关于 k -Hessian 方程解的局部性质

献给齐民友教授 90 华诞

王琦^{1*}, 田谷基², 徐超江³

1. 中南财经政法大学统计与数学学院, 武汉 430073;

2. 中国科学院武汉物理与数学研究所, 武汉 430071;

3. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072

E-mail: qiwang88@znufe.edu.cn, tianguji@wipm.ac.cn, chao-jiang.xu@univ-rouen.fr

收稿日期: 2018-04-02; 接受日期: 2018-07-26; 网络出版日期: 2018-12-29; * 通信作者

摘要 本文介绍了 k -Hessian 算子关于 $(k-1)$ -凸可允许解的椭圆性和退化的 k -Hessian 方程严格凸的局部解. 首先分析了 k -Hessian 算子的椭圆性, 特别是 $(k-1)$ -凸可允许解的椭圆性. 借助对该情形下椭圆性的分析, 本文给出了一个 k -Hessian 算子的分类. 利用这个分类, 本文构造了退化 k -Hessian 方程严格凸的局部解.

关键词 局部解 椭圆性 严格凸性

MSC (2010) 主题分类 35J60, 35J70

1 引言

我们在椭圆框架下研究如下形式的 k -Hessian 方程:

$$S_k[u] = f(x, u, Du), \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开区域, $2 \leq k \leq n$. 对于光滑函数 $u \in C^2(\Omega)$, k -Hessian 算子 S_k 可定义为

$$S_k[u] = S_k(D^2u) = \sigma_k(\lambda(D^2u)) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k},$$

其中 $\lambda(D^2u) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 是 k -Hessian 矩阵 (D^2u) 的特征值, $\sigma_k(\lambda)$ 是 k 阶基本对称多项式. $S_k[u]$ 的另一个等价定义是 Hessian 矩阵 (D^2u) 的所有 k 阶主子式的和. 当 $k=1$ 时, 方程 (1.1) 为 Poisson 方程; 而 $k=n$ 时, 方程 (1.1) 为 Monge-Ampère 方程

$$S_n[u] = \det D^2u = f(x, u, Du), \quad x \in \Omega. \quad (1.2)$$

英文引用格式: Wang Q, Tian G J, Xu C J. On the local properties of the solutions to k -Hessian equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 235–248, doi: 10.1360/N012018-00078

由于方程 (1.1) 是一个完全非线性的二阶偏微分方程, 其椭圆性并不直观. 现在我们给出二阶偏微分方程椭圆性的定义 (参见文献 [1]). 定义在 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 上的二阶偏微分方程一般形式为

$$F[u] = F[x, u, Du, D^2u] = 0, \quad (1.3)$$

其中 F 是定义在集合 $\Xi = \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$ 的实函数, $\mathbb{R}^{n \times n}$ 是 $n \times n$ 的对称矩阵全体. Ξ 中的点通常表示为 $\gamma = (x, z, p, r)$, 其中 $x \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 令

$$\mathcal{U} = \left\{ \gamma \in \Xi : \left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(\gamma) \right)_{n \times n} \text{ 是正定的} \right\}, \quad (1.4)$$

我们称算子 $F[\cdot]$ 在 $\mathcal{U}$ 内是椭圆的. 记矩阵 $(F_{ij}(\gamma))$ 的最小和最大特征值分别为 λ 和 Λ , 如果在 $\mathcal{U}$ 上 Λ/λ 或者 $(1/\lambda)$ 是有界的, 则称 F 在 $\mathcal{U}$ 内是一致椭圆的 (严格椭圆的). 如果 $u \in C^2(\Omega)$, 且 $F[\cdot]$ 在某一点 $x \in \Omega$ 是椭圆的, 则称 $F[\cdot]$ 关于 u 在 x 处是椭圆的, 注意到在某一点处 F 是椭圆的、严格椭圆的或一致椭圆的, 均是等价的.

如果 $u \in C^2(\Omega)$ 且矩阵 $(F_{ij}(\gamma))_{n \times n}$ 半正定, 即存在某个 $x \in \Omega$, 使得 $(F_{ij}(\gamma))_{n \times n}$ 的某个特征值为 0, 则称算子 $F[\cdot]$ 在 x 处是退化椭圆的, 称该算子为退化椭圆算子. 如果 $F[\cdot]$ 关于 u 在 x 处是椭圆的, 则称 $F[\cdot]$ 关于 u 在 x 处是一致椭圆的, 对应的算子为一致椭圆算子. 为了保证 k -Hessian 方程 (1.1) 是一个椭圆型方程, 下面引入 k -凸的定义 (参见文献 [2]).

定义 1.1 若一个函数 $u \in C^2(\Omega) \cup C^0(\bar{\Omega})$ 满足 $\lambda(D^2u) \in \bar{\Gamma}_k$, 则称 u 是 k -允许的, 或者 k -凸的; 如果 $\lambda(D^2u) \in \Gamma_k$, 则称 u 是严格 k -凸的, 其中 Γ_k 是 $\mathbb{R}^n$ 中顶点在原点的开对称凸锥, 其定义如下:

$$\Gamma_k = \{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \sigma_j(\lambda) > 0, \forall j = 1, \dots, k \},$$

这里 σ_k 如 (1.1) 中的定义. 同时, 它可以有如下形式:

$$\Gamma_k = \{ \lambda \in \mathbb{R}^n : 0 < \sigma_k(\lambda) \leq \sigma_k(\lambda + \eta), \forall \eta_i \geq 0 \},$$

这里 η_i 是 η 的分量.

人们通常称 Γ_k 为 Gårding 锥 (参见文献 [2] 第一部分). 特别地, 严格 n -凸函数即通常的严格凸函数.

目前大家熟知的结果是, 若 u 是 k -凸的, 则 $S_k[u] = f$ 是 (可能退化的) 椭圆型方程; 若 u 是严格 k -凸的, 则 $S_k[u] = f$ 是椭圆型方程. 据此, 我们有如下定义:

定义 1.2 如果 $u \in C^2(\Omega)$ 满足 (1.3), 且 $(x, u, Du, D^2u) \in \mathcal{U}$, 那么称 u 为可允许解 (admissible solution), $\mathcal{U}$ 如 (1.4) 中的定义, 称 $\mathcal{U}$ 为可允许集 (admissible set).

