K-场畴壁解

张玉鹏, 刘玉孝*

兰州大学物理科学与技术学院, 兰州 730000

*联系人, E-mail: liuyx@lzu.edu.cn

收稿日期: 2018-05-03; 接受日期: 2018-05-21; 网络出版日期: 2018-08-09

国家自然科学基金(编号: 11705070)资助

摘要 通过考虑五维平直时空中非正则的标量场K-场, 得到了解析的单扭结和双扭结K-场畴壁解. 然后采用Yukawa耦合机制研究五维费米子在单扭结和双扭结K-场畴壁上的局域化, 发现四维零质量的手征费米子可以局域化在K-场畴壁上. 最后通过对比费米子在两种扭结畴壁上的有效势, 发现双扭结畴壁情况的有效势具有双阱的特征, 表明双扭结畴壁具有更加丰富的内部结构.

关键词 畴壁, 标量场, 局域化, K-场, 费米子

PACS: 11.10.Kk, 04.20.Gz, 11.15.Kc

1 引言

在牛顿理论中我们就已经有了时空的概念, 即一维绝对时间加上三维绝对空间的四维时空, 而且在这个时空中4种基本相互作用之一的引力是作为一种超距作用而存在的. 直到1905年爱因斯坦意识到时间和空间不是绝对的而是相对的, 并且提出了狭义相对论. 但牛顿引力不满足狭义相对论中的洛伦兹协变性. 爱因斯坦经过十年的思考后, 终于在1916年提出了广义相对论, 成功地解决了引力不协变的问题, 统一了时间、空间与物质并且指出时空是弯曲的, 时空的弯曲程度是由物质分布所决定, 并且时空的弯曲也会影响物质在时空中的运动. 在广义相对论中爱因斯坦利用黎曼几何来描述时空的弯曲, 并且指出在弯曲时空中物质场的运动和时空

的弯曲程度的联系可由爱因斯坦方程来描述:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1)$$

其中, $T_{\mu\nu}$ 是物质场的能动张量, 表征时空中的物质场分布, 度规 $g_{\mu\nu}$ 是用来度量时空中间隔的张量, $R_{\mu\nu}$ 是Ricci张量, 由描述时空的弯曲程度的黎曼曲率张量 $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ 缩并而来. 各种张量指标 $\mu, \nu, \alpha, \beta, \dots$ 的取值范围和时空维度有关系. 对于日常感知的时空我们通常选取四维时空, 但是广义相对论并没有限定时空的维度一定是四维. 所以一个最直接的问题就是是否存在额外维, 以及如果存在额外维的话会有什么新的效应并且为什么我们感受不到额外维.

19世纪20年代, 为了统一四维的引力理论和电磁理论, Kaluza和Klein (KK)^[1,2]在爱因斯坦广义相对论的基础上提出额外维理论. 为了避免与四维

引用格式: 张玉鹏, 刘玉孝. K-场畴壁解. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 100004

Zhang Y P, Liu Y X. K-fields domain wall (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 100004, doi: 10.1360/SSPMA2018-00172

观测的矛盾, 他们假设额外维的尺度为普朗克尺度, 并且发现引入紧致的额外维后, 不但能够从形式上统一引力和电磁, 而且还会预言一些新的粒子, 即KK粒子. 后来随着粒子物理的进一步发展, 人们发现除了电磁和引力相互作用还存在强相互作用和弱相互作用, 并且这4种相互作用很有可能通过弦理论来统一. 但是只有在高维时空中弦理论才是一个自洽的理论^[3]. 因此关于高维时空的研究也变得越来越重要. 那么有没有可能存在无穷大的额外维且不与现在的实验观测所矛盾呢? 显然, 引入无穷大额外维以后一个最重要的问题是, 我们四维时空中的物质(粒子)是通过什么机制束缚在四维时空的, 而不运动到额外维中出去? 1983年, Rubakov和Shaposhnikov^[4]通过构造在具有无限大额外维的五维平直时空背景下的畴壁解, 证明了手征费米子可局域化在畴壁上, 这为无穷大额外维的存在提供了一种可行的机制, 显然假设我们是生活在一个高维时空中的畴壁上合理的. 后来人们通过考虑引力, 将Rubakov和Shaposhnikov的畴壁解推广到弯曲时空中, 提出了厚膜模型, 发现各种物质场都可以通过与厚膜的背景耦合而局域化在膜上^[5-19]. 在额外维理论提出以后人们将其应用到各种模型并且成功地解决了很多物理疑难, 例如规范层次问题^[20-26]、宇宙学常数问题^[27-33]以及暗物质^[34-36]等.

本文主要研究非正则标量场的畴壁解以及费米子在非正则标量场畴壁上的局域化. 一种比较常见的非正则标量场是K-场, 该场的拉格朗日量是标量场及其动能项的函数, 最先在解释宇宙暴涨的时候被提出^[37]. K-场也被推广到卷曲额外维理论中并且也有一些相关的工作^[38,39]. 在本文中我们将在具有无限大额外维的五维平直时空中考虑非正则形式的K-场来构造单扭结及双扭结畴壁解, 同时也研究费米子在K-场畴壁上的局域化, 通过对比四维费米子感受到的关于额外维的有效势进一步研究单扭结和双扭结K-场畴壁对手征费米子局域化的影响.

