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ \theta_t - \theta_{xx} + \beta\psi_{tx} = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \theta)(0, x) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.15)$$

则也会得到类似于定理 4.1 的结果. 当 $\alpha = 0$ 时, 也就是两个阻尼项变成一个阻尼项时, 方程组解的衰减反而加快. 因为 (4.15) 较 (4.2) 多一个抛物方程, 其相应的讨论也会增加一些技术上的困难, 有关这一方程组的讨论可以参见文献 [34, 35].

从特征根看到解的衰减率是一个便捷有效的办法. 但为什么两个阻尼项比一个阻尼项反而使得解的衰减率减少, 原因就在于矩阵 A 和 B_α 的结构 (见 (4.4)). 如果两个矩阵 A 和 B_α 均为对角的, 那么含两个阻尼项的方程解的衰减率一定大于等于含一个阻尼项方程解的衰减率. 不是对角的情形, 未知函数互相耦合在一起, 情况就复杂了, 只有通过求特征根, 将方程组解耦, 或者说将线性方程组对角化才可以看清楚.

参考文献

- 1 齐民友. 现代偏微分算子引论. 北京: 科学出版社, 1986
- 2 齐民友, 徐超江, 王维克. 现代偏微分方程引论. 武汉: 武汉大学出版社, 1994
- 3 Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators, I, II, III. Pseudo-Differential Operators. Berlin: Springer, 2007
- 4 Bahouri H, Chemin J Y, Danchin R. Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 343. Heidelberg-Dordrecht-London-New York: Springer, 2011
- 5 Caffarelli L, Vasseur A. Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation. Ann of Math (2), 2010, 171: 1903–1930
- 6 Córdoba A, Córdoba D. A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations. Comm Math Phys, 2004, 249: 511–528
- 7 Constantin P, Vicol V. Nonlinear maximum principles for dissipative linear nonlocal operators and applications. Geom Funct Anal, 2012, 22: 1289–1321
- 8 Constantin P, Tarfulea A, Vicol V. Long time dynamics of forced critical SQG. Comm Math Phys, 2015, 335: 93–141
- 9 Kiselev A, Nazarov F, Volberg A. Global well-posedness for the critical 2D dissipative quasi-geostrophic equation. Invent Math, 2007, 167: 445–453
- 10 Liu T P. Pointwise convergence to shock waves for viscous conservation laws. Comm Pure Appl Math, 1997, 50: 1113–1182
- 11 Liu T P, Wang W. The pointwise estimates of diffusion wave for the Navier-Stokes systems in odd multi-dimensions. Comm Math Phys, 1998, 196: 145–173
- 12 Wang W, Yang T. The pointwise estimates of solutions for Euler equations with damping in multi-dimensions. J Differential Equations, 2001, 173: 410–450
- 13 Liu T P, Yu S H. The Green's function and large-time behavior of solutions for the one-dimensional Boltzmann equation. Comm Pure Appl Math, 2004, 57: 1543–1608
- 14 Liu T P, Yu S H. Initial-boundary value problem for one-dimensional wave solutions of the Boltzmann equation. Comm Pure Appl Math, 2007, 60: 295–356
- 15 Liu T P, Yu S H. Green's function of Boltzmann equation, 3-D waves. Bull Inst Math Acad Sin (NS), 2006, 1: 1–78
- 16 Liu T P, Yu S H. Solving Boltzmann equation, part I: Green's function. Bull Inst Math Acad Sin (NS), 2011, 6: 115–243
- 17 Liu T P, Yu S H. Dirichlet-Neumann kernel for hyperbolic-dissipative system in half space. Bull Inst Math Acad Sin (NS), 2012, 4: 477–543
- 18 Wu Z, Wang W. Pointwise estimates for bipolar compressible Navier-Stokes-Poisson system in dimension three. Arch Ration Mech Anal, 2017, 226: 587–638
- 19 Wang W K. Nonlinear evolution systems and Green's function. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2010, 30: 2051–2063
- 20 Kawashima S. System of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics. PhD Thesis. Kyoto: Kyoto University, 1983
- 21 Shizuta Y, Kawashima S. Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation. Hokkaido Math J, 1985, 14: 249–275
- 22 Evans L C. Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19. Providence: Amer Math Soc, 1998
- 23 Wang W K, Xu H M. Pointwise estimate of solutions of isentropic Navier-Stokes equations in even multi-dimensions. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2001, 21: 417–427

- 24 Wang W, Yang X. The pointwise estimates of solutions to the isentropic Navier-Stokes equations in even space-dimensions. *J Hyperbolic Differ Equ*, 2005, 02: 673–695
- 25 Li H L, Matsumura A, Zhang G. Optimal decay rate of the compressible Navier-Stokes-Poisson system in $\mathbb{R}^3$. *Arch Ration Mech Anal*, 2010, 196: 681–713
- 26 Li H L, Yang T, Zou C. Time asymptotic behavior of the bipolar Navier-Stokes-Poisson system. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed*, 2009, 29: 1721–1736
- 27 Li H L, Zhang T. Large time behavior of solutions to 3D compressible Navier-Stokes-Poisson system. *Sci China Math*, 2012, 55: 159–177
- 28 Wang W, Wu Z. Pointwise estimates of solution for the Navier-Stokes-Poisson equations in multi-dimensions. *J Differential Equations*, 2010, 248: 1617–1636
- 29 Wu Z, Wang W. Pointwise estimates of solution for non-isentropic Navier-Stokes-Poisson equations in multi-dimensions. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed*, 2012, 32: 1681–1702
- 30 Timoshenko S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 1921, 41: 744–746
- 31 Ide K, Haramoto K, Kawashima S. Decay property of regularity-loss type for dissipative Timoshenko system. *Math Models Methods Appl Sci*, 2008, 18: 647–667
- 32 Racke R, Wang W, Xue R. Optimal decay rates and global existence for a semilinear Timoshenko system with two damping effects. *Math Methods Appl Sci*, 2017, 40: 210–222
- 33 Soufyane A, Said-Houari B. The effect of the wave speeds and the frictional damping terms on the decay rate of the Bresse system. *Evol Equ Control Theory*, 2014, 3: 713–738
- 34 Muñoz Rivera J E, Racke R. Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems—global existence and exponential stability. *J Math Anal Appl*, 2002, 276: 248–278
- 35 Said-Houari B, Kasimov A. Damping by heat conduction in the Timoshenko system: Fourier and Cattaneo are the same. *J Differential Equations*, 2013, 255: 611–632

Green’s function and large time behavior of solutions for nonlinear evolution systems

Weike Wang

Abstract This paper studies pointwise estimates of solutions to initial value problems of large time behavior of nonlinear evolution equations in small perturbation cases by using the Green function method. Introducing the basic idea of Green function, this paper will exemplify under hyperbolic, parabolic and nonlinear mechanisms, how Green function helps the solutions to initial value problems of dissipative and hyperbolic structured nonlinear evolution equations sort out various mechanisms, find out fine structures, and figure out some amazing phenomena with which other methods could not deliver a clear explanation.

Keywords pointwise estimate, hyperbolic mechanism, generalized Huygens’ principle, damping mechanism, decay rate

MSC(2010) 35S05, 35S10, 35B40

doi: 10.1360/N012018-00069