通常, u 本身可以决定 Du 和 D^2u , 同时, Ω 通常也是预先取定的, 在不引起混淆的前提下, 我们会去掉 (x, p, r) 这些分量来讨论允许集. 例如, 如果考虑方程 (1.2), 其对应的可允许集为

$$\mathcal{U}_n = \{ u \in C^2(\Omega) : \lambda(D^2u) \in \Gamma_n(n) \},$$

不难发现, 对于上述的 $\mathcal{U}_n$, $u \in \mathcal{U}_n$ 等价于 u 严格凸. 类似地, 对于方程 (1.1), 可允许集为

$$\mathcal{U}_k = \{ u \in C^2(\Omega) : \lambda(D^2u) \in \Gamma_k(n) \}.$$

对于退化的 k -Hessian 方程 (1.1), 相应的可允许集为

$$\bar{\mathcal{U}}_k = \{ u \in C^2(\Omega) : \lambda(D^2u) \in \bar{\Gamma}_k(n) \},$$

其中 $\bar{\Gamma}_k$ 是 Γ_k 的闭包, $\bar{\Gamma}_k = \Gamma_k(n) \cup \partial\bar{\Gamma}_k(n)$,

$$\partial\Gamma_k(n) = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \sigma_j(\lambda) \geq 0, \sigma_k(\lambda) = 0, 1 \leq j \leq k-1\}.$$

对于 Monge-Ampère 方程来说, 在 u 处, $S_k[\cdot]$ 是退化椭圆算子等价于 $f \geq 0$, 所以, 人们通常在 $f \geq 0$ 的前提下讨论算子 $S_k[u]$ 的退化椭圆性质. Ivochkina 等^[3]指出, 与 $S_n[\cdot]$ 算子不同的是, $S_k[\cdot]$ ($2 \leq k < n$) 是否为椭圆算子与 f 的符号无关. 换言之, $f(x) < 0$ 或者 $f(x) = 0$, 算子 $S_k[\cdot]$ 都有可能是一致椭圆或者是退化椭圆的. 解释这种现象通常的办法是构造一个二阶多项式 u , 使得 $S_k[u] \equiv 0$ 或者 $S_k[u] \equiv c < 0$. 这样的做法固然正确, 但只能解释一些零星的现象, 我们希望在 $(k-1)$ -凸可允许解的前提下, 找到算子 $S_k[\cdot]$ 是否为 (退化) 椭圆的充分必要条件.

为了表达我们的主要结果, 先引进几个记号. 由于 (D^2u) 和 $(\frac{\partial S_k}{\partial r_{ij}})_{n \times n}$ 可以由相同的初等变换完成对角化, 即对固定的 $x_0 \in \Omega$, 存在正交矩阵 $Q = Q(x_0)$, 使得

$$Q^T(D^2u)_{n \times n}Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad Q^T\left(\frac{\partial S_k}{\partial r_{ij}}\right)_{n \times n}Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_k(\lambda)}{\partial \lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial S_k(\lambda)}{\partial \lambda_n} \end{pmatrix},$$

对任意 m 元数组 $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, 定义

$$\sigma_{k; i_1 i_2 \dots i_m}(\lambda) = \frac{\partial^m \sigma_{k+m}(\lambda)}{\partial \lambda_{i_1} \dots \partial \lambda_{i_m}},$$

那么, 对于任意 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有

$$\sigma_k(\lambda) = \lambda_i \sigma_{k-1; i}(\lambda) + \sigma_{k; i}(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

k -Hessian 方程有很多分支, Γ_k 是其中一个包含正锥的分支, 不加以限定的情形下,

$$\sigma_{k-1; i}(\lambda) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \lambda = \lambda(D^2u)$$

也可以使得 k -Hessian 算子为退化椭圆算子^[4]. 本文的目的是在 $(k-1)$ -凸可允许解的前提下, 找到算子 $S_k[\cdot]$ 是否为 (退化) 椭圆的充分必要条件. 接下来, 在保证方程解 u 为 $(k-1)$ -凸可允许解的前提下, k -Hessian 算子关于 $u \in C^2(\Omega)$ 是退化椭圆的充分必要条件是

$$\sigma_{k-1; i}(\lambda) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \lambda = \lambda(D^2u).$$

由恒等式 $\sum_{i=1}^n \sigma_{k-1; i}(\lambda) = (n-k+1)\sigma_{k-1}(\lambda)$ 知, k -Hessian 算子关于 $u \in C^2(\Omega)$ 是椭圆的必要条件是

$$\sigma_{k-1}(\lambda) > 0, \quad \lambda = \lambda(D^2u).$$

我们的目的是研究 k -Hessian 算子关于 $(k-1)$ -可允许解的椭圆性 (参见文献 [5]), 由于 $S_k[u]$ 关于严格的 k -可允许解是椭圆的, 我们只需讨论 $\lambda(D^2u) \in \Gamma_{k-1} \setminus \Gamma_k$ 的情形. 首先从 $\Gamma_{k-1} \cap \partial\Gamma_k$ 入手, $2 \leq k \leq n$, 记

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \{\lambda \in \partial\Gamma_k(n) \cap \Gamma_{k-1} : \sigma_j(\lambda) > 0, \sigma_k(\lambda) = 0, \sigma_{k+1}(\lambda) = 0, 1 \leq j \leq k-1\}, \\ \mathbf{P}_2 &= \{\lambda \in \partial\Gamma_k(n) \cap \Gamma_{k-1} : \sigma_j(\lambda) > 0, \sigma_k(\lambda) = 0, \sigma_{k+1}(\lambda) < 0, 1 \leq j \leq k-1\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

观察上述定义, 不难发现, 当 $k = 1$ 时,

$$\mathbf{P}_1 = \{0\}, \quad \mathbf{P}_2 = \left\{ \lambda \in \Gamma_1 : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0, \sigma_2(\lambda) < 0 \right\}.$$

另一方面, 如果 $k = n$, 则

$$\mathbf{P}_1 = \{\lambda \in \Gamma_{n-1} : \sigma_n(\lambda) = 0\}, \quad \mathbf{P}_2 = \emptyset,$$

故我们无需分析这一情形.

由以上记号,

$$\Gamma_{k-1}(n) \cap \partial\Gamma_k(n) = \mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2, \quad \mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2 = \emptyset.$$

特别地, Tian 等^[6] 证明了

$$\mathbf{P}_2 \neq \emptyset, \quad 1 \leq k < n. \quad (1.6)$$

我们的主要结果是如下定理:

定理 1.1 设 $u \in C^2$ 是方程 (1.1) 的 $(k-1)$ -凸可允许解, 即 $\lambda(D^2u) \in \Gamma_{k-1}(n)$.

(1) 设 $\lambda(D^2u(x)) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, 则 k -Hessian 算子 $S_k[\cdot]$ 关于 u 在 x 处是一致椭圆 (退化椭圆) 的充分必要条件是

$$\sigma_{k-1;1}(\lambda) > 0 \quad (\sigma_{k-1;1}(\lambda) = 0).$$

(2) 当 $\lambda(D^2u(x)) \in \mathbf{P}_1$ 时, $S_k[\cdot]$ 关于 u 在 x 处是退化椭圆的; 当 $\lambda(D^2u(x)) \in \mathbf{P}_2$ 时, $S_k[\cdot]$ 关于 u 在 x 处是一致椭圆的.