本文组织如下, 在第2部分中我们通过选取不同的K-场函数形式构造单扭结以及多扭结畴壁解. 在第3部分我们研究手征费米子在K-场畴壁上的局域化, 并分析两种扭结畴壁上费米子局域化的不同性

质. 最后在第4部分给出简单的总结.

2 K-场畴壁解的构造

本节主要介绍畴壁解的构造, 首先介绍Rubakov和Shaposhnikov^[4]在1983年提出的正则标量畴壁模型. 本文考虑额外维为无限大的五维平直时空, 度规如下:

$$ds^2 = \eta_{MN} dx^M dx^N = -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + dy^2, \quad (2)$$

其中, y 表示额外维坐标并且满足 $-\infty < y < \infty$. 为了解决存在无穷大额外维时物质场如何束缚在四维的问题, Rubakov和Shaposhnikov^[4]通过考虑一个与额外维 y 相关的正则标量场 $\phi(y)$ 且伴随真空 Z_2 对称性自发破缺的标量势 $V_1(\phi)$ 构造了一个畴壁解, 成功解决了物质场束缚在四维的问题. 相应的标量场 $\phi(y)$ 作用量为

$$S = \int d^4x dy \left(-\frac{1}{2} \eta^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi - V_1(\phi) \right), \quad (3)$$

其中, 指标 M, N 为五维指标且满足 $M, N = (0, 1, 2, 3, 4)$, 对应的畴壁解为

$$\phi(y) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\frac{my}{\sqrt{2}}\right), \quad (4)$$

$$V_1(\phi) = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4, \quad (5)$$

其中, 标量势 $V_1(\phi)$ 真空 Z_2 对称性自发破缺. 畴壁背景标量场的能动张量如下:

$$T_{MN} = \partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{2} \eta_{MN} \eta^{AB} \partial_A \phi \partial_B \phi - \eta_{MN} V(\phi). \quad (6)$$

相应的能量密度 ρ 可由能动张量(式(6))与观者速度 U^M 缩并得到:

$$\rho = T_{MN} U^M U^N. \quad (7)$$

在五维静态时空的观者速度满足 $U^M = (1, 0, 0, 0, 0)$. 标量场保持 Z_2 对称性但破坏真空 Z_2 对称性的标量势为

$$V = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda} \phi(y)^2 - \frac{m^2}{2\sqrt{\lambda}} \right)^2, \quad (8)$$

则相应的能量密度为

$$\rho(y) = \frac{3m^4}{4\lambda} \operatorname{sech}^4\left(\frac{my}{\sqrt{2}}\right). \quad (9)$$

能量密度(式(9))关于额外维分布如图 1 所示, 可以看出能量主要集中分布在额外维的一个小区间, 故将其称为畴壁. 受这种能量分布启发 Rubakov 和 Shaposhnikov^[4] 又进一步考虑了物质场通过和畴壁的相互作用从而局域化在四维畴壁上的可能性. 作为具体例子, 通过考虑五维时空中的费米子 Ψ 与背景标量场 ϕ 的 Yukawa 耦合 $\eta\phi\bar{\Psi}\Psi$:

$$S_{\frac{1}{2}} = \int d^5x [\bar{\Psi}\Gamma^M \partial_M \Psi + \eta\phi\bar{\Psi}\Psi], \quad (10)$$

发现零质量左手征费米子感受到一个关于额外维的有效势使得费米零模被束缚在畴壁上, 从而得到一个关于额外维的束缚态如图 2 所示. 至此费米子已通过这种机制成功地局域化在四维时空, 这就提供了一种使得大额外维可能存在的机制. 类似的耦合方式后来被广泛用来研究费米子在弯曲畴壁上的局域化^[5,8-19].

接下来主要进行 K -场畴壁解的构造, K -场是指具有非正则动能项的标量场. 考虑下面 K -场的作用量

$$S_K = \int d^4x dy (K(X) - V(\phi)), \quad (11)$$

其中, $X = -\frac{1}{2}\eta^{MN}\partial_M\phi\partial_N\phi$, ϕ 是标量场且只是额外维坐标 y 的函数, 即 $\phi = \phi(y)$. 作用量式(11)对标量场 ϕ 变分可得运动方程:

$$(\phi'(y)K_X)' - V_\phi = 0, \quad (12)$$

其中, $K_X \equiv dK(X)/dX$, ' 表示对额外维 y 的偏导. 对应 K -场的能动张量为

$$T_{MN} = K_X \partial_M \phi \partial_N \phi + \eta_{MN}(K - V). \quad (13)$$

其能量密度仍可用式(9)求得. 本文中考虑如下两种形式的 K -场函数:

$$K_1(X) = X - aX^2, \quad (14)$$

$$K_2(X) = cX + X \frac{c_n}{(2n+1)} \left(\frac{2sX}{k^2v^2}\right)^n, \quad (15)$$

其中第一种 K -场函数式(14)对应的二维闵氏畴壁解在文献[40]中也有过研究.