(3) (i) 存在 $\lambda(D^2u(x)) \in \Gamma_{k-1}(n) \setminus \bar{\Gamma}_k(n)$, 使得 $S_k[\cdot]$ 关于 u 在 x 处是一致椭圆的, 即 $\sigma_{k-1;1}(\lambda) > 0$;

(ii) 存在 $\lambda(D^2u(x)) \in \Gamma_{k-1}(n) \setminus \bar{\Gamma}_k(n)$, 使得 $S_k[\cdot]$ 关于 u 在 x 处是退化椭圆的, 即 $\sigma_{k-1;1}(\lambda) = 0$, $\sigma_{k-1;n}(\lambda) > 0$;

(iii) 存在 $\lambda(D^2u(x)) \in \Gamma_{k-1}(n) \setminus \bar{\Gamma}_k(n)$, 使得 $S_k[\cdot]$ 关于 u 在 x 处是混合型的, 即

$$\sigma_{k-1;1}(\lambda) < 0, \quad \sigma_{k-1;n}(\lambda) > 0.$$

当 $\lambda \in \Gamma_k(n)$ 时, 定理 1.1(1) 的结论是熟知的, 因为当 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ 时,

$$0 < \sigma_{k-1;1}(\lambda) \leq \sigma_{k-1;2}(\lambda) \leq \dots \leq \sigma_{k-1;n}(\lambda), \quad \forall \lambda \in \Gamma_k(n). \quad (1.7)$$

当 $\lambda \in \Gamma_{k-1}$ 时, 一般来说 (1.7) 不成立.

关于方程 (1.1) 解的凸性研究是几何分析中的重要问题. 例如, 在研究 Christoffel-Minkowski 问题^[7-9] 时, 一个重要的目的就是证明预定适当阶次面积测度凸体的存在性, 它等价于证明关于单位球面上某个 k -Hessian 类方程的常秩定理 (constant rank theorem). 椭圆和抛物方程解的凸性与 Brunn-Minkowski 类不等式有很强的关联 (参见文献 [10-13]). 这些文献研究的是方程 (1.1) 在 $k = 2, n = 3, f = 1$ 的情形下, Dirichlet 问题解的凸性阶数. 此外, 关于 $k = 2$ 且 $n = 3$ 时 Hessian 方程的特征值问题, 其解的 log-凸性已经有很好的结果, 参见文献 [11-13]. 以上凸性结果基于两个事实: 一是方程是椭圆的, 二是经典 (至少 C^2) 解已经存在. 但是, 与很多重要的几何问题^[14] 相关联的 k -Hessian 方程均是退化椭圆的. 相比一致椭圆型, 退化的 k -Hessian 方程 Dirichlet 问题的解通常仅有 $C^{1,1}$ 正则性 (参见文献 [15]), 所以转而研究局部解的凸性.

不妨回顾严格凸函数的定义: 给定凸区域 E , 如果

$$v(ty + (1-t)z) < t, \quad v(y) + (1-t)v(z), \quad 0 < t < 1, \quad y, z \in E, \quad y \neq z$$

成立, 则称函数 $v \in C(E)$ 是严格凸的. 当 $v \in C^2(E)$ 时, 该不等式等价于

$$\sum_{i,j=1}^n (y_i - z_i)(y_j - z_j) \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x(s, \mu)) d\mu ds > 0,$$

其中 $x(s, \mu) = (s\mu + (1-s)t)y + (s(1-\mu) + (1-s)(1-t))z$. 该积分定义表明, Hessian 矩阵 (D^2v) 的正定性是函数 v 具有严格凸性的充分但不必要条件.

既然 k -凸与严格凸有很大的差异, 为了得到局部解的严格凸性, 我们需要给 f 附加什么条件呢? 设 $2 \leq k < n$ 和 $f(y_0) = 0$, 如果 $u \in C^2$ 是 $S_k[u] = f(y) \geq 0$ 的一个 k -凸解, 则 $S_{k+1}[u](y_0) \leq 0$, 故而只有两种可能:

- (1) $S_{k+1}[u](y_0) < 0$, 此时, u 不可能是 $(k+1)$ -凸;
- (2) $S_{k+1}[u](y_0) = 0$, 此外已知 $S_k[u](y_0) = 0$, 则应用文献 [6, 定理 2] 得到: 对于所有 $k \leq l \leq n$, 有

$$S_l[u](y_0) = 0.$$

那么, 如果考虑 $f \equiv 0$ 这种特殊的情形, 将会有如下情形发生:

- (1) $S_{k+1}[u] < 0$, 在 Ω 的某个开子集上成立;
- (2) $S_{k+1}[u] \equiv 0$, 在 Ω 中成立.

在 (1) 的情形下, u 不是 $(k+1)$ -凸, 那么必然也不是严格凸的. 对于 (2), 在 $k \leq l \leq n$ 时, 在 Ω 的某个开子集上 $S_l[u] \equiv 0$ 成立. 这表明, $k=2$ 时, 图 $(y, u(y))$ 的所有的 2 阶截曲率为 0, 那么该图将是一个柱体或者是一个超平面 (参见文献 [16, 17]), 自然不是严格凸的; $k > 2$ 时, 由文献 [18, 引理 3.1] 知, 该图是一个 $n-k+1$ 零型 (nullity) 的直纹曲面, 这表明至少在其直纹上, u 不是严格凸的.

受到上述工作的启发, 本文将研究如下形式方程的局部解:

$$S_k[u] = K(y)g(y, u, Du), \quad 2 \leq k \leq n, \quad (1.8)$$

其中 K 和 g 满足如下的条件 (H):

$$\begin{cases} K \in C^\infty, & \text{在 } y_0 \in \mathbb{R}^n \text{ 附近非负,} \\ K(y_0) = 0, & \text{Rank}(D^2K)(y_0) \geq n-k+1, \\ g \in C^\infty, & \text{在 } Z_0 = (y_0, u_0, p_0) \text{ 附近成立, 且 } g(Z_0) > 0. \end{cases} \quad (\text{H})$$

这一条件与坐标系的选取无关. 据此, 我们给出本文的主要结论.

定理 1.2 若 K 和 g 满足条件 (H), 则对任意 $s \geq 2[\frac{n}{2}] + 5$, 方程 (1.8) 在 $y_0 \in \mathbb{R}^n$ 处的某邻域内有一个严格凸的 H^s 局部解.

我们可以从下面例子看到这个定理的意义. 不难发现,

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + \frac{1}{12} y_n^4$$

是 Monge-Ampère 方程 $\det D^2u = y_n^2$ 的一个严格凸解, 但其 Hessian 矩阵 (D^2u) 在原点并不是正定的.

本文的内容安排如下: 第 2 节将研究 Hessian 算子关于 $(k-1)$ -凸可允许解的椭圆性; 第 3 节将构造近似严格凸解, 并给出局部解存在性的证明.

2 k -Hessian 算子的椭圆性

鉴于 Hessian 商算子

$$F_{k,k-1} = \frac{\sigma_k(\lambda(D^2u))}{\sigma_{k-1}(\lambda(D^2u))}, \quad \lambda(D^2u) \in \Gamma_{k-1}(n), \quad 2 \leq k \leq n \quad (2.1)$$

关于 $(k-1)$ -凸可允许解具有好的椭圆性 (参见文献 [15, 19]), 即命题 2.1, 我们希望对 Hessian 算子也得到类似的结果.

命题 2.1 对于 (2.1) 中的商算子, 我们有如下结论:

- (1) $(\frac{\partial F_{k,k-1}}{\partial r_{ij}})_{n \times n} > 0$, $3 \leq k \leq n$, $\lambda(D^2u) \in \Gamma_{k-1}$;
- (2) $(\frac{\partial F_{2,1}}{\partial r_{ij}})_{n \times n} > 0$, $\lambda(D^2u) \in \Gamma_1(n) \setminus \{te_i : 1 \leq i \leq n, t > 0\}$;
- (3) $(\frac{\partial F_{2,1}}{\partial r_{ij}})_{n \times n} = 0$, $\lambda(D^2u) \in \{te_i : 1 \leq i \leq n, t > 0\}$.

我们的目的是介绍 k -Hessian 算子关于 $(k-1)$ -可允许解的椭圆性 (参见文献 [5]), 由于 $S_k[u]$ 关于严格的 k -可允许解是椭圆的, 我们只需讨论 $\lambda(D^2u) \in \Gamma_{k-1} \setminus \Gamma_k = [\Gamma_{k-1} \cap \partial\Gamma_k(n)] \cup [\Gamma_{k-1} \setminus \bar{\Gamma}_k]$ 的情形. 当 $\lambda(D^2u) \in \Gamma_{k-1} \cap \partial\Gamma_k(n)$ 时, k -Hessian 算子关于 $(k-1)$ -可允许解的椭圆性有如下结果, 参见文献 [6, 定理 1.1].

命题 2.2 若 $\lambda \in \partial\Gamma_k(n) \cap \Gamma_{k-1}(n) = \mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2$ ($1 \leq k \leq n$) 成立, 则下列两个命题必有一个为真:

(i) $\lambda \in \mathbf{P}_2$, 即 $\sigma_{k+1}(\lambda) < 0$, 该论断等价于

$$\sigma_{k-1;i}(\lambda) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

(ii) $\lambda \in \mathbf{P}_1$, 即 $\sigma_{k+1}(\lambda) = 0$, 该论断等价于

$$\sigma_j(\lambda) = 0, \quad k \leq j \leq n.$$

注意到, 第二个论断不仅意味着 $\lambda \in \bar{\Gamma}_n(n)$, 而且可将它更精确地表达为 (旋转不变的意义下)

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, 0, \dots, 0), \quad k \geq 2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 按照降序排列.

我们知道对 $\lambda \in \Gamma_{k-1}(n)$ 和 (1.5), 一般来说 (1.7) 是不成立的; 但是, 如果已知 $\sigma_{k-1;1}(\lambda) \geq 0$, 那么 (1.7) 一定成立 (参见文献 [6, 引理 2.5]).

命题 2.3 设 $\lambda \in \Gamma_{k-1}(n)$, $2 \leq k \leq n$. 如果 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, 则

$$\sigma_{k-1;1}(\lambda) \geq 0 \quad (2.2)$$

等价于

$$0 \leq \sigma_{k-1;1}(\lambda) \leq \sigma_{k-1;2}(\lambda) \leq \dots \leq \sigma_{k-1;n}(\lambda); \quad \sigma_{k-1;n}(\lambda) > 0. \quad (2.3)$$

事实上, 由恒等式

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{k-1;i}(\lambda) = (n-k+1)\sigma_{k-1}(\lambda) \quad (2.4)$$

和 $\sigma_{k-1}(\lambda) > 0$ 知, (2.3) 中 $\sigma_{k-1;n}(\lambda) > 0$. 满足 (2.3) 的 $\lambda \in \Gamma_{k-1}(n)$ 不难得到, 如 $\lambda \in \Gamma_k(n) \subset \Gamma_{k-1}(n)$; 但如果 $\lambda \in \Gamma_k(n)$, 则 (1.6) 和 (1.7) 是自动成立的. 所以, 我们感兴趣的是, 是否存在 $\lambda \in \Gamma_{k-1}(n) \setminus \bar{\Gamma}_k(n)$, 使得 (1.6) 成立? 利用 $\emptyset \neq \mathbf{P}_2 \subset \partial\Gamma_{k-1}(n-1)$, 可以证明如下结论 (参见文献 [6, 定理 2.7]):

命题 2.4 对任意给定的 $c \in \mathbb{R}$, 如果 $2 \leq k < n$, 则存在 $\lambda \in \Gamma_{k-1}(n)$ 使得

$$0 < \sigma_{k-1;1}(\lambda) \leq \sigma_{k-1;2}(\lambda) \leq \cdots \leq \sigma_{k-1;n}(\lambda),$$

以及 $\psi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ 是方程 $S_k[\psi] = c$ 的 $(k-1)$ -凸解. 特别地, $S_k[\cdot]$ 在 ψ 处的线性化算子

$$\mathfrak{L}_\psi = \sum_{i=1}^n \sigma_{k-1;i}(\lambda) \partial_i^2$$

是一致椭圆的.

Ivochkina 等^[15] 在研究关于 Hessian 商方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned} F_{k,k-1}[u] &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u &= \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.5)$$

时得到 $(k-1)$ -可允许解的 $C^{1,1}$ 估计, 特别是 $f < 0$ 或者是 f 的符号不确定时, 获得 (2.5) 解的存在性是非常困难的. 文献 [15, 第 4.3 小节] 特别指出, 当 $\varphi = 0$ 且 $f < 0$ 时, 方程 (2.5) 没有 $(k-1)$ -凸可允许解. 比较命题 2.1 与 2.3, k -Hessian 商算子 $F_{k,k-1}[u]$ 比 k -Hessian 算子关于 $(k-1)$ -可允许解具有更强的椭圆性, 所以, 在 $f < 0$ 或者变号时, 证明 k -Hessian 方程的 Dirichlet 问题光滑解的存在性是非常困难的. 如果对 $f \geq 0$, 边界函数或者边界不加额外条件的情形下, 目前仅得到了 $C^{1,1}$ 解的存在性, 参见文献 [20–22]; Wang^[23] 的反例表明, $C^{1,1}$ 正则性是最佳的. 当 $f \in C^\infty$ 且 $f \geq 0$ 时, Hong 和 Zuily^[24] 证明了关于 Monge-Ampère 方程 C^∞ 局部凸解的存在性; 当 $2 \leq k < n$ 且 $f \geq 0$ 或者变号时, Chen 和 Han^[10] 及 Tian 等^[6] 证明了 C^∞ 局部解的存在性.

命题 2.5 对任意给定的 $c < 0$, 存在 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \Gamma_{k-1}(n)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, 使得

$$\sigma_k(\lambda) = c, \quad \sigma_{k-1;1}(\lambda) < 0, \quad \sigma_{k-1;n} > 0.$$

据此, 存在严格 $(k-1)$ -凸可允许解 $\psi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ 使得 $S_k[\psi] = c < 0$, $S_k[\cdot]$ 在 ψ 处的线性化算子 $\mathfrak{L}_\psi = \sum_{i=1}^n \sigma_{k-1;i} \partial_i^2$ 不是退化椭圆型的, 而是混合型的.