2.1 单扭结畴壁解

这一小节中主要构造单扭结 K -场畴壁解, 非正则标量场 K -场的运动方程(12)已在前面给出, 将第一种形式 K -场函数(式(14))代入标量场的运动方程后, 相应的标量场运动方程为

$$(1 - 2aX)\phi''(y) - 2aX'\phi'(y) = V_\phi. \quad (16)$$

与之相应的单扭结 K -场畴壁解中的标量场 $\phi(y)$ 以及标量势 $V(\phi)$ 分别为

$$\phi(y) = v \tanh(ky), \quad (17)$$

$$V(\phi) = \frac{k^2}{4v^4} \left[6ak^2v^4 + v^2(2 - 6ak^2\phi^2) + 3ak^2\phi^4 \right] \times (\phi^2 - 2v^2)\phi^2. \quad (18)$$

标量势(式(18))关于额外维的形状如图 3 所示, 可以看到对应的标量势有两个真空, 与给定的标量场的扭结形式一致.

图 1 单扭结正则标量场的标量势(a)以及沿额外维的能量密度(b). 这里参数取值为 $\lambda = 1, m = 1$

Figure 1 Plots of the scalar potential (a) and energy density (b) of the single-kink canonical scalar field domain wall, the parameters are set as $\lambda = 1, m = 1$.

图 2 单扭结正则标量场畴壁解对应左手征费米零模关于额外维的有效势(a)和零模(b), 这里将参数取值为 $\lambda = 1, m = 1, \eta = 2$
Figure 2 Plots of effective potential (a) and zero mode (b) of the left-chiral fermion with the extra dimension, the parameters are set as $\lambda = 1, m = 1, \eta = 2$.

通过选取第一种形式的 K -场函数(式(14))实现了单扭结 K -场畴壁解的构造, 并且对应的标量势(式(18))和正则标量场畴壁解类似, 即单扭结标量场对应两个真空. 相应的单扭结 K -场畴壁的能量密度也可以通过能动张量(式(13))求得, 对应 K -场能量密度为

$$\rho(y) = \frac{1}{4}k^2v^2\text{sech}^4(ky)(ak^2v^2\text{sech}^4(ky) + 2). \quad (19)$$

能量密度(式(19))关于额外维分布的形状也在图 3 中给出, 可以看出对应的单扭结 K -场畴壁关于额外维的能量密度分布与 Rubakov 和 Shaposhnikov^[4]在 1983 年构造的正则畴壁类似, 能量关于额外维的分布集中在一个小局域.

那么有没有有可能在 K -场畴壁解中实现单扭结标量场对应多个场真空呢? 如果利用前面选取的第二种 K -场函数(15)将会发现在 K -场畴壁解中可以构造出单扭结多真空畴壁解, 将第二种 K -场函数(式(15))分别代入标量场的运动方程(12)后可得运

动方程如下:

$$\left(c + \frac{2^n(n+1)c_n\left(\frac{sX}{k^2v^2}\right)^n}{2n+1} \right) \phi''(y) + \frac{2^n n(n+1)c_n X' \left(\frac{sX}{k^2v^2}\right)^n}{(2n+1)X} \phi'(y) = V_\phi. \quad (20)$$

可求得畴壁解相应的标量场 $\phi(y)$ 和标量势 $V(\phi)$ 如下:

$$\phi(y) = v \tanh(ky), \quad (21)$$

$$V(\phi) = \frac{k^2(v^2 - \phi^2)^2}{2v^2} \left\{ c_n \left[-s \left(\frac{\phi^2}{v^2} - 1 \right)^{2^n} + c \right] \right\}. \quad (22)$$

相应的能量密度为

$$\rho = \frac{k^2v^2\text{sech}^4(ky)}{2n+1} \times \left\{ (n+1)c_n(-s\text{sech}^4(ky))^n + 2nc + c \right\}. \quad (23)$$

当参数 $c = -1$ 时对应的标量势(式(22))如图 4 所示, 而

图 3 第一种 K -场函数形式(14)单扭结畴壁解对应的标量势(a)和对应的能量密度分布(b), 这里将参数设置为 $a = 1, v = 1, k = 1$
Figure 3 Plots of the scalar potential (a) and energy density (b) of the single-kink domain wall with the form of eq. (14) K -field function, the parameters are set as $a = 1, v = 1, k = 1$.

且势函数有多个真空, 这是 K -场畴壁解所展现的新的特征.

当单扭结对应多真空的 K -场畴壁解中参数 c_n 由小变大时, 如图 5(a) 所示对应标量势(式(22))的内部结构从内部多真空形式趋于和式(18)一样的双真空形式. 注意到对于这种单扭结对应多真空的 K -场畴壁解, 对应的能量密度(式(23))将会小于零, 其关于额外维的分布在图 5 中给出, 但在参数 c_n 增大时能量密度关于额外维的分布越来越趋近于单扭结对应双真空的能量分布, 如图 3 所示, 这和 c_n 增大时标量势趋于双真空行为一致.

当参数 $c = 1$ 时将会避免能量小于零的问题, 但是 K -场畴壁解又会退回单扭结对应双真空的形式. 在图 6 中给出了标量势以及能量密度, 显然对于第二种 K -场函数参数 $c = 1$ 构造的畴壁解, 其关于额外维分布能量密度避免了小于零的问题(参数 n 取整偶数), 但是又退回了单扭结对应双真空的形式.