证明 注意到当 $1 \leq k < n$ 时, $\mathbf{P}_2 \neq \emptyset$. 因此, 当 $k \geq 2$ 时, 可选取 $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbf{P}_2 \subset \partial\Gamma_{k-1}(n-1)$, 这里不妨设 $\delta_2 \geq \delta_3 \geq \cdots \geq \delta_n$. 显然, $\delta_2 \geq 0$, 下面证明 $\delta_2 > 0$. 如果 $k > 2$, 由 $\mathbf{P}_2$ 的性质可知, $\delta \in \Gamma_{k-2}(n-1)$, 从而, $\delta_2 > 0$; 如果 $k = 2$, 由 $\delta \in \partial\Gamma_{k-1}(n-1)$ 可知,

$$\sigma_{k-1}(\delta) = \sigma_1(\delta) = \sum_{i=2}^n \delta_i = 0,$$

由此可得, $\delta_2 \geq 0$. 我们接下来说明 δ 取不到 0. 这是因为: 假设 $\delta_2 = 0$, 由上式得到

$$\delta_2 = \delta_3 = \cdots = \delta_n = 0,$$

从而, $\sigma_2(\delta) = 0$, 这与 $\delta \in \mathbf{P}_2$ 矛盾, 因为 $\delta \in \mathbf{P}_2 \subset \partial\Gamma_{k-1}(n-1)$, 故 $\sigma_2(\delta) < 0$. 由 $\delta \in \mathbf{P}_2 \subset \partial\Gamma_{k-1}(n-1)$ 得到

$$\sigma_{k-1}(\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n) = 0, \quad \sigma_k(\delta_2, \dots, \delta_n) < 0, \quad \sigma_j(\delta) > 0, \quad 1 \leq j \leq k-2.$$

进一步地, 选取 $\delta_1 = \delta_2 + 1$, 则

$$\sigma_k(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = [\delta_1 \sigma_{k-1}(\delta_2 + t, \dots, \delta_n + t) + \sigma_k(\delta_2 + t, \dots, \delta_n + t)]|_{t=0} < 0.$$

选取 $t < 0$ 充分小, 使得

$$\begin{aligned}\sigma_{k-1}(\delta_2 + t, \dots, \delta_n + t) &= \sigma_{k-1}(\delta) + t(n - k + 1)\sigma_{k-2}(\delta) + O(t^2) < 0, \\ \sigma_k(\delta_2 + t, \dots, \delta_n + t) &< 0.\end{aligned}$$

综合上述两个式子可知, 如果 $t < 0$ 充分小, 则

$$\sigma_k(\delta_1, \delta_2 + t, \dots, \delta_n + t) = \delta_1 \sigma_{k-1}(\delta_2 + t, \dots, \delta_n + t) + \sigma_k(\delta_2 + t, \dots, \delta_n + t) < 0. \quad (2.6)$$

记 $\mu = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, 由于 $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$, $\sigma_{k-1,1}(\mu) = \sigma_{k-1}(\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n) = 0$, 利用命题 2.3 得到

$$0 \leq \sigma_{k-1,1}(\mu) \leq \sigma_{k-1,2}(\mu) \leq \dots \leq \sigma_{k-1,n}(\mu).$$

现在断言 $\sigma_{k-1,n}(\mu) > 0$, 否则 $0 \leq \sigma_{k-1,1}(\mu) \leq \sigma_{k-1,2}(\mu) \leq \dots \leq \sigma_{k-1,n}(\mu) = 0$. 由此得到

$$\sigma_{k-1}(\mu) = \frac{1}{n - k + 1} \sum_{i=1}^n \sigma_{k-1,i}(\mu) = 0.$$

综合上式和 (2.6) 得到

$$\mu \in \mathbf{P}_2 \subset \partial \Gamma_{k-1}(n).$$

由命题 2.2(i) 知, $\sigma_{k-1,1}(\mu) > 0$, 这与 $\sigma_{k-1,1}(\mu) = \sigma_{k-1}(\delta_2, \dots, \delta_n) = 0$ 矛盾. 由于 $\sigma_{k-1,n}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = \sigma_{k-1,n}(\delta_1, \delta_2 + t, \dots, \delta_n + t)|_{t=0} > 0$, 选取 $t < 0$ 更小, 使得

$$\sigma_{k-1,n}(\delta_1, \delta_2 + t, \dots, \delta_n + t) > 0,$$

由 (2.6), 令 $\lambda = (s\delta_1, s(\delta_2 + t), \dots, s(\delta_n + t))$, 其中 $s > 0$ 使得

$$\sigma_k(s\delta_1, s(\delta_2 + t), \dots, s(\delta_n + t)) = c, \quad \sigma_{k-1,1}(\lambda) < 0, \quad \sigma_{k-1,n}(\lambda) > 0,$$

如此, 这个 λ 即为定理所需要的 λ . 证毕. $\square$

综合命题 2.2-2.5, 我们得到定理 1.1, 从而可以应用隐函数定理 (参见文献 [25, 命题 2.4 和第 125 页]) 证明以下存在性定理 (参见文献 [5, 6, 10]).

定理 2.1 假设 $2 \leq k \leq n - 1$, $f = f(y, u, p)$ 为定义在 $Z_0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 附近的 C^∞ 函数, 则方程 (1.1) 存在 C^∞ 的严格 $(k - 1)$ -凸的局部解, 且方程 (1.1) 关于该解是一致椭圆的.

(1) 如果 $f(Z_0) = 0$, 则该局解一定不是 $(k + 1)$ -凸的;

(2) 如果在 Z_0 附近 $f > 0$, 则对每一个 $0 \leq l \leq n - k$, 方程 (1.1) 存在一个 C^∞ 的严格 $(k + l)$ -凸但非 $(k + l + 1)$ -凸的局部解.

3 k -Hessian 方程的局部解

本节将在前述 k -Hessian 多项式分类的基础上, 研究方程

$$S_k[u] = K(y)g(y, u, Du) \quad (3.1)$$

局部解的存在性和凸性, 其中 K 和 g 满足条件 (H). Tian 和 Xu^[26] 在特殊情形 $g \equiv 1$ 和 $\text{Rank}(D^2K)(y_0) = n - k + 1$ 证明了方程 (3.1) 局部解的存在性和凸性, 我们希望在一般的情形下证明类似的结论. 因为

特殊情形与一般情形的证明没有本质上的不同, 这里仅给出证明的大致思路. 由于条件 (H) 与坐标的选取无关, 我们选取特殊的坐标系, 在此坐标系下解的 Taylor 展开的主项可以被清晰地表达出来. 由于方程的退化性来源于 K , 为了简化运算, 我们做一个平移使得

$$y \mapsto y + y_0.$$

同时由于方程中不涉及一阶和零阶的部分, 我们对函数 u 做一个调整, 使得 $u \mapsto u - u(y_0)$. 同时, 我们还可以假设 $Z_0 = (0, 0, 0)$. 由于 $K(y)$ 在原点达到最小值, 那么由临界点定理得到 $\nabla K(0) = 0$.