2.2 双扭结畴壁解

这一小节主要构造双扭结 K -场畴壁解, 采取与前面单扭结 K -场畴壁求解相同的步骤, 将第一种 K -场函数式(14)代入标量场的运动方程(12)可得双扭结畴壁解 K -场畴壁解为

$$\begin{aligned} \phi(y) &= v \tanh^3(ky), \\ V(\phi) &= \frac{9}{4}k^2 \left(\frac{\phi}{v}\right)^{4/3} \left\{ 27ak^2v^4 \left(\frac{\phi}{v}\right)^{4/3} \right. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &+ 2v^2 \left[81ak^2\phi^2 \left(\frac{\phi}{v}\right)^{2/3} - 54ak^2\phi^2 - 2 \left(\frac{\phi}{v}\right)^{2/3} + 1 \right] \\ &+ 2v\phi \sqrt[3]{\frac{\phi}{v}} \left(1 - 54ak^2\phi^2 \right) + 27ak^2\phi^4 \Big\}. \end{aligned} \quad (25)$$

由于双扭结标量场和单扭结标量场的结构不一样, 相应的标量场势(式(25))的内部结构也会不一样, 在图 7 和 8 中给出了标量势和标量场的形状. 其能量密度为

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{9}{128}k^2v^2 \tanh^4(ky) \operatorname{sech}^{12}(ky) \\ &\times \left(8(7 - 72ak^2v^2) \cosh(2ky) \right. \\ &+ 4(36ak^2v^2 + 7) \cosh(4ky) + 432ak^2v^2 \\ &+ 8 \cosh(6ky) + \cosh(8ky) + 35 \Big). \end{aligned} \quad (26)$$

可以看到势函数的极小值数目与单扭结 K -场畴壁解不再一样, 以及关于额外维的能量分布也出现了劈裂并且显示出了内部结构, 预示着对于双扭结 K -场畴壁其内部结构比单扭结 K -场畴壁要更加丰富.

接下来考虑第二种 K -场函数来构造双扭结畴壁解. 采用和前面相同的步骤, 考虑第二种 K -场函数后相应的双扭结 K -场畴壁解为

$$\begin{aligned} \phi(y) &= v \tanh^3(ky), \\ V(\phi) &= \frac{9}{2}k^2 \left\{ 9^n c_n \left[-s \left(\frac{\phi}{v}\right)^{4/3} \left(\left(\frac{\phi}{v}\right)^{2/3} - 1 \right)^2 \right]^n + c \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

图 4 (网络版彩图)单扭结 K -场畴壁关于第二种 K -函数形式(式(15))标量势. (a) $s = -1, n = 1$ ($c_n = 1, 2, 3$), $c_n = 1$ (黑色虚线), $c_n = 2$ (红色短虚线), $c_n = 3$ (蓝色实线); (b) $s = -1, c_n = 1$ ($n = 1, 2, 3$), $n = 1$ (黑色虚线), $n = 2$ (红色短虚线), $n = 3$ (蓝色实线). 这里将参数设置为 $c = -1, v = 1, k = 1$

Figure 4 (Color online) Plots of the scalar potential of the single-kink domain wall for the form of K -field function (eq. (15)). (a) $s = -1, n = 1$ ($c_n = 1, 2, 3$), $c_n = 1$ (black dashed line), $c_n = 2$ (red dashed line), $c_n = 3$ (blue solid line); (b) $s = -1, c_n = 1$ ($n = 1, 2, 3$), $n = 1$ (black dashed line), $n = 2$ (red dashed line), $n = 3$ (blue solid line). The other parameters are set as $c = -1, v = 1, k = 1$.

图 5 (网络版彩图)单扭结 K -场畴壁关于第二种 K -函数形式标量势(a)和能量密度(b), $s = -1, n = 1$ ($c_n = 1, 5, 10$). 黑色虚线对应 $c_n = 1$, 红色短虚线对应 $c_n = 5$, 蓝色实线对应 $c_n = 10$. 这里将参数设置为 $c = -1, v = 1, k = 1$

Figure 5 (Color online) Plots of the scalar potential (a) and energy density (b) of the single-kink domain wall for the form of K -field function (eq. (15)), $s = -1, n = 1$ ($c_n = 1, 5, 10$), the parameters are set as $c_n = 1$ (black dashed line), $c_n = 5$ (red dashed line), $c_n = 10$ (blue solid line), the other parameters are set as $c = -1, v = 1, k = 1$.

图 6 (网络版彩图)第二种 K -函数对应畴壁的标量势(a)和能量密度(b), $s = -1, n = 1$ ($c_n = 1, 5, 10$). 黑色虚线对应 $c_n = 1$, 红色短虚线对应 $c_n = 5$, 蓝色实线对应 $c_n = 10$. 这里将参数设置为 $c = 1, v = 1, k = 1$

Figure 6 (Color online) Plots of the scalar potential (a) and energy density (b) of the single-kink domain wall for the form of K -field function (eq. (15)), the parameters are set as $c_n = 1$ (black dashed line), $c_n = 5$ (red dashed line), $c_n = 10$ (blue solid line), the other parameters are set as $c = 1, v = 1, k = 1$.

图 7 单扭结标量场(式(17))(a)和双扭结标量场(式(24))(b), 这里将参数设置为 $a = 1, v = 1, k = 1$

Figure 7 Plots of the single-kink scalar field (eq. (17)) (a) and double-kink scalar field (eq. (24)) (b) of the domain wall for the form of K -field function (eq. (14)), the parameters are set as $a = 1, v = 1, k = 1$.

图 8 双扭结畴壁标量势(a)以及相应的能量密度(b), 这里将参数设置为 $a = 1, v = 1, k = 1$

Figure 8 Plots of the scalar potential (a) and energy density (b) of the double-kink domain wall for the form of K -field function (eq. (14)), the parameters are set as $a = 1, v = 1, k = 1$.

$$\times \left\{ v^2 \left(\frac{\phi}{v} \right)^{4/3} + \phi^2 \left(\left(\frac{\phi}{v} \right)^{2/3} - 2 \right) \right\}. \quad (28)$$

能量密度仍可用式(13)求得, 当参数 $c = -1$ 时对应的标量势和能量密度在图 9 中给出. 注意对于第二种 K -场函数当参数 $c = -1$ 时, 相应的双扭结畴壁仍然有能量密度小于零的问题, 但显示出单扭结畴壁解所没有的内部结构.

当第二种 K -场函数中参数 $c = 1$ 时不仅可以避免能量密度小于零的问题, 还会出现比第一种 K -场函数更加丰富的内部结构. 当参数 $c = 1$ 时对应的标量势和能量密度在图 10 中给出. 注意到在我们构造的两种畴壁模型中均出现能量密度小于零的情况, 这与对应的 K -场畴壁解的不稳定性相关, 关于 K -场畴壁解稳定性的讨论详细讨论见文献[40].

其中参数 n 决定标量势的开口, 参数 c_n 决定畴壁的内部结构. 当 n 为偶的正整数时标量势开口向上,

这时无无论参数 c_n 怎么变对应的标量势和能量密度都和第一种 K -场函数对应的形状类似, 如图 11 所示. 但是当参数 n 为奇数的时候, 参数 c_n 变化的时候对应的双扭结畴壁将会显示出比第二种 K -场畴壁解更丰富的内部结构, 如图 12 所示, 能量密度关于额外维的分布由双峰结构变为四峰结构.

3 费米子局域化

在正则标量畴壁模型中, 畴壁背景标量场与五维费米子的耦合[4]使得费米子感受到一个来自额外维的有效势, 从而提供了一种有效的机制能够用来解释大额外维存在的合理性. 在前面已经构造了单扭结和双扭结 K -场畴壁解, 接下来我们进一步研究五维费米子在 K -场畴壁解上的局域化. 费米子局域化一般通过考虑费米子与畴壁背景标量场的耦合来

图 9 第二种 K -场函数(式(15))参数 $c = -1$ 对应的畴壁解中标量势(a)和能量密度(b), 这里将参数设置为 $v = 1, k = 1, s = -1, c_n = 1, n = 1$

Figure 9 Plots of the scalar potential (a) and energy density (b) of the domain wall for the form of K -field function (eq. (15)) with the parameter $c = -1$, the other parameters are set as $v = 1, k = 1, s = -1, c_n = 1, n = 1$.

图 10 第二种 K -场函数(式(15))参数 $c = 1$ 对应的畴壁解中标量势(a)和能量密度(b), 这里将参数设置为 $v = 1, k = 1, s = 1, c_n = 1, n = 1$

Figure 10 Plots of the scalar potential (a) and energy density (b) of the domain wall for the form of K -field function (eq. (15)) with the parameter $c = 1$, the other parameters are set as $v = 1, k = 1, s = 1, c_n = 1, n = 1$.

图 11 (网络版彩图)第二种 K -场函数(式(15))参数 $c = -1$ 对应的畴壁解中标量势(a)和能量密度(b), 这里将参数设置为 $v = 1, k = 1, s = 1, n = 2$. 黑色虚线对应 $c_n = 1$, 红色短虚线对应 $c_n = 2$, 蓝色实线对应 $c_n = 3$

Figure 11 (Color online) Plots of the scalar potential (a) and energy density (b) of the domain wall for the form of K -field function (eq. (15)) with the parameter $c = -1$, the parameters are set as $c_n = 1$ (black dashed line), $c_n = 2$ (red dashed line), $c_n = 3$ (blue solid line), the other parameters are set as $v = 1, k = 1, s = 1, n = 2$.

图 12 (网络版彩图)第二种 K -场函数(式(15))参数 $c = 1$ 对应的畴壁解中标量势(a)和能量密度(b), 这里将参数设置为 $v = 1, k = 1, s = 1, n = 1$. 黑色虚线对应 $c_n = 1$, 红色短虚线对应 $c_n = 3$, 蓝色实线对应 $c_n = 5$

Figure 12 (Color online) Plots of the scalar potential (a) and energy density (b) of the domain wall for the form of K -field function (eq. (15)) with the parameter $c = 1$, the parameters are set as $c_n = 1$ (black dashed line), $c_n = 3$ (red dashed line), $c_n = 5$ (blue solid line), the other parameters are set as $v = 1, k = 1, s = 1, n = 2$.