另一方面, 由条件 (H) 知,

$$\text{Rank}(D^2 K(y_0)) = n - l, \quad 0 \leq l \leq k - 1,$$

先作正交变换, 随后把 K 表示为带积分余项的 5 阶 Taylor 展式, 我们可假设

$$K(y) = \sum_{j=l+1}^n c_j y_j^2 + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k} (0) y_i y_j y_k + Q(y) + O(1)|y|^5,$$

其中 $2c_j$ 是 $D^2 K(y_0)$ 的正特征值, $Q(y)$ 是一个四次齐次多项式. 我们有如下估计:

$$\begin{aligned} K(y', 0) &= Q(y) |_{y''=0} + O(1)|y'|^5 \geq 0, \\ \frac{\partial K}{\partial y_i}(y', 0) &= O(1)|y'|^2, \quad l+1 \leq i \leq n, \\ \frac{\partial^2 K}{\partial y_i \partial y_j}(y', 0) &= O(1)|y'|, \quad l+1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial y_i^2}(y', 0) - c_i &= O(1)|y'|, \quad l+1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

其中 $y = (y', 0) = (y'', 0, 0)$.

为了刻画局部性, 我们作变量替换 $y = \varepsilon^2 x$, 其中 ε 是一个小的参量. 另一方面, 取定一个区域

$$\begin{aligned} \Omega &= Q_\pi \times Q_{\delta_0} \subset \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k+1}, \\ Q_\pi &= \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{k-1} : |x_i| < \pi, 1 \leq i \leq k-1\}, \\ Q_{\delta_0} &= \left\{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-k+1} : \sum_{i=k}^n |x_i|^2 < \delta_0^2 \right\}, \end{aligned}$$

其中 $\delta_0 > 0$ 为一个待定的充分小的参数, 它的作用是刻画 Q_{δ_0} 在某些方向上的窄度, $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{k-1})$, $\tilde{x} = (x_k, \dots, x_n)$. 我们将选定某个 $\varepsilon_0 > 0$, 且研究如下形式的方程:

$$S_k[u] = \tilde{f} \text{ 在 } \Omega_{\varepsilon_0} = \{y = \varepsilon_0^2 x : x \in \Omega\} \text{ 中成立}, \quad (3.2)$$

此处,

$$\tilde{f} = \tilde{f}(y, u, p) = \sum_{i=l+1}^n c_i y_i^2 + \chi(\varepsilon^{-2} \tilde{y}) \left[K(y) g(y, u, Du) - \sum_{i=l+1}^n c_i y_i^2 \right], \quad (3.3)$$

这里 $\chi(\tilde{x}) \in C_0^\infty(Q_\pi)$ 是一个截断函数: 它在 $|\tilde{x}| \leq \frac{\pi}{2}$ 时取值为 1; 在 $\tilde{x} \geq \pi$ 时取值为 0. 注意到 (3.3) 的局部解也是 (3.1) 的局部解. 引入截断函数 $\chi(\tilde{x})$ 的目的是为了保证非齐次项以及线性化方程的所有

系数关于变量 $\tilde{x}$ 是周期的. 由于线性化算子 $\mathfrak{L}_G(w)$ 的系数可能在 $\tilde{x}$ 方向上退化, 我们这样处理使得所有的系数在 $\tilde{x}$ 方向上是周期的, 而周期解的存在性比较容易得到.

我们将 (3.2) 的局部解按如下形式构造:

$$u(y) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \tau_j y_j^2 + P(y) + \varepsilon^{\frac{17}{2}} w(\varepsilon^{-2} y), \quad (3.4)$$

其中 w 是一个光滑函数.

解的构造分为三个步骤.

3.1 构造齐次线性方程的解

令 $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{k-1}, 0, \dots, 0)$, $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_{k-1}$, 那么凸函数

$$\varphi(y) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \tau_j y_j^2 \quad (3.5)$$

满足齐次方程 $S_k[\varphi] = 0$, 且其线性化算子 $\mathfrak{L}_\varphi = \sum_{j=1}^n \sigma_{k-1;j}(\tau) \partial_j^2$ 是退化椭圆的, 因为

$$\begin{aligned} \sigma_{k-1;j}(\tau) &= 0, \quad 1 \leq j \leq k-1, \\ \sigma_{k-1;j}(\tau) &= \sigma_{k-1}(\tau) = \prod_{l=1}^{k-1} \tau_l > 0, \quad k \leq j \leq n. \end{aligned}$$

φ 同时满足 $S_{k+1}[\varphi] = 0$.

在文献 [5, 6] 中, 我们选取 $\tau \in \partial\Gamma_k(n)$ 满足 $\sigma_{k+1}(\tau) < 0$, 在此条件下 φ 不是 $(k+1)$ -凸. 同时, 文献 [10] 中构造的解也不可能是 $(k+1)$ -凸的, 这是因为在某种意义下“非 $(k+1)$ -凸”与“线性化算子的一致椭圆型”是等价的. 所以为了构造严格凸的局部解, 我们只能考虑 $\sigma_{k+1}(\tau) = 0$ 这种情形, 而在这种情形下, 线性化算子必然是退化的. 另一方面, (3.5) 定义的函数 φ 在 y_j ($k \leq j \leq n$) 方向的凸性太弱, 无法保证该函数在扰动后仍然具备凸性.

3.2 近似严格凸解

我们利用条件 (H) 构造 $P(y)$ 使得

$$\psi(y) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \tau_j y_j^2 + P(y), \quad (3.6)$$

则 ψ 在 Ω_{ε_0} 上严格凸, 且满足 $S_k[\psi] = \tilde{f} + O(1)\varepsilon^{\frac{9}{2}}$.

3.3 Nash-Moser 迭代

最后需要证明存在光滑函数 w 使得由 (3.4) 定义的 u 是 (3.2) 的一个局部解. 为此, 我们引入 Nash-Moser-Hörmander 迭代

$$\begin{cases} w_0 = 0, & w_{m+1} = w_m + S_m \rho_m, \\ \mathfrak{L}_G(w_m) \rho_m + \theta_m \Delta \rho_m = g_m \text{ 在 } \Omega \text{ 中成立,} \end{cases} \quad (3.7)$$

此处, $\{S_m\}$ 是一族光滑算子,

$$g_m = -G(w_m) = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{9}{2}}} \{S_k(\psi + \varepsilon^{\frac{17}{2}} w_m(\varepsilon^{-2} y)) - \tilde{f}\}, \quad \theta_m = \sup_{\Omega} |G(w_m)| = \|g_m\|_{L^\infty},$$

同时,

$$\mathfrak{L}_G(w) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial G(r(w))}{\partial r_{ij}} \partial_i \partial_j,$$

此处,

$$r(w) = \left(\sum_{l=1}^{k-1} \delta_i^j \delta_j^l \tau_l + P_{ij}(\varepsilon^2 x) + \varepsilon^{\frac{9}{2}} w_{ij}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

迭代的步骤是, 先证明线性化方程解 w_m 的存在性, 然后在 Sobolev 空间中证明

$$\theta \rightarrow 0, \quad w_m \rightarrow w,$$

随后将此 w 代入 u 的表达式 (3.4) 中, 得到 (3.2) 的局部解. 整个过程中, 我们需要保持 (3.6) 中 ψ 的凸性.