实现, 当对应的畴壁背景标量场是关于额外维的奇函数时我们采用的耦合方式为Yukawa耦合 $\phi\bar{\Psi}\Psi$ ^[4], 当对应的畴壁背景标量场为关于额外维的偶函数的时候前面的Yukawa耦合将不再适用, 这时候我们采用一种新的耦合方式偏微分耦合即 $\bar{\Psi}\Gamma^M\partial_M\phi\gamma^5\Psi$ ^[41]. 本文只研究基于Yukawa耦合的费米子局域化. 考虑Yukawa耦合以后的费米子作用量是

$$S_{\frac{1}{2}} = \int d^5x [\bar{\Psi}\Gamma^M\partial_M\Psi + \eta\phi\bar{\Psi}\Psi], \quad (29)$$

其中, η 用来表征费米子和畴壁背景标量场的耦合强度, Ψ 是五维费米子, Γ^M 是五维时空中的gamma矩阵且 $\Gamma^MD_M = \gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^5\partial_y$. 通过对上面的费米子作用量(式(29))变分我们可以得到五维费米子的运动方程:

$$[\gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^5\partial_y]\Psi + \eta\phi\Psi = 0. \quad (30)$$

接下来我们对五维的Dirac费米子作手征分解:

$$\Psi(x, y) = \sum_n [\psi_{Ln}(x)f_{Ln}(y) + \psi_{Rn}(x)f_{Rn}(y)]. \quad (31)$$

这里手征费米子满足 $\psi_{Ln} = -\gamma^5\psi_{Ln}$ 和 $\psi_{Rn} = \gamma^5\psi_{Rn}$, 其中 ψ_{Ln} 和 ψ_{Rn} 分别为四维的左手征和右手征费米子, 并且满足如下耦合方程

$$\begin{aligned} \gamma^\mu\partial_\mu\psi_{Ln}(x) &= m_n\psi_{Rn}(x), \\ \gamma^\mu\partial_\mu\psi_{Rn}(x) &= m_n\psi_{Ln}(x), \end{aligned} \quad (32)$$

其中, m_n 是四维时空中费米子的有效质量. 将五维费米子的手征分解(式(31))以及耦合方程(式(32))代入运动方程(式(30))我们可以得到KK费米子关于额外维的左右手征耦合方程:

$$\begin{aligned} (\partial_y - \eta\phi)f_{Ln} &= +m_nf_{Rn}, \\ (\partial_y + \eta\phi)f_{Rn} &= -m_nf_{Ln}. \end{aligned} \quad (33)$$

对于耦合方程式(33), 我们也可以将其改写成如下的类薛定谔方程:

$$[-\partial_y^2 + V_L(y)]f_{Ln} = m_n^2 f_{Ln}, \quad (34)$$

$$[-\partial_y^2 + V_R(y)]f_{Rn} = m_n^2 f_{Rn}, \quad (35)$$

其中的有效势如下所示:

$$V_{L,R}(y) = (\eta\phi)^2 \pm \partial_y(\eta\phi). \quad (36)$$

可解得费米子的零模

$$f_{L0,R0} \propto e^{\pm\eta\int\phi dy}. \quad (37)$$

手征费米子的KK模式(31)满足如下正交关系:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Lm}f_{Ln}dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Rm}f_{Rn}dy = \delta_{mn}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Ln}f_{Rn}dy &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

上面的正交关系(式(38))通常用来验证费米子能否局域化在四维时空^[19,41].

对于单扭结 K -场畴壁解相应的费米子的有效势(式(36))以及手征零模(式(37))为

$$V_{L,R}(y) = \pm\eta v (\eta v \tanh^2(ky) - k\text{sech}^2(ky)), \quad (39)$$

$$f_{L0,R0} = \cosh^{\frac{\pm\eta v}{k}}(ky). \quad (40)$$

与之对应的费米子的有效势(式(39))以及零模(式(40))在图13中给出.

可用条件(式(38))来检验左手征费米零模能否局域化, 将单扭结 K -场畴壁模型中的费米零模(式(40))关于额外维积分得到如下形式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2(y)} dy = \tanh(\infty) - \tanh(-\infty) = 2 < \infty. \quad (41)$$

显然在我们构造的单扭结 K -场畴壁上手征费米子是可以局域化的.

双扭结 K -场畴壁对应的手征费米子的有效势以及零模为

$$\begin{aligned} V_{L,R}(y) &= \pm\eta v \tanh^2(ky) \\ &\quad (\pm\eta v \tanh^4(ky) - 3k\text{sech}^2(ky)), \end{aligned} \quad (42)$$

$$f_{L0,R0} \propto \exp\left[\frac{\pm\eta v}{2k} (\text{sech}^2(ky) + 2\log(\cosh(ky)))\right]. \quad (43)$$

与之对应的费米子的势函数(式(42))以及零模(式(43))的图形在图14中给出.

在双扭结畴壁上费米子感受到的关于额外维的有效势变成了双阱, 相比单扭结对应的单阱有效势双阱具有内部结构, 并且会导致左手征费米零模具有不同的波形使得其在畴壁上的分布与单扭

图 13 单扭结畴壁解对应费米子局域化的有效势(a)和零模(b), 其中虚线对应右手征费米子, 实线对应左手征费米子. 这里将参数设置为 $a = 1, v = 1, \eta = -2$

Figure 13 Plots of the effective potential (a) and zero mode (b) of chiral fermion on the single-kink domain wall, the parameters are set as $a = 1, v = 1, \eta = -2$, the black dashed line stands for the right-chiral fermion, the solid line stands for the left-chiral fermion.

图 14 双扭结畴壁解对应费米子局域化的有效势(a)和零模(b), 其中虚线对应右手征费米子, 实线对应左手征费米子. 这里将参数设置为 $a = 1, v = 1, \eta = -2$

Figure 14 Plots of the effective potential (a) and zero mode (b) of chiral fermion on the double-kink domain wall, the parameters are set as $a = 1, v = 1, \eta = -2$, the black dashed line stands for the right-chiral fermion, the solid line stands for the left-chiral fermion.

结 K -场畴壁上不同. 仍然用条件(式(38))来检验左手征费米零模能否局域化在双扭结 K -场畴壁上. 可以给出在 y 趋于无穷远零模(式(43))的渐近行为如下:

$$f_{L0,R0}(y \rightarrow \infty) = e^{\pm \eta v |y|}. \quad (44)$$

将式(44)代入式(38)关于额外维积分得到如下形式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm 2\eta v |y|} dy = 2 \int_0^{\infty} e^{\pm 2\eta v |y|} dy = \frac{e^{2\eta v y}}{2\eta v} \Big|_0^{\infty}. \quad (45)$$

显然对于左手征费米零模关于额外维的积分在参数 $\eta = -2, v = 1$ 时是有限的, 在双扭结 K -场畴壁上左手征费米子是可以局域化的. 注意到对应的手

征费米子有效势式(39)和(42)是有限深势阱, 除了零模基态还可能存在其他束缚激发态(超越标准模型的 KK 粒子), 而且当粒子能量大于势阱深度的时候是可以逃逸到额外维中从而造成四维畴壁上的能量不守恒, 这是额外维畴壁模型所预言的新的物理效应.

至此为止, 我们成功地构造了单扭结以及双扭结 K -场畴壁解, 并且研究了手征费米零模在我们构造的两种 K -场畴壁上的局域化. 通过对比在不同扭结畴壁上相对应的手征费米零模发现畴壁解的背景标量场的结构与畴壁的内部结构相关, 并且与手征

费米子的有效势的内部结构有关.

4 结论

在五维平直时空构造了单扭结和双扭结两种形式 K -场畴壁解, 并且研究了手征费米子在单扭结和双扭结 K -场畴壁上的局域化, 发现在 K -场畴壁上手

征费米子都能局域化. 发现 K -场畴壁相比正则畴壁其内部结构将更加丰富, 对于单扭结 K -场畴壁解出现了单扭结对应多真空的结构, 对于双扭结畴壁解其关于额外维的能量分布出现了四峰的阵列形式. 也对比了手征费米子在单扭结和双扭结畴壁上的局域化, 发现手征费米子感受到的有效势将会从单阱变成具有内部结构双阱模式.

参考文献

- Klein O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Z Physik*, 1926, 37: 895–906
- Klein O. The atomicity of electricity as a quantum theory law. *Nature*, 1926, 118: 516
- Green M B, Schwarz J H, Witten E. Superstring Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1987
- Rubakov V A, Shaposhnikov M E. Do we live inside a domain wall? *Phys Lett B*, 1983, 125: 136–138
- Bajc B, Gabadadze G. Localization of matter and cosmological constant on a brane in anti de Sitter space. *Phys Lett B*, 2000, 474: 282–291, arXiv: [9912232](#)
- Liu Y X, Zhong Y, Yang K. Introduction to extra dimensions and thick brane model (in Chinese). *Progr Phys*, 2017, 37: 41–74 [刘玉孝, 钟渊, 杨科. 额外维与厚膜模型简介. *物理学进展*, 2017, 37: 41–74]
- Liu Y X. Introduction to extra dimensions and thick braneworlds. In: Ge M L, Cai R G, Liu Y X, eds. Memorial Volume for Yi-Shi Duan. Singapore: World Scientific, 2017
- Germán G, Herrera-Aguilar A, Malagón-Morejón D, et al. A de Sitter tachyon thick braneworld. *J Cosmol Astropart Phys*, 2013, 2013: 035, arXiv: [1210.0721](#)
- Bazeia D, Gomes A R. Bloch Brane. *J High Energy Phys*, 2004, 2004: 012, arXiv: [0403141](#)
- Ghoroku K, Nakamura A. Massive vector trapping as a gauge boson on a brane. *Phys Rev D*, 2002, 65: 084017, arXiv: [0106145](#)
- Melfo A, Pantoja N, Tempo J D. Fermion localization on thick branes. *Phys Rev D*, 2006, 73: 044033, arXiv: [0601161](#)
- Guerrero R, Melfo A, Pantoja N, et al. Gauge field localization on brane worlds. *Phys Rev D*, 2010, 81: 086004, arXiv: [0912.0463](#)
- Costa F W V, Silva J E G, Almeida C A S. Gauge vector field localization on a 3-brane placed in a warped transverse resolved conifold. *Phys Rev D*, 2013, 87: 125010, arXiv: [1304.7825](#)
- Rubin S G. Scalar field localization on deformed extra space. *Eur Phys J C*, 2015, 75: 333, arXiv: [1503.05011](#)
- Vaquera-Araujo C A, Corradini O. Localization of abelian gauge fields on thick branes. *Eur Phys J C*, 2015, 75: 48, arXiv: [1406.2892](#)
- Castillo-Felisola O, Schmidt I. Localization of fermions in different domain wall models. *Phys Rev D*, 2012, 86: 024014, arXiv: [1202.4734](#)
- Jardim I C, Alencar G, Landim R R, et al. Solutions to the problem of Elko spinor localization in brane models. *Phys Rev D*, 2015, 91: 085008, arXiv: [1411.6962](#)
- Choudhury S, Mitra J, SenGupta S. Fermion localization in higher curvature spacetime. *Class Quantum Grav*, 2018, 35: 025007, arXiv: [1503.07287](#)
- Andrianov A A, Andrianov V A, Novikov O O. CP Violation in the models of fermion localization on a domain wall (brane). *Theor Math Phys*, 2013, 175: 735–743, arXiv: [1304.0182](#)
- Randall L, Sundrum R. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys Rev Lett*, 1999, 83: 3370–3373, arXiv: [9905221](#)
- Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys Lett B*, 1998, 429: 263–272, arXiv: [9803315](#)
- Antoniadis I, Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, et al. New dimensions at a millimeter to a fermi and superstrings at a TeV. *Phys Lett B*, 1998, 436: 257–263, arXiv: [9804398](#)
- Gogberashvili M. Hierarchy problem in the shell-universe model. *Int J Mod Phys D*, 2002, 11: 1635–1638, arXiv: [9812296](#)
- Yang K, Liu Y X, Zhong Y, et al. Gravity localization and mass hierarchy in scalar-tensor branes. *Phys Rev D*, 2012, 86: 127502, arXiv: [1212.2735](#)
- Guo B, Liu Y X, Yang K, et al. Describing the ADD model in a warped geometry, arXiv: [1501.02674](#)
- Nakada H, Ketov S V. Randall-Sundrum braneworld in modified gravity. *Phys Rev D*, 2016, 94: 103503, arXiv: [1607.05379](#)
- Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Kaloper N, et al. A small cosmological constant from a large extra dimension. *Phys Lett B*, 2000, 480: 193–199,