因为线性化方程是退化椭圆的, 因此, 关于解 ρ_m 的先验估计会有正则性损失; 同时线性化算子的系数又依赖于 $D^2 w_m$, 因此, 我们必须将 ρ_m 光滑化才可以保证 (3.7) 中的迭代的合法性. 本文的迭代与文献 [6] 中迭代差异较大.

下面在一般情形下构造 $P(y)$. 用 Taylor 展开将 $K(y)$ 和 g 分别表达成

$$K(y) = K(y', y'') = K(y', 0) + \sum_{i=l+1}^n \frac{\partial K}{\partial y_i}(y', 0) y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=l+1}^n \frac{\partial^2 K}{\partial y_i \partial y_j}(y', 0) y_i y_j + O(1) |y''|^3$$

和

$$\begin{aligned} g &= g(y', y'', u, Du) \\ &= g(y', 0, 0, 0) + \sum_{i=l+1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i}(y', 0, 0, 0) y_i + \frac{\partial g}{\partial u}(y', 0, 0, 0) u \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial p_i}(y', 0, 0, 0) u_{y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial p_j}(y', 0, 0, 0) u_{y_i} u_{y_j} \\ &\quad + O(1) [|y''|^2 + |y'' u| + |y'' \nabla_y u| + |u|^2 + |u \nabla_y u| + |\nabla_y u|^3]. \end{aligned}$$

先考虑 $\varepsilon^{\frac{17}{2}} w(\varepsilon^{-2} y)$ 对 $P(y)$ 的影响. 这些可能有影响的项如下:

$$K(y) \varepsilon^{\frac{17}{2}} \frac{\partial g}{\partial u}(y', 0, 0, 0) w(x) = O(1) \varepsilon^{\frac{23}{2}}, \quad K(y) \varepsilon^{\frac{13}{2}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial p_i}(y', 0, 0, 0) w_{y_i}(x) = O(1) \varepsilon^{\frac{19}{2}},$$

由于 $K(y) = O(1) \varepsilon^4$, 因此, 以上各项的影响是“可忽略”的. 所谓的“可忽略”, 是该项不会影响 $P(y)$ 的凸性. 因此, 我们可以将 $K(y)g(y, u, Du)$ 分解成为主项和一些“可忽略”的项, 其主项为

$$R(y) \equiv K(y', 0)g(0, 0, 0, 0) + \sum_{i=l+1}^n \frac{\partial K}{\partial y_i}(y', 0) \frac{\partial g}{\partial y_i}(y', 0, 0, 0) y_i^2$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=l+1}^n \frac{\partial^2 K}{\partial y_i^2}(y', 0) y_i^2 \left[g(y', 0, 0, 0) + \frac{\partial g}{\partial u}(y', 0, 0, 0) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \tau_i y_i^2 \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^l \frac{\partial g}{\partial p_i}(y', 0, 0, 0) \tau_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial p_j}(y', 0, 0, 0) (\tau_i y_i) (\tau_j y_j) \right] \\
 & \equiv R_1(y) + R_2(y) + R_3(y) + \sum_{i=l+1}^n c_i y_i^2 g(0, 0, 0, 0),
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 R_1(y) &= K(y', 0) g(0, 0, 0, 0), \\
 R_2(y) &= \sum_{i=l+1}^{k-1} \frac{\partial K}{\partial y_i}(y', 0) \frac{\partial g}{\partial y_i}(y', 0, 0, 0) y_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=l+1}^{k-1} \frac{\partial^2 K}{\partial y_i^2}(y', 0) y_i^2 \left[g(y', 0, 0, 0) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial g}{\partial u}(y', 0, 0, 0) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \tau_i y_i^2 + \sum_{i=1}^l \frac{\partial g}{\partial p_i}(y', 0, 0, 0) \tau_i y_i \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial p_j}(y', 0, 0, 0) (\tau_i y_i) (\tau_j y_j) \right] - \sum_{i=l+1}^{k-1} c_i y_i^2 g(0, 0, 0, 0), \\
 R_3(y) &= \sum_{i=k}^n \frac{\partial K}{\partial y_i}(y', 0) \frac{\partial g}{\partial y_i}(y', 0, 0, 0) y_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=k}^n \frac{\partial^2 K}{\partial y_i^2}(y', 0) y_i^2 \left[g(y', 0, 0, 0) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial g}{\partial u}(y', 0, 0, 0) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \tau_i y_i^2 + \sum_{i=1}^l \frac{\partial g}{\partial p_i}(y', 0, 0, 0) \tau_i y_i \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial p_j}(y', 0, 0, 0) (\tau_i y_i) (\tau_j y_j) \right] - \sum_{i=k}^n c_i y_i^2 g(0, 0, 0, 0),
 \end{aligned}$$

当 $l = k - 1$ 时, R_2 为 0. 与 $g \equiv 1$ 的情形类似, 我们有

$$\tilde{f} = \sum_{i=l+1}^n c_i y_i^2 g(0, 0, 0, 0) + \chi(\varepsilon^{-2} y') \left[K(y) g(y, u, Du) - \sum_{i=l+1}^n c_i y_i^2 g(0, 0, 0, 0) \right].$$

(3.4) 中的 $P(y)$ 可以按照如下形式构造:

$$\begin{aligned}
 P(y) &\equiv \frac{1}{2(n-k+1) \prod_{i=1}^{k-1} \tau_i} \chi(\varepsilon^{-2} y') [R_1(y) + R_2(y)] \sum_{j=k}^n y_j^2 \\
 &+ \frac{1}{12 \prod_{i=1}^{k-1} \tau_i} \chi(\varepsilon^{-2} y') \sum_{i=k}^n \frac{\partial K}{\partial y_i}(y', 0) \frac{\partial g}{\partial y_i}(y', 0, 0, 0) y_i^4 \\
 &+ \frac{1}{24 \prod_{i=1}^{k-1} \tau_i} \chi(\varepsilon^{-2} y') \sum_{i=k}^n \frac{\partial^2 K}{\partial y_i^2}(y', 0) y_i^4 \left[g(y', 0, 0, 0) + \frac{\partial g}{\partial u}(y', 0, 0, 0) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \tau_i y_i^2 \right. \\
 &+ \sum_{i=1}^l \frac{\partial g}{\partial p_i}(y', 0, 0, 0) \tau_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l \frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial p_j}(y', 0, 0, 0) (\tau_i y_i) (\tau_j y_j) \left. \right] \\
 &- \frac{1}{12 \prod_{i=1}^{k-1} \tau_i} g(0, 0, 0, 0) \chi(\varepsilon^{-2} y') \sum_{i=k}^n c_i y_i^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2(n-k+1) \prod_{i=1}^{k-1} \tau_i} g(0, 0, 0, 0) \sum_{i=l+1}^{k-1} c_i y_i^2 \sum_{j=k}^n y_j^2 \\
& + \frac{1}{12} \sum_{i=k}^n \left[\frac{c_i g(0, 0, 0, 0)}{\prod_{i=1}^{k-1} \tau_i} - 4m(n-k) \right] y_i^4 + m \sum_{j=k}^n \sum_{i=k, i \neq j}^n y_i^2 y_j^2, \quad (3.8)
\end{aligned}$$