- arXiv: [0001197](#)
- 28 Starkman G D, Stojkovic D, Trodden M. Large extra dimensions and cosmological problems. *Phys Rev D*, 2001, 63: 103511, arXiv: [0012226hep-th](#); *Phys. Rev. Lett.* **87**, 231303 (2001), arXiv: [0106143](#)
 - 29 Kim J E, Kyae B, Lee H M. Randall-Sundrum model for self-tuning the cosmological constant. *Phys Rev Lett*, 2001, 86: 4223–4226, arXiv: [0011118](#)
 - 30 Gogberashvili M. Gravitational trapping for extended extra dimension. *Int J Mod Phys D*, 2002, 11: 1639–1642, arXiv: [9908347](#)
 - 31 Kehagias A. A conical tear drop as a vacuum-energy drain for the solution of the cosmological constant problem. *Phys Lett B*, 2004, 600: 133–141, arXiv: [0406025](#)
 - 32 Dey P, Mukhopadhyaya B, SenGupta S. Neutrino masses, the cosmological constant, and a stable universe in a Randall-Sundrum scenario. *Phys Rev D*, 2009, 80: 055029, arXiv: [0904.1970](#)
 - 33 Neupane I P. De Sitter brane-world, localization of gravity, and the cosmological constant. *Phys Rev D*, 2011, 83: 086004, arXiv: [1011.6357](#)
 - 34 Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G. Phenomenology, astrophysics, and cosmology of theories with submillimeter dimensions and TeV scale quantum gravity. *Phys Rev D*, 1999, 59: 086004, arXiv: [9807344](#)
 - 35 Sahni V, Shtanov Y. Braneworld models of dark energy. *J Cosmol Astropart Phys*, 2003, 2003: 014, arXiv: [0202346](#)
 - 36 Cembranos J A R, Dobado A, Maroto A L. Brane-world dark matter. *Phys Rev Lett*, 2003, 90: 241301, arXiv: [0302041](#)
 - 37 Armendáriz-Picón C, Damour T, Mukhanov V. k -Inflation. *Phys Lett B*, 1999, 458: 209–218
 - 38 Liu Y X, Zhong Y, Yang K. Scalar-kinetic branes. *Europhys Lett*, 2010, 90: 51001
 - 39 Zhong Y, Liu Y X. Linearization of thick K-branes. *Phys Rev D*, 2013, 88: 024017
 - 40 Zhong Y, Liu Y X. K-field kinks: Stability, exact solutions and new features. *J High Energy Phys*, 2014, 2014: 41
 - 41 Liu Y X, Xu Z G, Chen F W, et al. New localization mechanism of fermions on braneworlds. *Phys Rev D*, 2014, 89: 086001, arXiv: [1312.4145](#)

K -fields domain wall

ZHANG YuPeng & LIU YuXiao*

School of Physical Science and Technology, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China

In this paper, we construct the single kink and double kink domain wall solutions by considering the non-canonical K -field in a flat five-dimensional spacetime. The localization of chiral fermion is also investigated with the Yukawa coupling mechanism, and the corresponding massless left-chiral fermion can be localized on the K -field two types domain walls. The effective potentials of the chiral fermion on the two types domain walls will have different behaviors and the corresponding effective potential of the chiral fermion on the double-kink domain wall will have double well, and which means that the double kink domain wall will have more richer internal structures.

domain wall, scalar fields, localization, K -field, fermions

PACS: 11.10.Kk, 04.20.Gz, 11.15.Kc

doi: [10.1360/SSPMA2018-00172](#)