其中

$$0 < m < \frac{1}{8(n-k)^2 + 4(n-k+1)} \min_{k \leq j \leq n} \left\{ \frac{g(0, 0, 0, 0) c_j}{\prod_{i=1}^{k-1} \tau_i} \right\}.$$

如此, 这样的 $P(y)$ 即可使得 (3.6) 中定义的 ψ 在 Ω_{ε_0} 上严格凸, 且 $S_k[\psi] = \tilde{f} + O(1)\varepsilon^{\frac{9}{2}}$.

特别说明 当 $g \equiv 1$, $\text{Rank}(D^2 K)(y_0) = n - k + 1$, (3.8) 中的 $P(y)$ 就是文献 [26] 中的 $P(y)$. 对于一般形式的非齐次项 $f(y, u, Du)$, 我们的方法失效, 因为在 $f(y, u, Du)$ 的 Taylor 展开式中存在如下的项:

$$\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=l+1}^n \partial_{y_i} \partial_{p_i} f(0, 0, 0, 0) \tau_i y_i y_j,$$

这些项既不是无穷小阶数高的“可忽略”项, 又不是能单独影响整体符号的主项. 这是因为这些项与 ε^4 是同阶的, 所以, 它们是不可忽略的; 但如果把它们作为主部, 将导致 $P_{jj}(y) \geq m|y''|^2$ 无法成立, 因为该不等式是保证解的严格凸性的关键.

致谢 非常感谢审稿人指出本文的错误及修改意见.

参考文献

- Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. New York: Springer, 1983
- Caffarelli L, Nirenberg L, Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian. Acta Math, 1985, 155: 261–301
- Ivochkina N M, Prokof'eva S I, Yakunina G V. The Gårding cones in the modern theory of fully nonlinear second order differential equations. J Math Sci, 2012, 184: 295–315
- Harvey F R, Lawson H B Jr. Dirichlet duality and the nonlinear Dirichlet problem. Comm Pure Appl Math, 2009, 62: 396–443
- Tian G J, Wang Q, Xu C J. C^∞ Local solutions of elliptical 2-Hessian equation in $\mathbb{R}^3$. Discrete Contin Dyn Syst, 2016, 36: 1023–1039
- Tian G J, Wang Q, Xu C J. Local solvability of the k -Hessian equations. Sci China Math, 2016, 59: 1753–1768
- Guan P F, Ma X N. The Christoffel-Minkowski problem I: Convexity of solutions of a Hessian equation. Invent Math, 2003, 151: 553–577
- Guan P F, Lin C S, Ma X N. The Christoffel-Minkowski problem II: Weingarten curvature equations. Chin Ann Math Ser B, 2006, 27: 595–614
- Guan P F, Ma X N, Zhou F. The Christoffel-Minkowski problem III: Existence and convexity of admissible solutions. Comm Pure Appl Math, 2006, 59: 1352–1376
- Chen T, Han Q. Smooth local solutions to Weingarten equations and σ_k -equations. Discrete Contin Dyn Syst, 2016, 36: 653–660
- Liu P, Ma X N, Xu L. A Brunn-Minkowski inequality for the Hessian eigenvalue in three-dimensional convex domain. Adv Math, 2010, 225: 1616–1633
- Ma X N, Xu L. The convexity of solution of a class Hessian equation in bounded convex domain in $\mathbb{R}^3$. J Funct Anal, 2008, 255: 1713–1723
- Salani P. Convexity of solutions and Brunn-Minkowski inequalities for Hessian equations in $\mathbb{R}^3$. Adv Math, 2012, 229: 1924–1948
- Han Q, Hong J X. Isometric Embeddings of Riemannian Manifolds in Euclidean Spaces. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 130. Providence: Amer Math Soc, 2006
- Ivochkina N M, Trudinger N S, Wang X J. The Dirichlet problem for degenerate Hessian equations. Comm Partial Differential Equations, 2005, 29: 219–235

- 16 Shiohama K. Cylinders in Euclidean space E^{2+n} . Kodai Math Sem Rep, 1967, 19: 225–228
- 17 Ushakov V. Developable surfaces in Euclidean space. J Aust Math Soc, 1999, 66: 388–402
- 18 Hartman P. On isometric immersions in Euclidean space of manifolds with non-negative sectional curvatures. Trans Amer Math Soc, 1965, 115: 94–109
- 19 Ge Y, Lin C S, Wang G. On the 2-scalar curvature. J Differential Geom, 2010, 84: 45–86
- 20 Guan P F, Trudinger N S, Wang X J. On the Dirichlet problem for degenerate Monge-Ampère equations. Acta Math, 1999, 182: 87–104
- 21 Hong J X. Dirichlet problems for general Monge-Ampère equations. Math Z, 1992, 209: 289–306
- 22 Hong J X, Huang G, Wang W. Existence of global smooth solutions to Dirichlet problem for degenerate elliptic Monge-Ampère equations. Comm Partial Differential Equations, 2011, 36: 635–656
- 23 Wang X J. The k -Hessian equation. In: Geometric Analysis and PDEs. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1977. Dordrecht: Springer, 2009, 177–252
- 24 Hong J X, Zuily C. Existence of C^∞ local solutions for the Monge-Ampère equation. Invent Math, 1987, 89: 645–661
- 25 Alinhac S, Gérard P. Pseudo-Differential Operators and the Nash-Moser Theorem. Graduate Studies in Mathematics, vol. 82. Providence: Amer Math Soc, 2007
- 26 Tian G J, Xu C J. Existence and convexity of local solutions to degenerate Hessian equations. J Differential Equations, 2018, 264: 6025–6060

On the local properties of the solutions to k -Hessian equations

Qi Wang, Guji Tian & Chaojiang Xu

Abstract In this paper, we study the ellipticity of k -Hessian operators with respect to $(k-1)$ -convex admissible solutions. Moreover, we research the strictly convex solutions to degenerate k -Hessian equations. We first analyze the strictly convex solutions to degenerate k -Hessian equations. By the virtue of this analysis of the ellipticity under this condition, we give a classification of k -Hessian operators. According to this classification, we construct strictly convex local solutions to degenerate k -Hessian equations.

Keywords local solution, ellipticity, strict convexity

MSC(2010) 35J60, 35J70

doi: 10.1360/N012018-00078